Problemas – Tema 3

Problemas resueltos - 11 - unicidad de solución con Bolzano y Rolle

1. Demuestra que la ecuación $x^2 = x \cdot sen(x) + \cos(x)$ tiene solo dos raíces reales.

Sea la función $f(x) = x^2 - x \cdot sen(x) - \cos(x)$. Es continua y derivable en toda la recta real por ser polinómica y producto con funciones senos y coseno.

Si la función tuviera tres raíces reales, que llamaremos c_1, c_2, c_3 se cumplirá que $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$, y podremos aplicar el Teorema de Rolle. En consecuencia, existirán dos valores que anulen la primera derivada.

$$f'(x) = 2x - (sen(x) + x\cos(x)) + sen(x) = 2x - x\cos(x) = x(2 - \cos(x))$$
$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x(2 - \cos(x)) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;,\; \cos(x) = 2$$

La segunda igualdad $\cos(x) = 2$ no tiene solución, ya que la función coseno está acotada en el intervalo $[-1, 1]$. Por lo tanto, la derivada solo se anula en un único punto $x = 0$.

Y llegamos a un absurdo, ya que deberían existir dos soluciones. Por lo tanto, no existen tres raíces reales. Ahora vamos a demostrar que solo hay dos raíces.

El punto crítico $x = 0$ es un mínimo relativo, ya que la segunda derivada evaluada en $x = 0$ es positiva.

$$f''(x) = 2 - (\cos(x) - x\,sen(x)) \;\rightarrow\; f''(0) = 1 > 0 \;\rightarrow\; x = 0 \text{ es mínimo}$$

Si evaluamos el mínimo en la función → $f(0) = -1$ → mínimo en $(0, -1)$

Si evaluamos en $x = -10$ → $f(-10) > 0$ → $f(-10) \cdot f(0) < 0$ → Por Bolzano existe una solución en el intervalo $(-10, 0)$.

Si evaluamos en $x = 10$ → $f(10) > 0$ → $f(0) \cdot f(10) < 0$ → Por Bolzano existe una solución en el intervalo $(0, 10)$.

Conclusión: existen dos soluciones y son las únicas soluciones de la ecuación.

2. Demuestra que la ecuación $e^x=2+x$ tiene solamente una solución positiva.

Debemos demostrar que $e^x=2+x$ tiene una única solución positiva.

En primer lugar demostramos que posee, al menos, una solución positiva.

Si nombramos $f(x)=e^x-2-x$, esta función es continua en toda la recta real por ser suma de exponencial y polinomio.

$$f(0)<0$$
$$f(10)>0$$

Por lo tanto, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Bolzano, que nos garantiza que $\exists c \in (0,10) / f(c)=0$ → Al menos, existe una solución positiva, ya que $c>0$ por pertenecer al intervalo $(0,10)$.

La segunda parte de la demostración consiste en demostrar que la solución positiva es única. Para ello suponemos que existen dos soluciones positivas $c_1, c_2 / f(c_1)=f(c_2)=0$.

Nuestra función es continua en $[c_1, c_2]$ y derivable en (c_1, c_2) por ser suma de exponencial y polinomio.

Con esto, podemos aplicar el Teorema de Rolle, que afirma $\exists \phi \in (c_1, c_2) / f'(\phi)=0$. Derivamos e igualamos a cero.

$$f(x)=e^x-2-x \rightarrow f'(x)=e^x-1 \quad , \quad f'(\phi)=0 \rightarrow e^{\phi}-1=0 \rightarrow e^{\phi}=1 \rightarrow \phi=0$$

Este resultado es un absurdo, porque si $c_1>0$, $c_2>0$ y $\phi \in (c_1, c_2)$, el valor de ϕ tiene que ser positivo → Estamos ante un absurdo matemático que contradice a la hipótesis de partida → Por lo que no existen dos soluciones positivas → Nuestra solución positiva es única.

3. Demuestra que la ecuación $x^3-27x+m=0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $(-1,1)$, cualquiera que sea el valor de m .

Hipótesis de partida: $f(x)=x^3-27x+m$ posee dos soluciones en el intervalo $(-1,1)$.

Si llamamos a estas soluciones $c_1, c_2 \in (-1,1)$, se cumple:

$$f(c_1)=0 \quad , \quad f(c_2)=0 \quad \rightarrow \quad f(c_1)=f(c_2)$$

La función es continua y derivable en toda la recta real por ser polinómica. Por lo que podemos aplicar el Teorema de Rolle en el intervalo (c_1, c_2) . Recuerda que $c_1, c_2 \in (-1,1)$. Por lo tanto:

$$\exists \phi \in (c_{1,} c_2) / f'(\phi)=0 \quad \rightarrow \quad f'(x)=3x^2-27 \quad , \quad f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad 3x^2-27=0 \quad \rightarrow \quad \phi=\pm 3$$

Y llegamos a un absurdo, ya que si $\phi=\pm 3$ no se cumple $\phi \in (c_{1,} c_2)$ porque a su vez debe cumplirse que $c_1, c_2 \in (-1,1)$. Y los valores $\phi=\pm 3$ están fuera del intervalo $(-1,1)$.

En consecuencia la hipótesis es falsa. No puede haber más de una raíz en el intervalo.

4. Utiliza el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle para probar que $x^4-2x^3-1=0$ solo tiene una solución negativa.

Demostremos, en primer lugar, la existencia de al menos una solución negativa de la ecuación. Esta solución será un punto de corte de la función $f(x)=x^4-2x^3-1$ con el eje horizontal.

La función $f(x)=x^4-2x^3-1$ es continua es toda la recta real por ser polinómica. Si tomamos, por ejemplo, el intervalo $[-100,0]$ se cumple:

$$f(-100)>0 \quad , \quad f(0)<0 \quad \rightarrow \quad f(-100)\cdot f(0)<0$$

Cumpliéndose así las condiciones del teorema de Bolzano, por lo que podemos afirmar que:

$$\exists c\in(-100,0)/f(c)=0$$

Queda así demostrada la existencia, al menos, de una solución negativa de la ecuación.

Supongamos que existen dos soluciones negativas. Es decir:

Hipótesis → $\exists c_1, c_2<0/f(c_1)=f(c_2)=0$

Al ser la función $f(x)=x^4-2x^3-1$ continua y derivable en toda la recta real por ser polinómica, y cumplirse por hipótesis la igualdad de imágenes $f(c_1)=f(c_2)=0$, podemos concluir por el teorema de Rolle:

$$\exists \phi\in(c_1, c_2)/f'(\phi)=0$$

Derivamos e igualamos a cero, para obtener el valor que predice el teorema de Rolle.

$$f'(x)=4x^3-6x^2 \quad , \quad f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad 4x^3-6x^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2(4x-6)=0 \quad \rightarrow \quad x=0,\frac{3}{2}$$

Amas soluciones no son negativas, por lo que estamos ante un absurdo, ya que el teorema de Rolle predice un valor $\phi\in(c_1, c_2)$ negativo, ya que los extremos del intervalo son negativos: $c_1, c_2<0$.

Si hay un absurdo, significa que la hipótesis de partida es falsa y no hay dos soluciones negativas. Por lo tanto, la solución demostrada por el teorema de Bolzano es única.

5. Encuentra una solución de $f(x)=\ln(x)+x$ con una precisión de dos cifras decimales. Demuestra que esa solución es la única solución de $f(x)$.

Por el Teorema de Bolzano podemos aproximar el valor de una solución de la función si encontramos un intervalo cerrado donde la función cambie de signo al ser evaluada en sus extremos, siempre que la función sea continua en ese intervalo.

Si tomamos el intervalo $[\frac{1}{2},1]$ se cumple:

$$f(\frac{1}{2})=\ln(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=-0{,}19<0 \quad , \quad f(1)=\ln(1)+1=1>0$$

Y la función $f(x)=\ln(x)+x$ es continua en el intervalo $[\frac{1}{2},1]$ por ser composición de funciones continuas en ese intervalo. Estamos, pues, en condiciones de aplicar el Teorema de Bolzano, que afirma $\exists c\in(\frac{1}{2},1)/f(c)=0$.

Acotamos nuestro estudio al intervalo $[\frac{1}{2},\frac{7}{10}]$:

$$f(\frac{1}{2})=\ln(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=-0{,}19<0 \quad , \quad f(\frac{7}{10})=\ln(\frac{7}{10})+\frac{7}{10}=0{,}34>0$$

Viendo el signo que toma la función en los extremos anteriores, acotamos el estudio a $[\frac{1}{2},\frac{6}{10}]$:

$$f(\frac{1}{2})=\ln(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=-0{,}19<0 \quad , \quad f(\frac{6}{10})=\ln(\frac{6}{10})+\frac{6}{10}=0{,}089>0$$

Estudiamos en $[\frac{1}{2},\ 0{,}55]$:

$$f(\frac{1}{2})=\ln(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=-0{,}19<0 \quad , \quad f(0{,}55)=\ln(0{,}55)+0{,}55=-0{,}048<0$$

Estudiamos en $[0{,}55,\ 0{,}57]$:

$$f(0{,}55)=\ln(0{,}55)+0{,}55=-0{,}048<0 \quad , \quad f(0{,}57)=\ln(0{,}57)+0{,}57=0{,}0079>0$$

Estudiamos en $[0{,}56,\ 0{,}57]$:

$$f(0{,}56)=\ln(0{,}56)+0{,}56=-0{,}020<0 \quad , \quad f(0{,}57)=\ln(0{,}57)+0{,}57=0{,}0079>0$$

Por lo tanto ya podemos afirmar que existe una solución con precisión de dos cifras decimales:

$$x\simeq 0{,}56...$$

Para demostrar que la solución del apartado anterior es única, aplicamos el Teorema de Rolle.

Suponemos que existen dos soluciones distintas, para los valores $x=a \rightarrow f(a)=0$ y $x=b \rightarrow f(b)=0$, donde la función es continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b) . Por el Teorema de Rolle podríamos afirmar que $\exists c\in(a,b)/f'(c)=0$, ya que las imágenes coinciden en los puntos $x=a$ y $x=b$.

Derivemos nuestra función:

$$f(x)=\ln(x)+x \rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}+1=\frac{1+x}{x}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow \frac{1+x}{x}=0 \rightarrow x=-1$$

Y llegamos a un absurdo matemático, ya que nuestra función no está definida para valores negativos de la variable x por no estar permitidos argumentos negativos en el logaritmo → Nuestra hipótesis de partida es falsa → No existen dos soluciones de la función → La solución obtenida en el apartado anterior es única (*c.q.d.*).

6. Demuestra que la función $f(x)=x-\sqrt{x}$ **tiene una única solución para** $x>\frac{1}{4}$ **.**

En primer lugar demostremos, por el Teorema de Bolzano, que la función $f(x)=x-\sqrt{x}$ tiene al menos una solución real para $x>\frac{1}{4}$. Para ello buscamos un intervalo cerrado donde la función sea continua y cambie de signo al ser evaluada en los extremos del intervalo.

$$Si \quad f(x) \quad continua \quad en \quad [a,b] \quad y \quad f(a)\cdot f(b)<0 \quad \rightarrow \quad \exists c\in(a,b)/ f(c)=0$$

El dominio de la función son todos los números reales positivos más el 0 , por lo que podemos considerar el intervalo:

$$[\frac{1}{4},10] \quad \rightarrow \quad f(\frac{1}{4})<0 \quad , \quad f(10)>0 \quad \rightarrow \quad \exists c\in(\frac{1}{4},10)/ f(c)=0$$

Una vez demostrada la existencia de al menos una solución real para $x>\frac{1}{4}$, demostremos que es única por reducción al absurdo y aplicando el Teorema de Rolle.

Nuestra hipótesis de partida es que existen dos soluciones $x=c_1>\frac{1}{4}$, $x=c_2>\frac{1}{4}$ $\rightarrow$ $f(c_1)=f(c_2)=0$. Como la función es continua en $(0,+\infty)$, será continua en $[c_1,c_2]$ por ser positivos los extremos del intervalo. Además la función es derivable en el intervalo $(0,+\infty)$, ya que la derivada $f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ es continua en ese intervalo. Por lo tanto, la función original es derivable en (c_1,c_2) .

Así estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Rolle.

$$Si \quad f(x) \quad continua \quad en \quad [c_1,c_2] \quad , derivable \quad en \quad (c_1,c_2) \quad y \quad f(c_1)=f(c_2) \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \exists \phi\in(c_1,c_2)/ f'(\phi)=0$$

Derivamos la función e igualamos a cero.

$$f(x)=x-\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad f'(\phi)=0 \quad \rightarrow \quad \phi=\frac{1}{4}$$

Y llegamos a un absurdo, ya que hemos supuesto que c_1 y c_2 son estrictamente mayores que $\frac{1}{4}$, por lo que nuestra hipótesis de partida es falsa. Solo existe una única solución para $x>\frac{1}{4}$.