Hoofdstuk IV: goniometrische functies

www.karelappeltans.be

November 28, 2021

1 De goniometrische cirkel

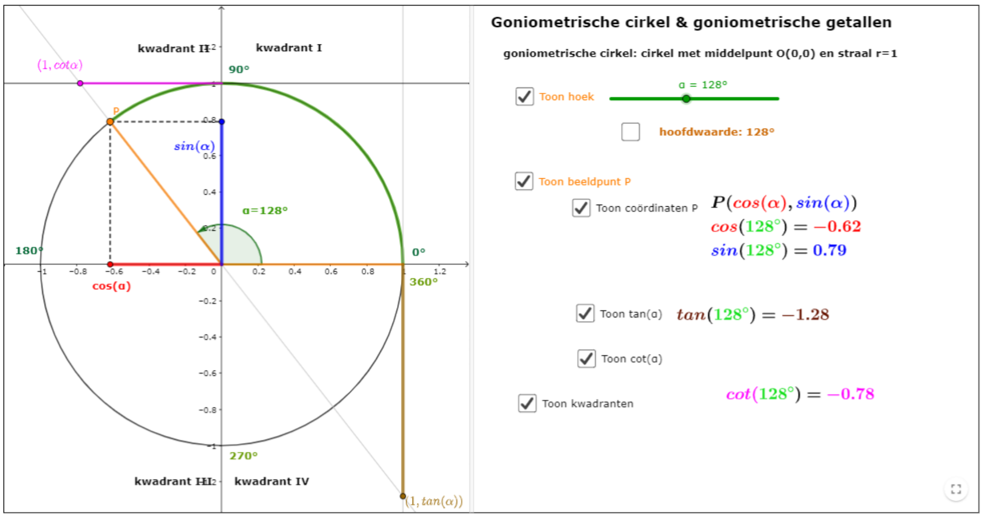
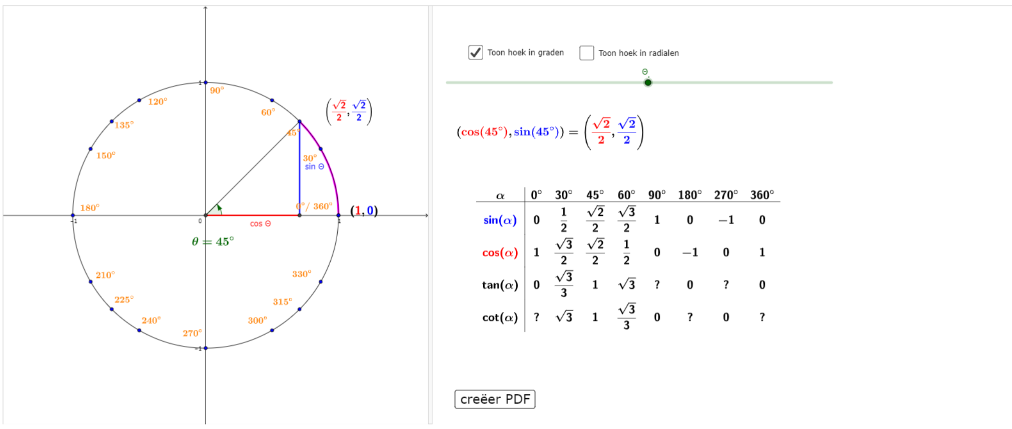


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/FrxeHcwA

2 De goniometrische getallen



α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	?	0	?	0
cot(α)	?	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	?	0	?

Figure 2: https://www.geogebra.org/m/FrxeHcwA

3 De Radiaal

3.1 Definitie

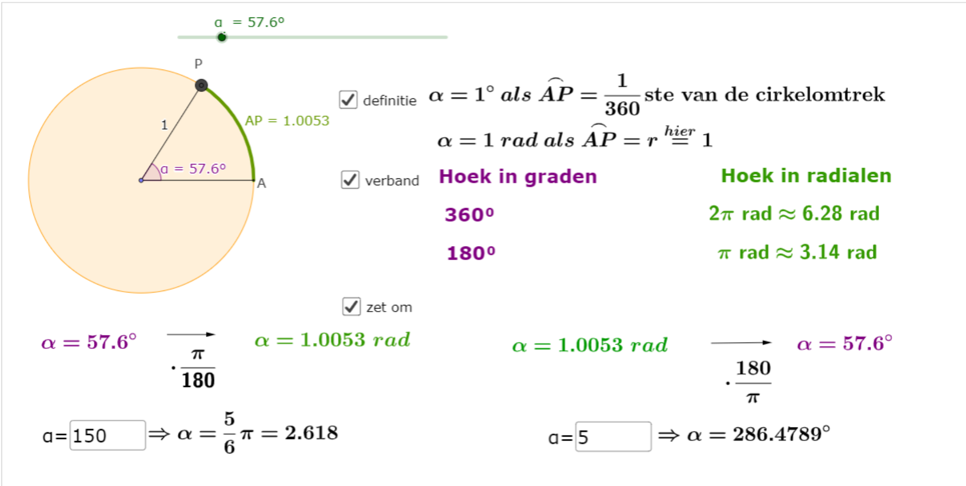


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/QjEWqdp3

Relevante hoeken in graden en radialen

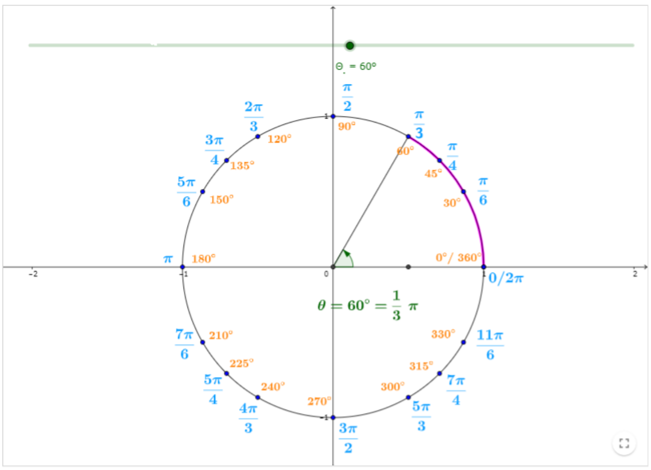


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/QjEWqdp3

3.2 booglengte

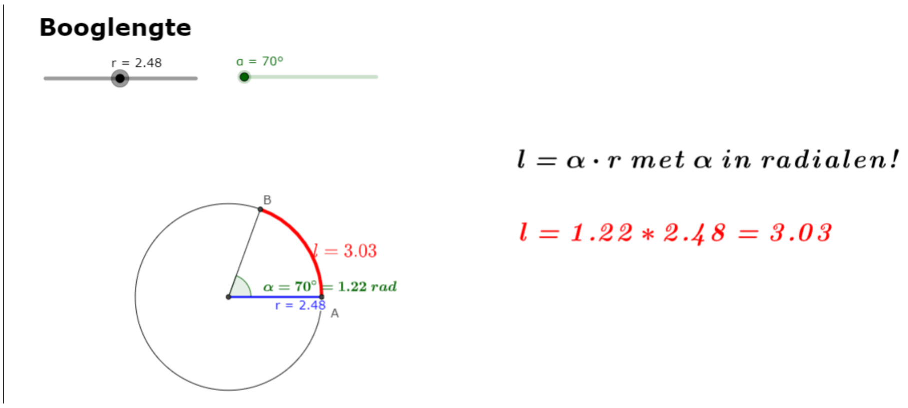


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/QjEWqdp3

4 Verwante hoeken

4.1 supplementaire hoeken

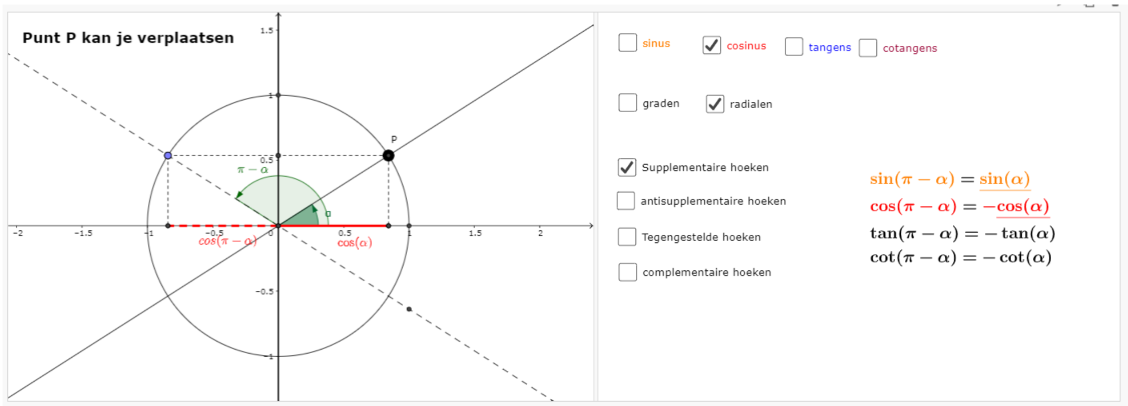


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/q27XXAeF

4.2 antisupplementaire hoeken

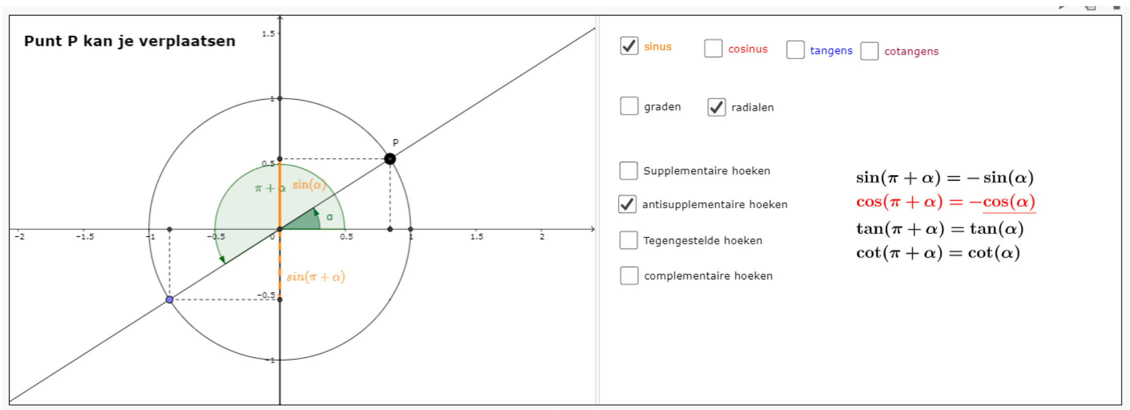


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/q27XXAeF

4.3 tegengestelde hoeken

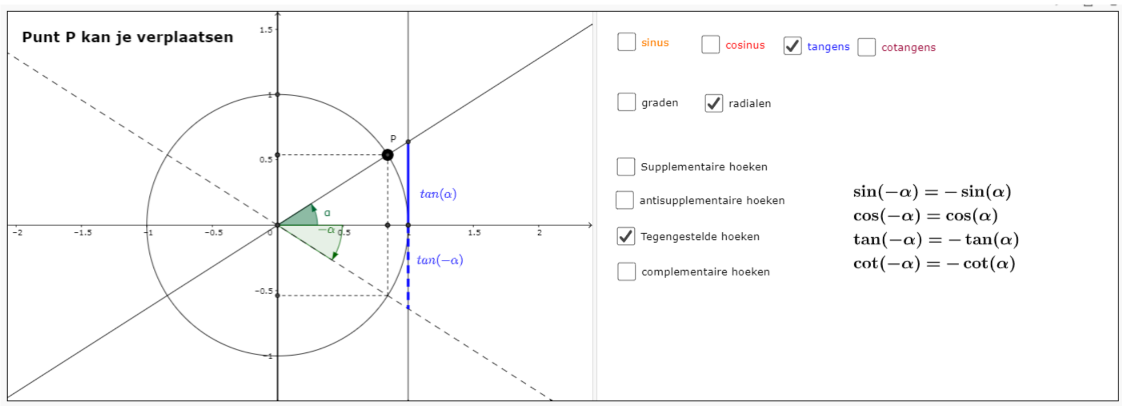


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/q27XXAeF

4.4 complementaire hoeken

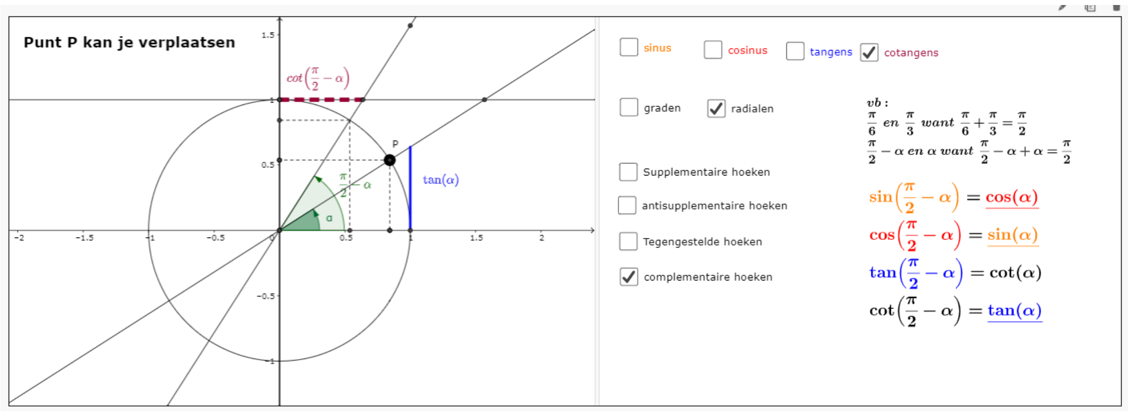


Figure 9: https://www.geogebra.org/m/q27XXAeF

4.5 willekeurige verwantschap

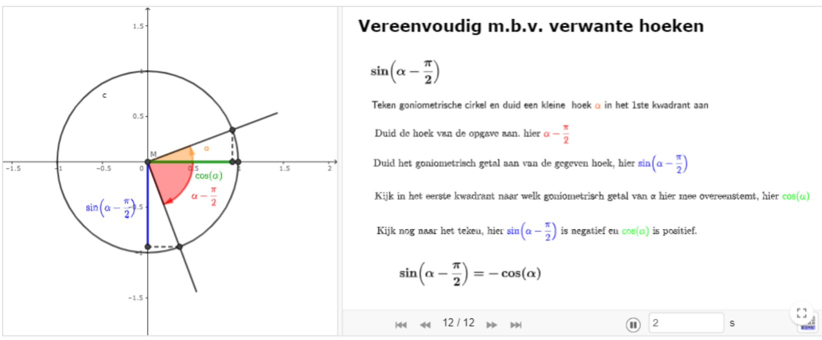


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/q27XXAeF

5 Goniometrische functies

5.1 periodieke functies

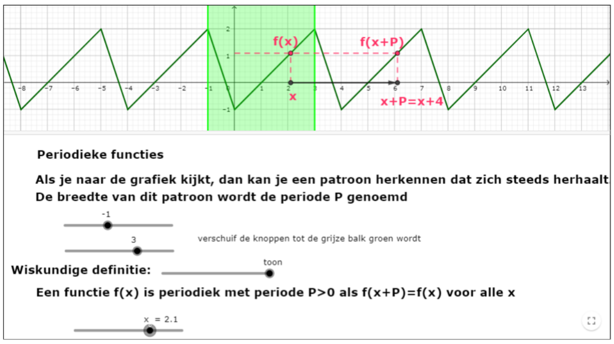


Figure 11: https://www.geogebra.org/m/dqmct5ur

5.2 f(x)=sin(x)

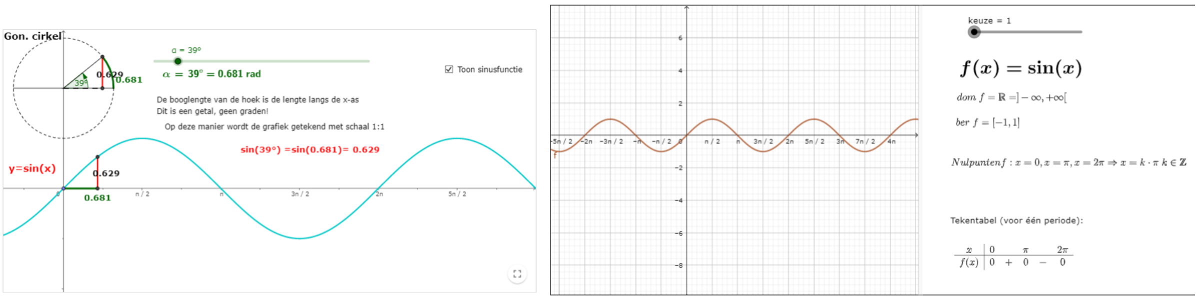


Figure 12: https://www.geogebra.org/m/eeEyfQce]https://www.geogebra.org/m/eeEyfQce

5.3 f(x)=cos(x)

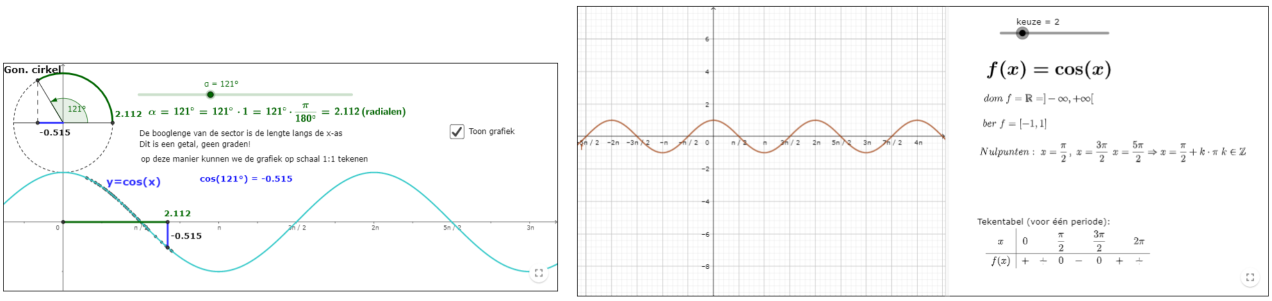


Figure 13: https://www.geogebra.org/m/eeEyfQce]https://www.geogebra.org/m/eeEyfQce

5.4 f(x)=tan(x)

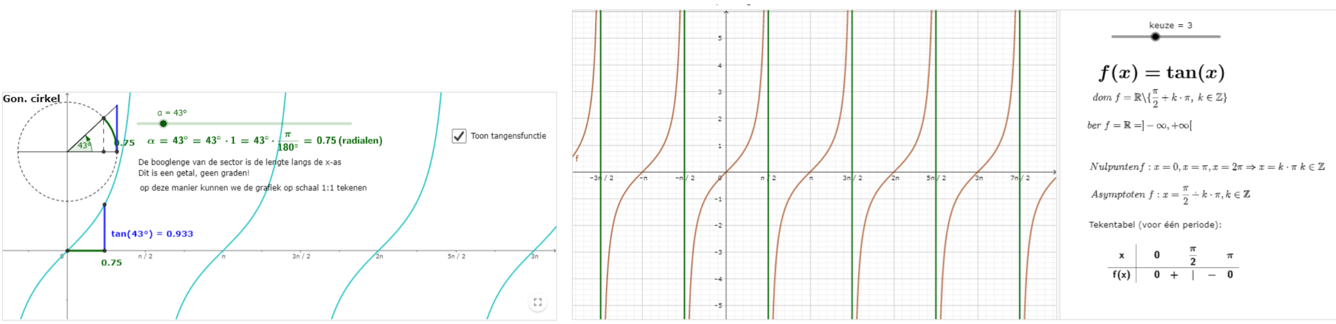


Figure 14: https://www.geogebra.org/m/eeEyfQce]https://www.geogebra.org/m/eeEyfQce

6 algemene sinusfunctie

6.1 functievoorschrift

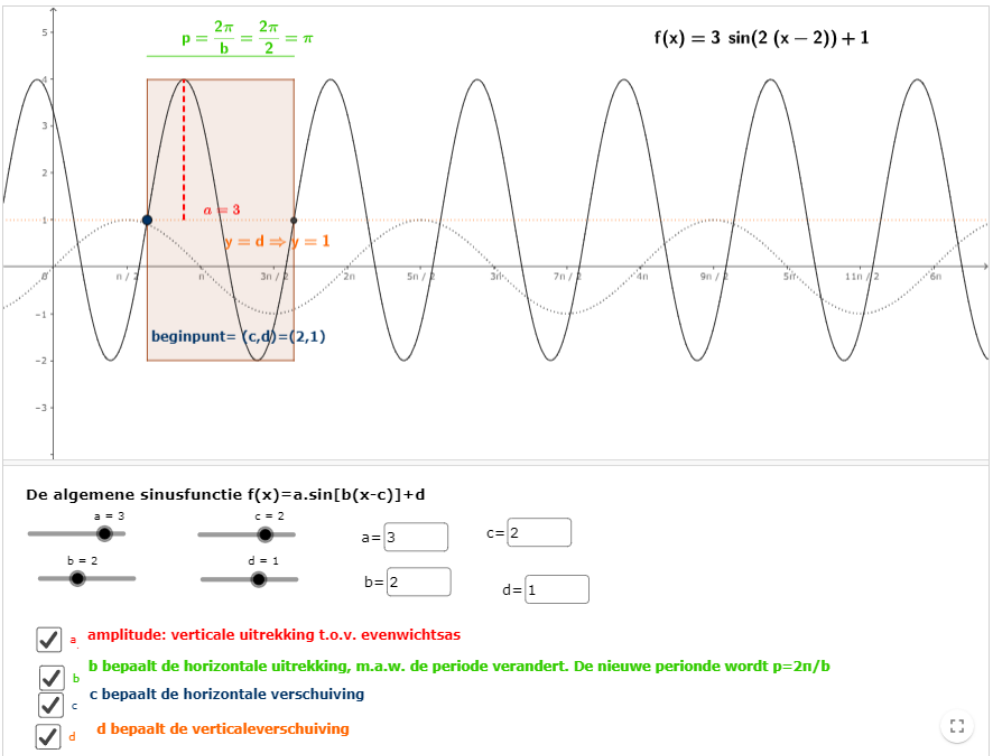


Figure 15: https://www.geogebra.org/m/BFwHmNn4

6.2 functievoorschrift zoeken

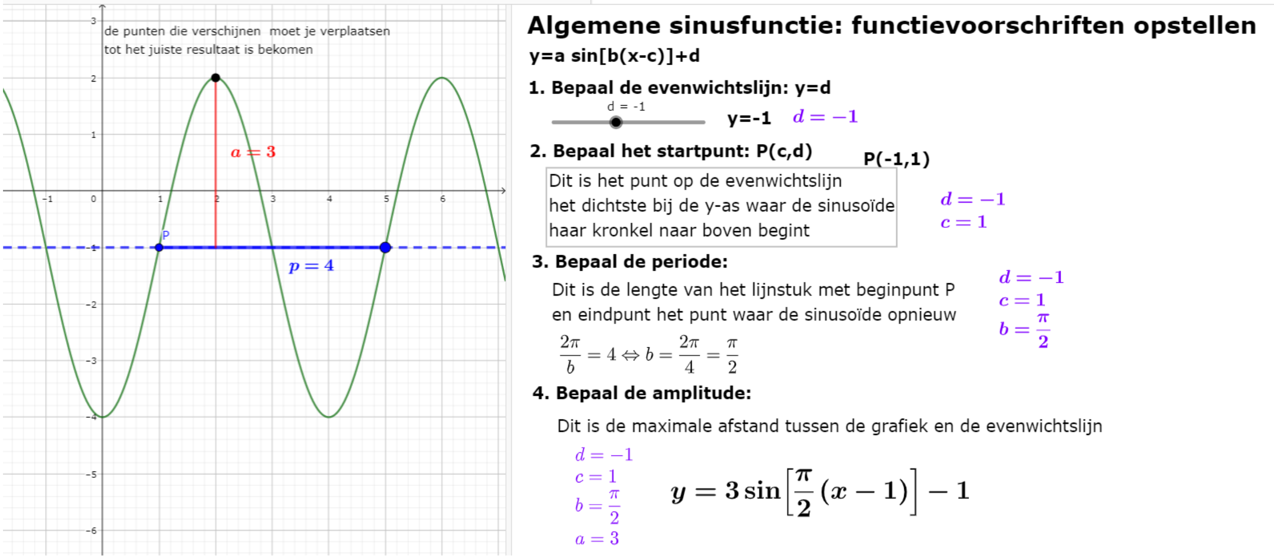


Figure 16: https://www.geogebra.org/m/BFwHmNn4

6.3 grafiek tekenen

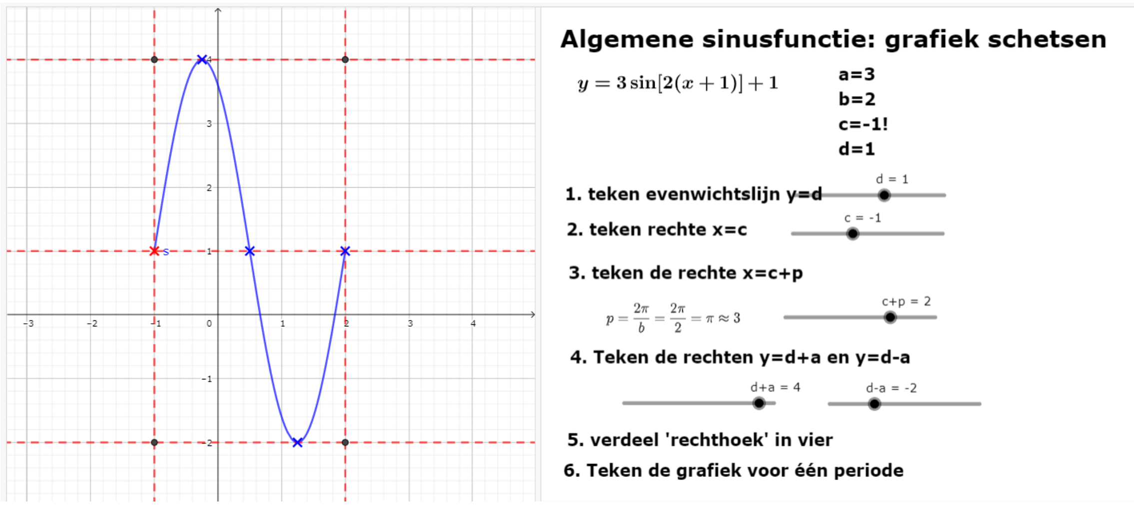


Figure 17: https://www.geogebra.org/m/BFwHmNn4

7 cyclometrische functies

7.1 f(x)=asin(x)

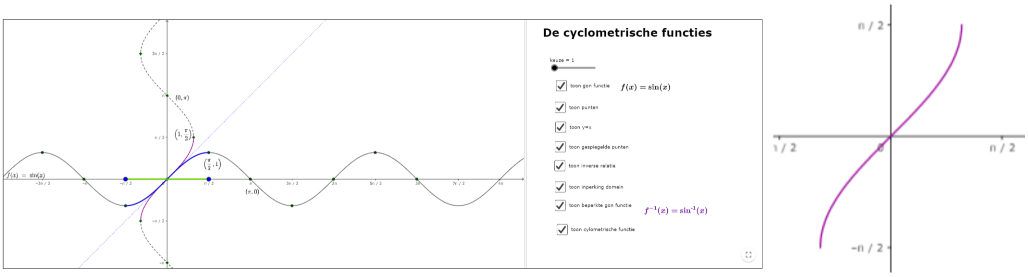


Figure 18: `https://www.geogebra.org/m/Vx7MuEsU`|https://www.geogebra.org/m/Vx7MuEsU

7.2 f(x)=acos(x)

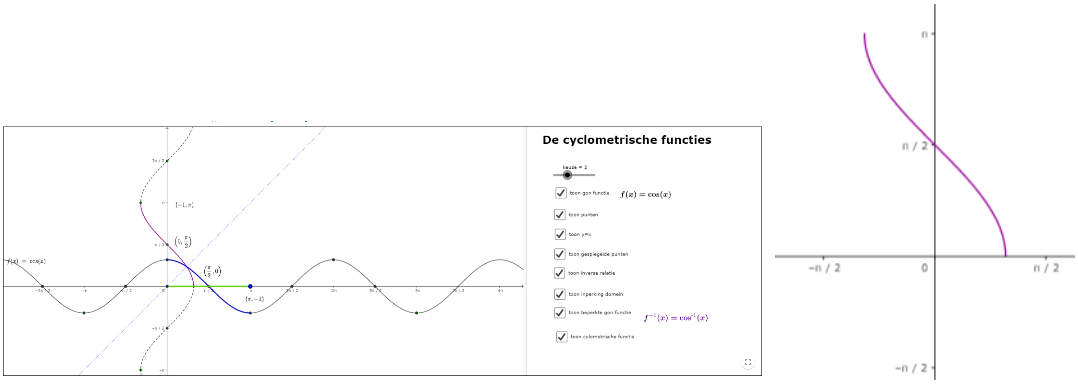


Figure 19: `https://www.geogebra.org/m/Vx7MuEsU`|https://www.geogebra.org/m/Vx7MuEsU

7.3 f(x)=atan(x)

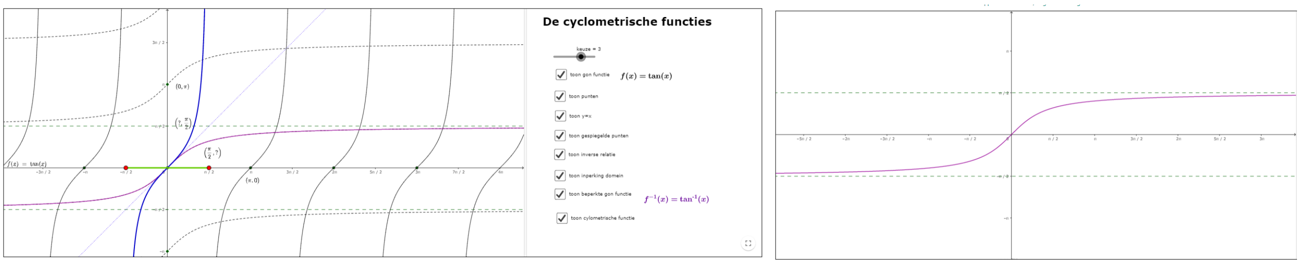


Figure 20: `https://www.geogebra.org/m/Vx7MuEsU`|https://www.geogebra.org/m/Vx7MuEsU

8 goniometrische formules

8.1 hoofdformule

Basisformules

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$vb1\ TB: tan^2x(1 + cot^2x) = \frac{1}{1 - sin^2x}$$

$$LL = \frac{sin^2x}{cos^2x}\left(\frac{1}{sin^2x}\right)$$ oef met sinx/cosx en tanx/cotx → tanx/cotx herschrijven en $1 + cot^2x = \frac{1}{sin^2x}$

$$= \frac{\cancel{sin^2x}}{cos^2x} \cdot \frac{1}{\cancel{sin^2x}} = \frac{1}{cos^2x}$$ algebraïsch vereenvoudigen

$$= \frac{1}{1 - sin^2x} = RL$$ kijken naar RL, basis formules gebruiken

$$vb2: \frac{secx + tanx}{secx - tanx} = \frac{1 + 2sinx + sin^2x}{cos^2x}$$

$$LL = \frac{\frac{1}{cosx} + \frac{sinx}{cosx}}{\frac{1}{cosx} - \frac{sinx}{cosx}}$$ oef met sinx/cosx en tanx/cotx → tanx/cotx herschrijven

$$= \frac{\frac{1+sinx}{cosx}}{\frac{1-sinx}{cosx}}$$ algebraïsch vereenvoudigen: T en N als één breuk schrijven

$$= \frac{1 + sinx}{\cancel{cosx}} \cdot \frac{\cancel{cosx}}{1 - sinx} = \frac{1 + sinx}{1 - sinx}$$ algb vereenvoudigen: rekenen met breuk op breuk

$$RL = \frac{(1 + sinx)^2}{1 - sin^2x}$$ algebraïsch vereenvoudigen: merkwaardig product en voor N gekeken naar LL

$$= \frac{(1 + sinx)\cancel{(1 + sinx)}}{(1 - sinx)\cancel{(1 + sinx)}}$$ merkwaardige producten gebruikt:
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

$$= \frac{1 + sinx}{1 - sinx}$$

LL=RL

Figure 21: https://www.geogebra.org/m/QfWuM7tH|https://www.geogebra.org/m/QfWuM7tH

8.2 somformules

Som- en verschilformules

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

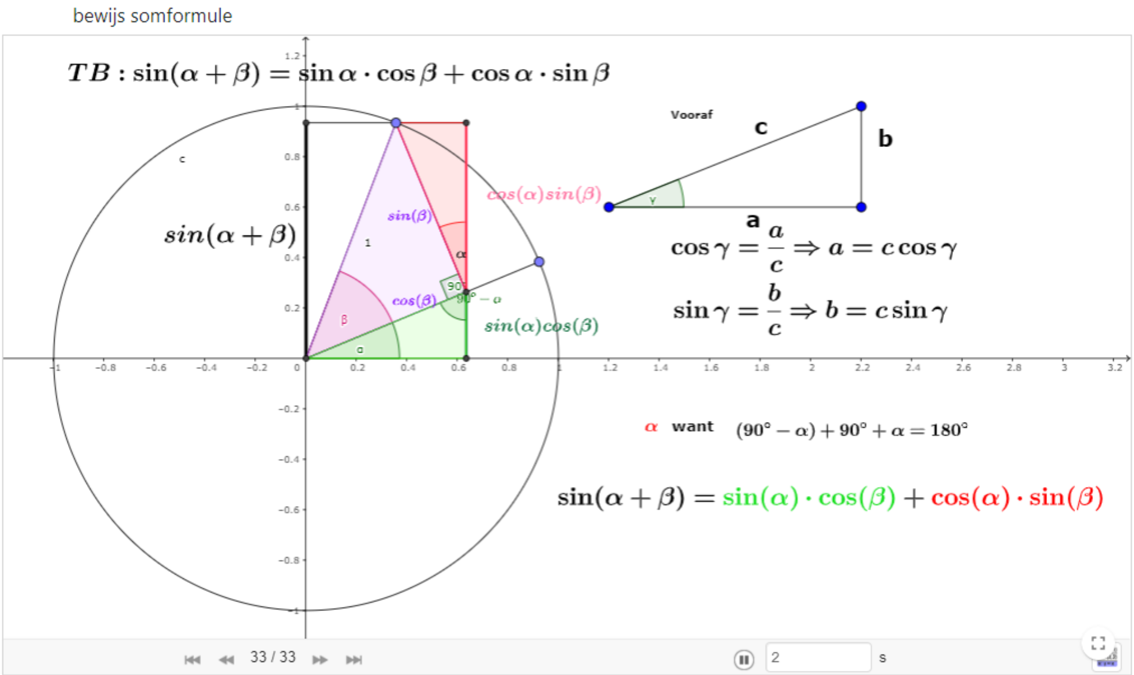


Figure 22: https://www.geogebra.org/m/QfWuM7tH]https://www.geogebra.org/m/QfWuM7tH

8.3 formules dubbele hoek

Verdubbelings- en halveringsformules

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

8.4 Formules van Simpson

Formules van Simpson:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

8.5 overzicht alle formules

Basisformules

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Som- en verschilformules

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - tan\beta}{1 + \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Verdubbelings- en halveringsformules

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Formules van Simpson:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Figure 23: https://www.geogebra.org/m/QfWuM7tH|https://www.geogebra.org/m/QfWuM7tH

9 goniometrische vergelijkingen

9.1 basisvergelijkingen

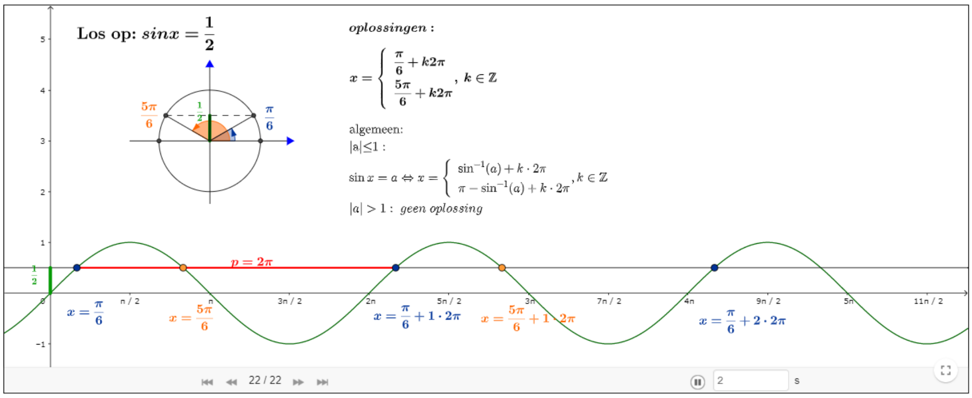


Figure 24: https://www.geogebra.org/m/ej2fhRDY|https://www.geogebra.org/m/ej2fhRDYt

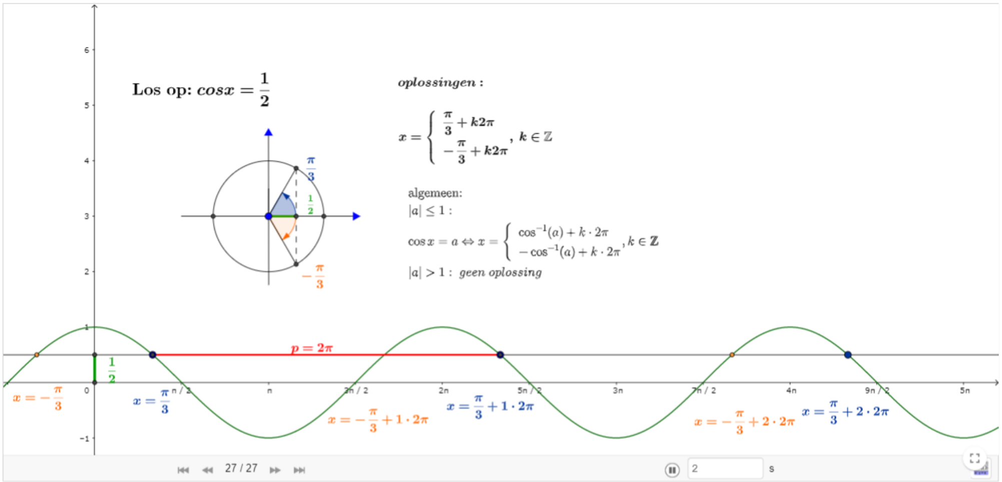


Figure 25: https://www.geogebra.org/m/ej2fhRDYt

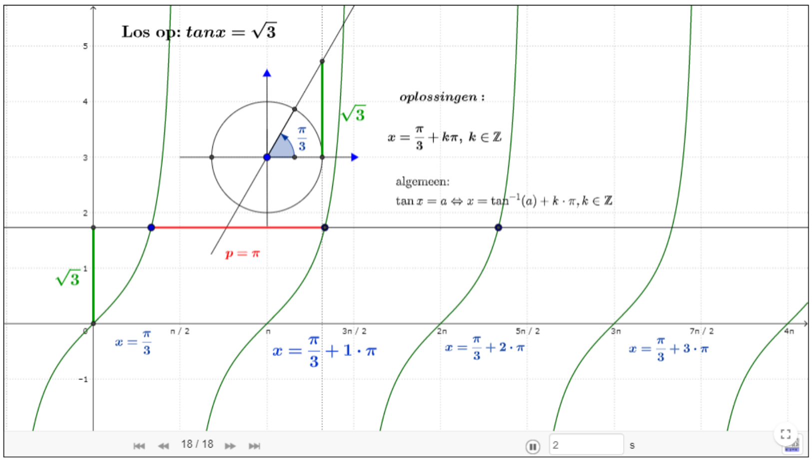


Figure 26: https://www.geogebra.org/m/ej2fhRDYt

9.2 herleidbaar tot basisvergelijking

Los op:

$$4 \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{\cancel{2}1}{\cancel{4}2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = \begin{cases} \cancel{\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}}\ \frac{5\pi}{12} + k\pi \\ \cancel{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3}}\ \frac{9\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

Figure 27: https://www.geogebra.org/m/esxkvnhr

9.3 m.b.v. ontbinding in factoren

Los op:

cos(x)+sin(2x)=0

$$\Leftrightarrow \cos x + 2\sin x \; cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1 + 2\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \;\vee\; 1 + 2\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \;\vee\; \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \end{cases} \vee x = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \;\vee x = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

8 / 8

Figure 28: https://www.geogebra.org/m/esxkvnhr

9.4 herleidbaar tot vierkantsvergelijking

Los op:

$$6\sin^2 x + 5\cos x = 7$$

$$\Leftrightarrow 6(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6\cos^2 x + 5\cos x - 1 = 0$$

$$D = 5^2 - 4(-6)(-1) = 1$$

$$(\cos x)_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{-12} = \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{3} \\ \searrow \frac{1}{2} \end{matrix}$$

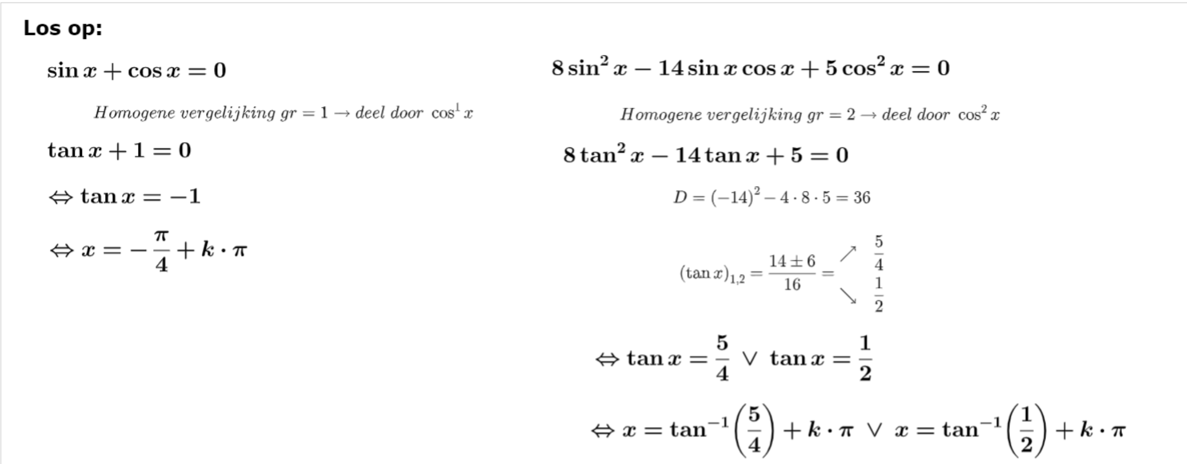
$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{3} \;\vee\; \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + k \cdot 2\pi \\ -\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + k \cdot 2\pi \end{cases} \vee x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

9 / 9

Figure 29: https://www.geogebra.org/m/esxkvnhr

9.5 homogeen



Los op:

$\sin x + \cos x = 0$

Homogene vergelijking $gr = 1 \rightarrow$ *deel door* $\cos^1 x$

$\tan x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = -1$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi$

$8\sin^2 x - 14 \sin x \cos x + 5\cos^2 x = 0$

Homogene vergelijking $gr = 2 \rightarrow$ *deel door* $\cos^2 x$

$8\tan^2 x - 14\tan x + 5 = 0$

$D = (-14)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 5 = 36$

$(\tan x)_{1,2} = \dfrac{14 \pm 6}{16} = \begin{matrix} \nearrow \dfrac{5}{4} \\ \searrow \dfrac{1}{2} \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \tan x = \dfrac{5}{4} \vee \tan x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \tan^{-1}\left(\dfrac{5}{4}\right) + k \cdot \pi \vee x = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) + k \cdot \pi$

Figure 30: https://www.geogebra.org/m/esxkvnhr

9.6 $a\sin(x) + b\cos(x) = c$

10 goniometrische ongelijkheden

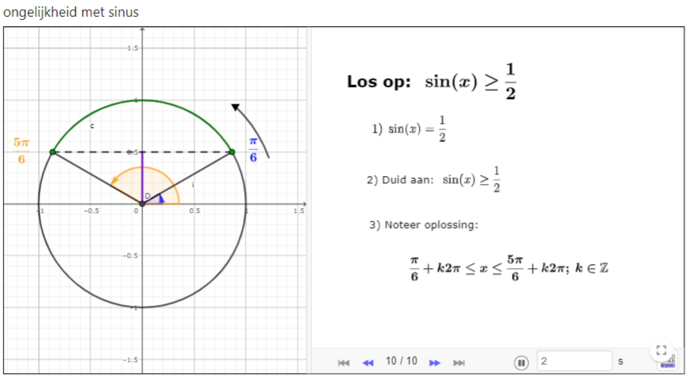


Figure 31: https://www.geogebra.org/m/jr7kkdkt

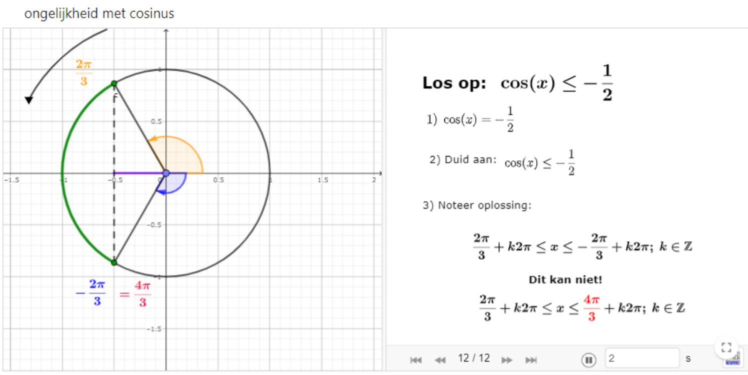


Figure 32: https://www.geogebra.org/m/jr7kkdkt

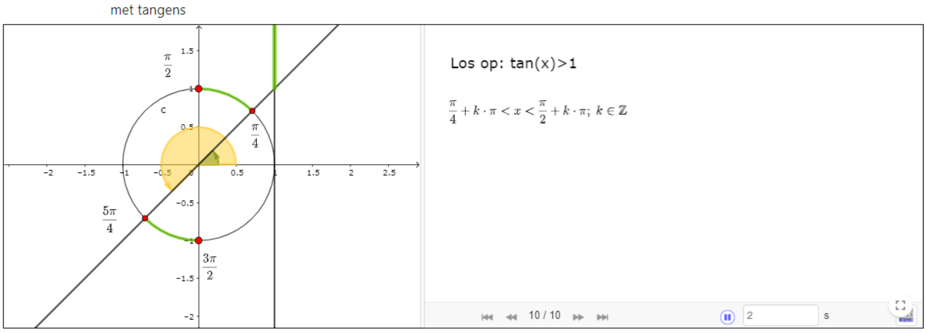


Figure 33: https://www.geogebra.org/m/jr7kkdkt

11 oefeningen

11.1 De goniometrische cirkel

11.2 De goniometrische getallen

1. Los op:

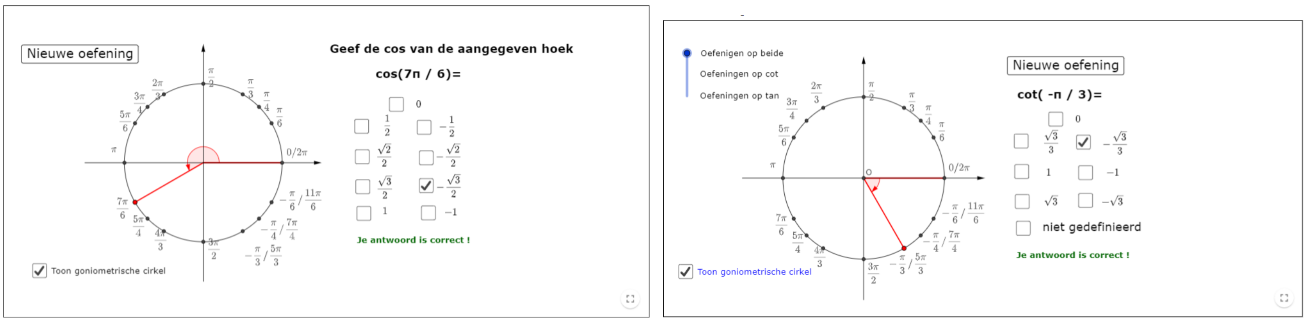
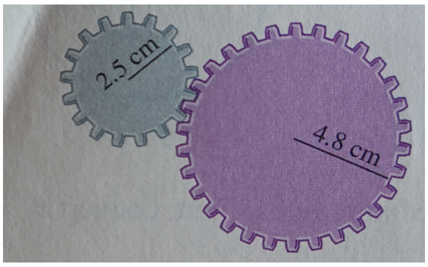


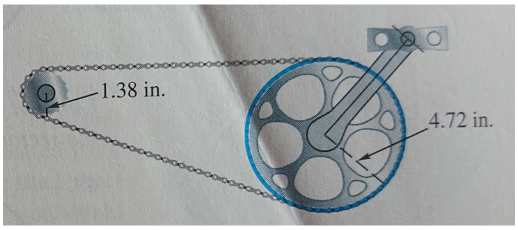
Figure 34: https://www.geogebra.org/m/kqsesuxn]https://www.geogebra.org/m/kqsesuxn

11.3 de radiaal

1. Zet om van graden naar radialen
   (a) 150°
   (b) -900°
   (c) 56°25’
2. zet om van radialen naar graden
   (a) $\frac{11\pi}{6}$
   (b) -5π
   (c) 1.74
3. Over hoeveel radialen draait de minutenwijzer van een klok in 3 uur?
4. Bepaal de afstand tussen de steden Reno en Los Angeles. Deze steden liggen op dezelfde meridiaan. De latitude van Reno is $40N$ en deze van Los Angeles is $34N$. Je mag voor de straal van de aarde 6400 km nemen.
5. Het kleine tandwiel drijft het grote tandwiel aan. Als het kleine tandwiel 225 gedraaid wordt, over hoeveel graden zal dan het grote tandwiel gedraaid zijn? (A.≈ 117)



6. De figuur toont de wielaandrijving van een fiets. Hoever zal de fietser zich verplaatsen als de pedalen over een hoek van 180° gedraaid worden? Neem aan dat de straal van het fietswiel 13.6 inches is.



11.4 Verwante hoeken

1. Gegeven $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ Bepaal van deze georiënteerde hoek de
   (a) de tegengestelde hoek
   (b) de supplementaire hoek
   (c) de complementaire hoek
   (d) de anti-supplementaire hoek

   met aanduiding van al deze hoeken op de goniometrische cirkel

2. Vereenvoudig volgende uitdrukkingen door gebruik te maken van de formules voor verwante hoeken
   (a) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(\pi-\alpha)} + \frac{\sin(9\pi-\alpha)\cdot\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cot(\alpha+5\pi)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$
   (b) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(2\pi+\alpha)\cdot\tan(\pi-\alpha)}{\tan(4\pi-\alpha)\cdot\cot(\alpha+\pi)\cdot\cos(-\alpha)}$

11.5 goniometrische functies

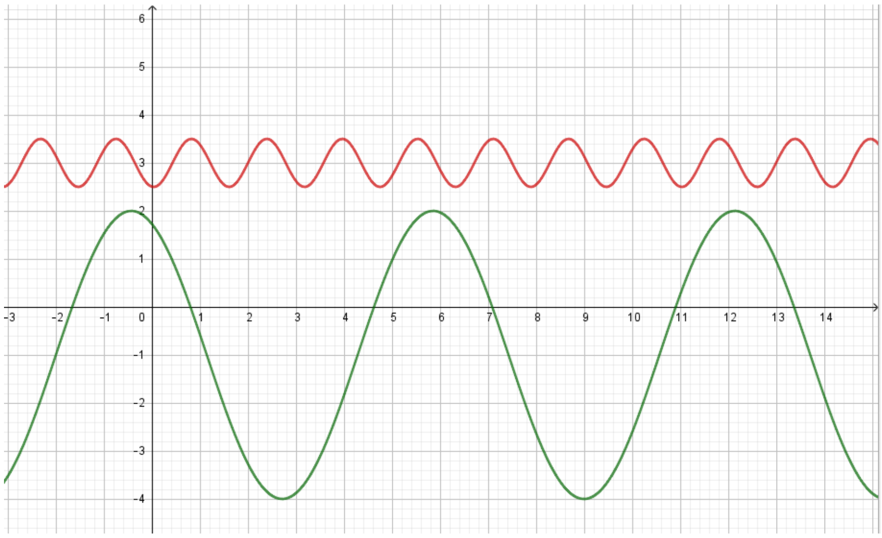
1. Geef de tekentabel van $f(x) = \sin(x)$ in het interval $[5\pi, 8\pi]$

2. Bespreek en teken de grafieken van
   (a) $f(x) = \cot(x)$
   (b) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$
   (c) $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

11.6 algemene sinusfunctie

1. Schets de grafiek van volgende algemene sinusfunctie
   (a) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
   (b) $y = \frac{1}{2} + \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

2. Bepaal het voorschrift van onderstaande grafieken van algemene sinusfuncties



3. Bepaal de transformaties uitgevoerd op de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ om de grafiek van onderstaande functies te bekomen:

   (a) $f(x) = 5\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] - 2$

   (b) $f(x) = 3\cos\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right)$

4. De gemiddelde temperatuur (in °F) op een zekere plaats kan bij benadering gemodelleerd worden door de functie $f(x) = 12\sin\left[\frac{\pi}{6}\left(x - 3.9\right)\right] + 72$ met $x = 1$ ingevuld de gemiddelde temperatuur voor januari geeft enz.

   (a) Wat zal de gemiddelde temperatuur in april zijn?

   (b) Bepaal de periode en verklaar deze lengte

   (c) Wat zijn de grootste en laagste gemiddelde temperatuur?

5. De grafiek van een algemene sinusfunctie bereikt opeenvolgend een minimum en een maximum in de punten met coördinaten (5,-2) en (9,4). Bepaal het voorschrift vna die functie.

6. De grafiek van een algemene sinusfunctie bereikt opeenvolgend een maximum en een minimum in de punten met coördinaten (-2,3) en (4,-7). Bepaal het voorschrift van die functie

7. Een reuzenrad heeft een diameter van 20 meter. Het centrale draaipunt bevindt zich 11 meter boven de grond. Elke 28 seconden draait het rad eenmaal rond. Op het tijdstip t=0 stappen Maarten en Els onderaan in een bakje.

   (a) Bereken de hoogte h (in m) van het bakje waarin Els en Maarten zich bevinden in functie van de tijd t (in s).

   (b) bereken de hoogte van het bakje van Els en Maarten na 10 seconden.

8. Een automobilist ziet de reflecterende pedalen van een fietser voor hem in een rechte lijn op en neer gaan.
   Die op- en neergaande beweging kan voor het rechterpedaal beschreven worden met de formule $r(t) = 28 - 17\sin(2\pi t)$ waarin $r(t)$ de hoogte is in cm ten opzichte van het wegdek en t de tijd in seconden.

   (a) Wat betekenen de getallen 17 en 28 in deze situatie?

   (b) Hoelang duurt 1 omwenteling van het pedaal?

   (c) Met welke formule kan je op ogenblik t de hoogte van het linkerpedaal berekenen?

11.7 cyclometrische functies

1. Bereken
   (a) $Bgsin(0)$
   (b) $Bgsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
   (c) $Bgtan\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
   (d) $Bgcos\left(cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$
2. Voor welke waarden van x geldt
   (a) sin(Bgsin(x))=x
   (b) Bgsin(sin(x))=x
3. Bewijs: $\forall x \in [-1,1] : Bgsin(x) + Bgcos(x) = \frac{\pi}{2}$

11.8 Goniometrische formules

1. Bewijs volgende identiteiten
   (a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$
   (b) $\frac{\tan^2\alpha - 1}{\tan^2\alpha + 1} = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$
   (c) $\frac{1-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha} - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$
   (d) $\cot\alpha \cdot \sec\alpha \cdot cosec\alpha = cosec^2\alpha$
   (e) $(cosec\alpha - \sin\alpha)(\sec\alpha - \cos\alpha) = \frac{1}{\tan\alpha + \cot\alpha}$
2. Gegegen zijn $\sin A = \frac{4}{5}$ en $A \in II$, $\cos B = -\frac{5}{13}$ met $B \in III$. Bepaal:
   (a) $\sin(A+B)$
   (b) $\tan(A+B)$
   (c) het kwadrant waartoe A+B behoort
3. Toon aan: $\cos 15 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
4. Bewijs volgende identiteiten
   (a) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \cos\theta$
   (b) $\sin(x-y)\cos y + \sin y\cos(x-y) = \sin x$
   (c) $1 + \tan x \cdot \tan 2x = \sec 2x$
   (d) $\tan^2 x - \tan^2 y = \frac{\sin(x+y)\sin(x-y)}{\cos^2 x\cos^2 y}$
   (e) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$
   (f) $\frac{\cos(A-B)}{\cos A\sin B} = \tan A + \cot B$
5. Gegeven $\cos\theta = \frac{3}{5}$ en $\sin\theta < 0$. Bepaal $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ en $\tan 2\theta$
6. Bepaal de waarden van de 6 goniometrische functies van θ als $\cos 2\theta = \frac{4}{5}$ en $\theta \in II$
7. Bewijs volgende identiteiten
   (a) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$
   (b) $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$
   (c) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$
   (d) $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \tan^2\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)$
   (e) $\cot x \cdot \sin 2x = 1 + \cos 2x$
   (f) $\sin 4x = 4\sin x \cdot \cos x - 8\sin^3 x \cdot \cos x$

8. Bewijs volgende identiteiten

   (a) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 3\alpha} = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

   (b) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 5\alpha+\cos\alpha} = \tan 2\alpha$

   (c) $\tan 2\alpha - \tan\alpha = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}$

9. Als we weten dat α, β en γ de hoeken van een driehoek zijn, bewijs dan:

   (a) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

   (b) $\cos\alpha - \cos\beta + \cos\gamma + 1 = 4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

   (c) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$

   (d) $\sin 2\alpha - \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$

10. Bewijs de volgende bewering: als α, β en γ de hoeken van een driehoek ABC zijn, dan geldt

$$\alpha = 90 \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\cos\beta + \cos\gamma}$$

11.9 Goniometrische vergelijkingen

1. Los de volgende vergelijkingen op:

   (a) $\tan x = \tan\frac{\pi}{6}$

   (b) $2\cos x = 1$

   (c) $\cos x = 0,1$

   (d) $\cos x - \sin x = 0$

   (e) $2\sin\left[3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = 1$

   (f) $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

   (g) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

   (h) $3\tan x + 5 = 2$

   (i) $\tan^2 x + \tan x - 2 = 0$

   (j) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$

   (k) $4\sin\theta\cos\theta = \sqrt{3}$

   (l) $\cos x = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

   (m) $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$

   (n) $\sin x = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

   (o) $\tan^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 11 - \sec\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

2. Los de volgende vergelijkingen op. Geef alle oplossingen in het gegeven interval

   (a) $2\cos^2(x) + \sin(x) = 1, \quad [0, 4\pi]$

3. Los de volgende vergelijkingen op. Zijn er geen oplossingen verdwenen?

   (a) $\tan(x + 45) = 2\cot(x) - 1$

   (b) $\cos^2 x - \sin 2x = 0$

4. Toon aan: Als $5\cos^2\theta - \cos\theta = \sin^2\theta$ dan is $\tan\theta = 2\sqrt{2}$

5. De gemiddelde maandelijkse temperatuur in Vancouver kan gemodelleerd worden door $f(x) = 14\sin\left[\frac{\pi}{4}(x - 4)\right] + 50$ met $x = 1$ overeenkomt met januari enz. Wanneer is de temperatuur

   (a) 64° F

   (b) 39° F

11.10 Goniometrische ongelijkheden

Los volgende ongelijkheden op:

1. $4\sin[2(x+1)] - 3 < -1$
2. $|\sin 2x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos\left(\frac{x}{3}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $-3 < 3\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \sqrt{3}$
5. $\tan(4x) \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$
6. $2\cos^2 x - 5\sin x + 1 > 0$

12 taken

1. Verwante hoeken
2. Goniometrische formules I
3. Goniometrische formules II
4. Goniometrische vergelijkingen
5. Goniometrische ongelijkheden