WEITERBILDUNGSKOLLEG DER BUNDESSTADT BONN ABENDREALSCHULE ARS

WBK Bonn
Abendrealschule
Mathematik

Klasse: 3e

Name:____

22.05.2017

Exponent und Logarithmus

Sie haben bislang nur Grundrechenarten kennen gelernt und eine höhere Rechenart, die des Quadrierens und Radizierens („Wurzel ziehen“).

Die Potenzgesetze sind schnell wiederholt:

Beispiel:

$$2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$$

$$2^2\cdot 2^3 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^5 = 2^{2+3} = 32$$

$$\left(2^3\right)^2 = (2\cdot 2\cdot 2)\cdot\left(2\cdot 2\cdot 2\right) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^6 = 64$$

$$also: \left(2^3\right)^2 = 2^{2\cdot 3}$$

$$\frac{2^5}{2^2} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2} = 2\cdot 2\cdot 2 = 2^3 = 8$$

$$also: \frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$$

allgemein:

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ Faktoren}$$

$$a^n\cdot a^m = a^{n+m} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n+m\ Faktoren}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\cdot m\ Faktoren}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n-m\ Faktoren}$$

Beachten Sie bitte, dass die Basis immer gleich ist! Somit werden bei den Potenzgesetzen die Rechenarten um eine Stufe zurückgesetzt.

Multiplikation ➔ Addition   Division ➔ Subtraktion   Potenzieren ➔ Multiplizieren

Überlegen Sie sich selbst, wie das Wurzelziehen jetzt aussehen muss! Lassen Sie sich von folgender Idee leiten:

$$x^2 = x\cdot x$$

$$\sqrt{x^2} = x$$

Verallgemeinern Sie dies auf eine beliebige Wurzel:

$$4^3 = 4\cdot 4\cdot 4 = 64$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

$$also:$$

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ Faktoren}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Und jetzt zum Logarithmus:

für 4^3 kann man auch schreiben: exp(3*ln(4)) oder: $e^{3*\ln(4)}$
Probieren Sie das an einigen Beispielen mit Ihrem Taschenrechner aus.
Der Logarithmus von *e* ist 1, also: ln(*e*)=1
Probieren Sie auch das mit Ihrem Taschenrechner aus. ln(e^1)

Dabei bedeutet *e* die eulersche Zahl und ln ist der *lorithmus naturalis* (natürlicher Logarithmus) Logarithmus (griech.: λόγος = Verständnis, αριθμός = Zahl)
Diese Zahl ist zwar real auf der Zahlenachse zu finden, aber nicht durch eine algebraische Gleichung zu berechnen, also ist sie transzendent – genau wie Pi. Der Zahlen wert ist also nur approximativ anzugeben, also durch einen Näherungswert. Geben Sie in Ihren Taschenrechner ein: exp(1), und Sie erhalten als Ergebnis 2,718281…

Somit ist der Logarithmus die Umkehrung der Exponentialrechnung

Für den Logarithmus gilt folgende Funktionalgleichung: ln(x*y) = ln(x) + ln(y).
Hier wird also auch die Multiplikation um eine Rechenstufe zurückgesetzt.

Also kann man mit dem Logarithmus den Exponenten bestimmen, z.B. bei der Zinseszinsgleichung:

$$K_n=K_0(1+P)^n \quad \text{mit } P = p/100$$

Sind also das Startkapital, der Zinssatz sowie das Endkapital gegeben, so kann man die Laufzeit (z.B. bei Krediten) folgendermaßen berechnen:

$$K_n = K_0(1+P)^n \quad \text{teilen durch } K_0$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1+P)^n = e^{n\cdot\ln(1+P)} \quad \text{logarithmieren (ln)}$$

$$\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n\cdot\ln(1+P) \quad \text{teilen durch } \ln(1+P)$$

$$\frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1+P)} = n$$

Testen Sie dies mit Ihrem Taschenrechner an dem Einstiegsbeispiel der heutigen Stunde.

Berechnen Sie auch, wann sich das Kapital verdreifacht, verzehnfacht, … hat.

Aufgaben:

1. **Die Masse einer Melone kann unter idealen Bedingungen täglich um 10% zunehmen. Sie wiegt bei Beginn der Beobachtung 1 Kg. Melonen werden ab 2 ,5 kg geerntet. Bestimmen Sie die Wachstumsfunktion und berechnen Sie , wie viele Tage nach der Beobachtung die Melone geerntet werden kann.**

2. **Auf einer Seetangfarm werden Algen gezüchtet. Zu Beginn der Beobachtung ist eine Alge 1 m hoch. Die Zuchttiefe beträgt 20 m. Pro Woche verdoppelt sich die Algenlänge.**
   Wann erreichen sie die Oberfläche?
   Wenn die Alge mit 1 cm Länge ausgesetzt wird, dauert es wie lange, bis die Alge 1 m groß ist?