Kalkulus dengan EMT

Nama = Fifi Alfianita
NIM = 23030130006
Kelas = Pendidikan Matematika A 2023

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:

- Menggunakan format nama_fungsi := rumus fungsi (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &&= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah function (bukan sebagai ekspresi).

Berikut adalah adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi.

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
>f(0), f(1), f(pi)
```

```
  1
  4.31977682472
  20.7392088022
```

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
>g(3)
```

```
  0
```

```
>g(0)
```

```
  0
```

```
>g(10)
```

```
  0.760600024122
```

```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

```
  2.20920171961
```

```
>g(f(5))
```

```
  0.950898070639
```

```
>f(0:10) // nilai-nilai f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
  [1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
  99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
  [1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
  99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara "inline" menggunakan format :=, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata "map" digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata "map" fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
```

```
    if x>0 then return x^3
    else return x^2
    endif;
  endfunction
```

```
>f(1)
```

```
  1
```

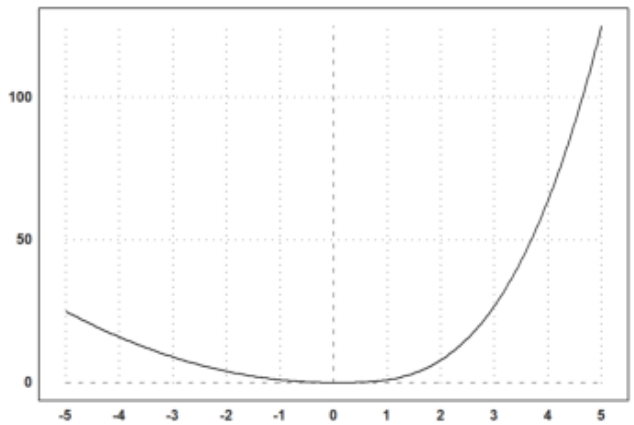
```
>f(-2)
```

```
  4
```

```
>f(-5:5)
```

```
  [25,  16,  9,  4,  1,  0,  1,  8,  27,  64,  125]
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):
```




```
>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik
```

$$2\ E^{x}$$

```
>function g(x) &= 3*x+1
```

$$3\ x + 1$$

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

$$2\ E^{3\ x + 1}$$

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik tersebut.

Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.

Menghitung Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit". Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und' (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga).

Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

```
>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2\,x-1} = -1$$

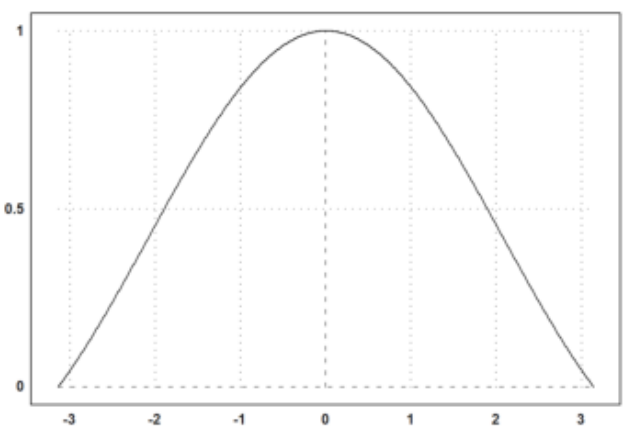
```
>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))
```

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-3\,x-10}{x-5} = 7$$

```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi):
```




```
>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x} = 0$$

```
>$showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x \to -\infty} \log x = infinity$$

```
>$showev('limit((-2)^x,x, inf))
```

$$\lim_{x \to \infty} (-2)^x = infinity$$

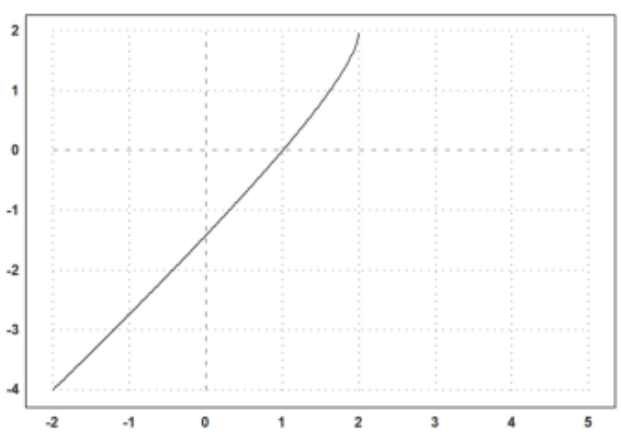
```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus))
```

$$\lim_{t \uparrow 2} t - \sqrt{2-t} = 2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t \downarrow 5} t - \sqrt{2-t} = 5 - \sqrt{3}\, i$$

```
>plot2d("x-sqrt(2-x)",-2,5):
```




```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3))
```

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{2\,x^2 - 5\,x - 3} = \frac{6}{7}$$

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|+x^2}{x^2-|x|} = -1$$

```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1}{x}+1\right)^{x} = e$$

```
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{k}{x}+1\right)^{x} = e^{k}$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} (x+1)^{\frac{1}{x}} = e$$

```
>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x}{x+k}\right)^{x} = e^{-k}$$

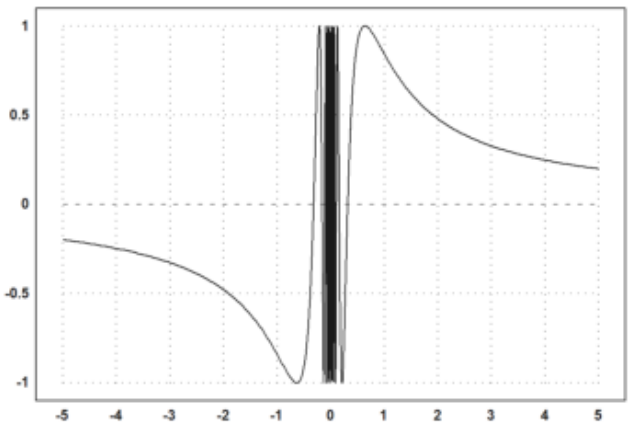
```
>$showev('limit(sin(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ind$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

```
>plot2d("sin(1/x)",-5,5):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.

Turunan Fungsi

Definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n
```

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n\, x^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan (x+h)^n dengan menggunakan teorema binomial.

```
>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)
```

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.
Sebagai petunjuk, ekspansikan sin(x+h) dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut.

```
>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log\left(x+h\right)-\log x}{h}=\frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.
Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.

```
>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=-\frac{1}{x^2}$$

```
>$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Maxima is asking
Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
Is x an integer?

Use assume!
Error in:
$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...
                                     ^
```

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```
>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

```
>$factor(E^(x+h)-E^x)
```

$$\left(e^{h}-1\right)\,e^{x}$$

```
>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\left(\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}\right)\,e^{x}=e^{x}$$

```
>function f(x) &= x^x
```

$$\begin{matrix}x\\x\end{matrix}$$

```
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^{x}}{h}=infinity$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^{x}}{h}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^{x}}{h}=x^{x}\,\left(\log x+1\right)$$

```
>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula
```

```
[x > 0]
```

```
>&forget(x<0)
```

```
[x < 0]
```

```
>&facts()
```

```
[]
```

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\arcsin(x+h)-\arcsin x}{h}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

```
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

```
>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

```
sinh(x)
```

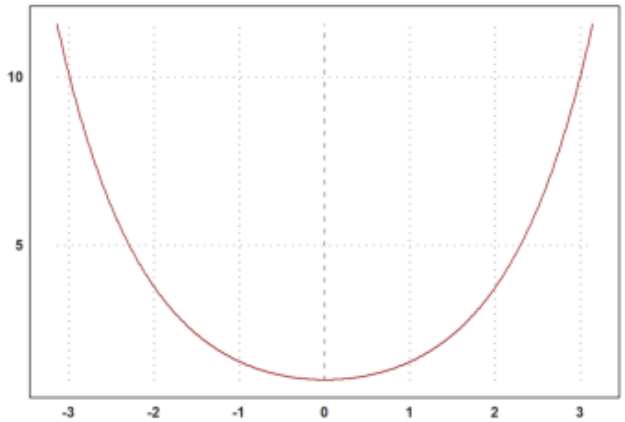
```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)}{2}$$

Hasilnya adalah cosh(x), karena

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh(x).$$

```
>plot2d(["df(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), seperti contoh-contoh tersebut. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama. * Integral

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi integrate menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```

```
  Answering "Is n equal to -1?" with "no"
```

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x),x))
```

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \log(x+1)$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$$

```
>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))
```

$$\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b$$

```
>$showev('integrate(x^n,x,a,b))
```

```
  Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"
```

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x))
```

$$\int x^2\sqrt{2\,x+1}\,dx = \frac{(2\,x+1)^{\frac{7}{2}}}{28} - \frac{(2\,x+1)^{\frac{5}{2}}}{10} + \frac{(2\,x+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))
```

$$\int_0^2 x^2\sqrt{2\,x+1}\,dx = \frac{2\,5^{\frac{5}{2}}}{21} - \frac{2}{105}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\int_0^2 x^2\sqrt{2\,x+1}\,dx = \frac{2\,5^{\frac{7}{2}}-2}{105}$$

```
>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi^2))
```

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\, e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \left(-e^{\pi}-1\right)\, \sin a + \left(e^{\pi}+1\right)\, \cos a$$

```
>$factor(%)
```

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\, e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \left(-e^{\pi}-1\right)\, \left(\sin a - \cos a\right)$$

```
>function map f(x) &= E^(-x^2)
```

$$E^{-x^2}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\, \mathrm{erf}\left(x\right)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

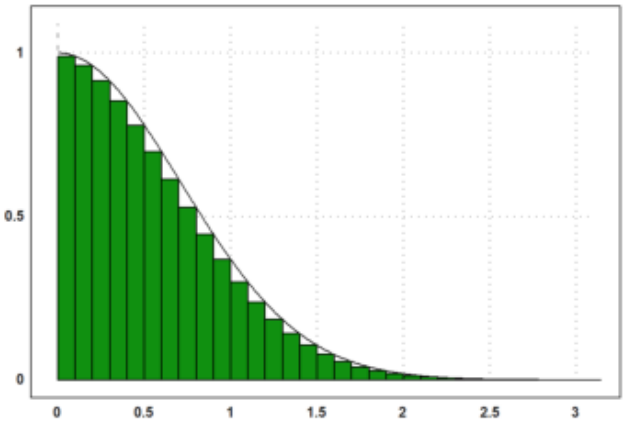
$$erf(x) = \int \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\, dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).

Misalkan kita akan menghitung:

maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi)

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Integral tentu

maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi)

dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva y=f(x) tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)
>// jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:

maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi) = 0.1*sum(fx[i],i,1,length(fx))

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai f(x) untuk x = 0.1, 0.2, 0.3, ..., 3.2.

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

```
  0.836219610253
```

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)

Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

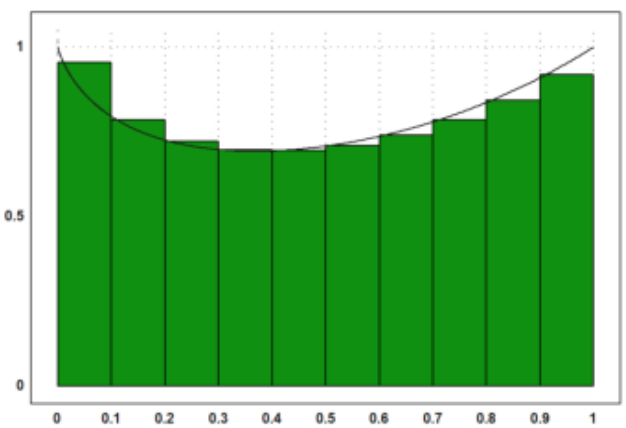
```
>function f(x) &= x^x
```

$$x$$
$$x$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_0^1 x^x \, dx = \int_0^1 x^x \, dx$$

```
>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

maxima: 'integrate(f(x),x,0,1) = 0.01*sum(fx[i],i,1,length(fx))

Apakah hasil tersebut cukup baik? perhatikan gambarnya.

Latihan

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegralkan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang dibatasi oleh keduanya.)

- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva y= f(x) yang diputar mengelilingi sumbu x dari x=a sampai x=b, yakni

$$V = \int_a^b \pi(f(x)^2\, dx.$$

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva y=f(x) dari x=a sampai x=b dengan menggunakan rumus:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)

Barisan dan Deret

(Catatan: bagian ini belum lengkap. Anda dapat membaca contoh-contoh pengguanaan EMT dan Maxima untuk menghitung limit barisan, rumus jumlah parsial suatu deret, jumlah tak hingga suatu deret konvergen, dan sebagainya. Anda dapat mengeksplor contoh-contoh di EMT atau perbagai panduan penggunaan Maxima di software Maxima atau dari Internet.)

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua ":");
- menggunakan perintah "sequence" dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah "iterate" atau "niterate";
- menggunakan fungsi Maxima "create_list" atau "makelist" untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) "sum". Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Berikut adalah beberapa contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

```
>1:10 // barisan sederhana
```

```
  [1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

```
>1:2:30
```

```
  [1,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29]
```

```
>sum(1:2:30), sum(1/(1:2:30))
```

```
  225
  2.33587263431
```

```
>$'sum(k, k, 1, n) = factor(ev(sum(k, k, 1, n),simpsum=true)) // simpsum:menghitung deret
```

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

```
>$'sum(1/(3^k+k), k, 0, inf) = factor(ev(sum(1/(3^k+k), k, 0, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k + k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k + k}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum(1/x^2, x, 1, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 1, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai e
```

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

```
>$'sum((-1)^(k-1)/k, k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^(x-1)/x, x, 1, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(-1)^x}{x}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k-1}$$

```
>$ev(sum(1/n!, n, 0, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung, harusnya hasilnya e.

```
>&assume(abs(x)<1); $'sum(a*x^k, k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forge
```

$$a \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{a}{1-x}$$

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar x=a adalah:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

```
>$'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x=0, sampai suku ke-11
```

$$e^x = \frac{x^{10}}{3628800} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

```
>$'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1
```

$$\log x = x - \frac{(x-1)^{10}}{10} + \frac{(x-1)^9}{9} - \frac{(x-1)^8}{8} + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^2}{2} - 1$$

LATIHAN SOAL

SOAL FUNGSI

NO. 1

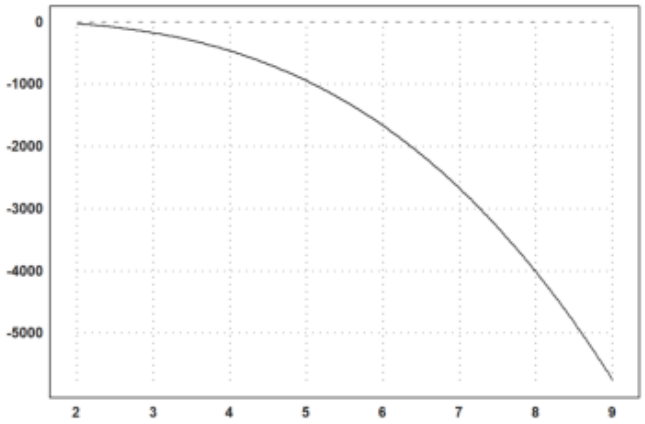
```
> function f (x) := 7*x - 8*x^3 + 20 //fungsi linear
> f(0), f(-2), f(pi)
```

```
  20
  70
  -206.059064867
```

```
>f(2:9)
```

```
  [-30,  -175,  -464,  -945,  -1666,  -2675,  -4020,  -5749]
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",2,9):
```

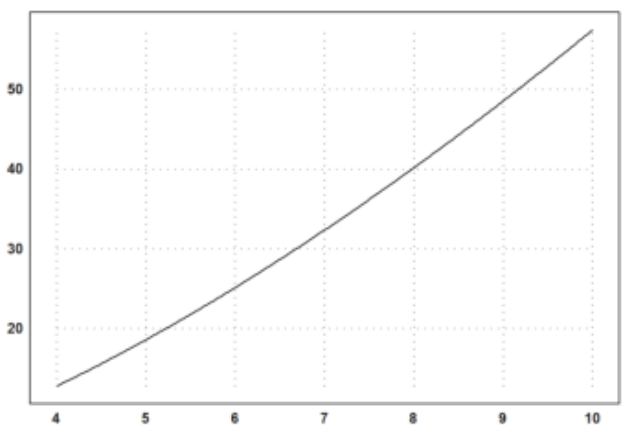


NO.2

```
>function g(x):= sqrt (x*4+4*x^5)/(x+1) //fungsi numerik
>g(0), g(3)
```

```
  0
  7.84219357068
```

```
>aspect(1.5); plot2d("g(x)",4,10):
```



SOAL LIMIT NO.1

```
>$showev('limit(sin(3/x^2),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{3}{x^2}\right) = ind$$

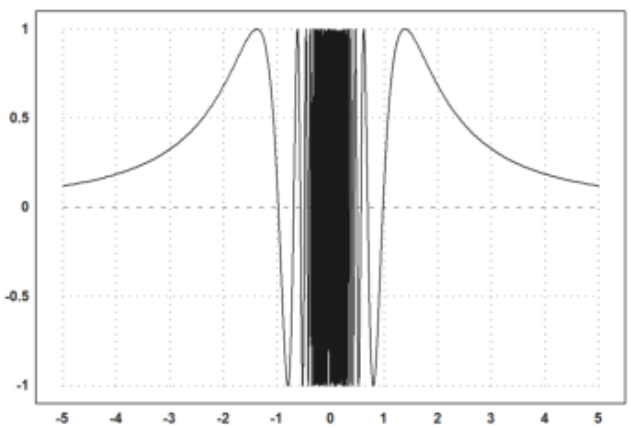
```
>$showev('limit(sin(3/x^2),x,10))
```

$$\lim_{x\to 10} \sin\left(\frac{3}{x^2}\right) = \sin\left(\frac{3}{100}\right)$$

```
>$showev('limit(sin(3/x^2),x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty} \sin\left(\frac{3}{x^2}\right) = 0$$

```
>plot2d("sin(3/x^2)",-5,5):
```



NO. 2

```
>$showev('limit(tan(x^4)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x^4}{x} = 0$$

```
>$showev('limit(tan(x^4)/x,x,8))
```

$$\lim_{x\to 8} \frac{\tan x^4}{x} = \frac{\tan 4096}{8}$$

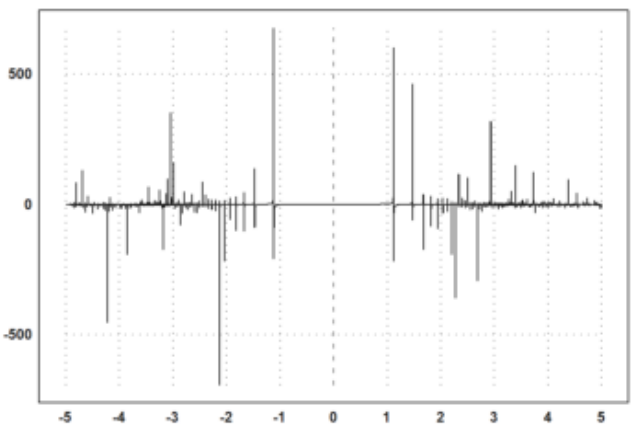
```
>$showev('limit(tan(x^4)/x,x,4))
```

$$\lim_{x\to 4} \frac{\tan x^4}{x} = \frac{\tan 256}{4}$$

```
>$showev('limit(tan(x^4)/x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\tan x^4}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\tan x^4}{x}$$

```
>plot2d("tan(x^4)/x",-5,5):
```



SOAL TURUNAN FUNGSI NO.1

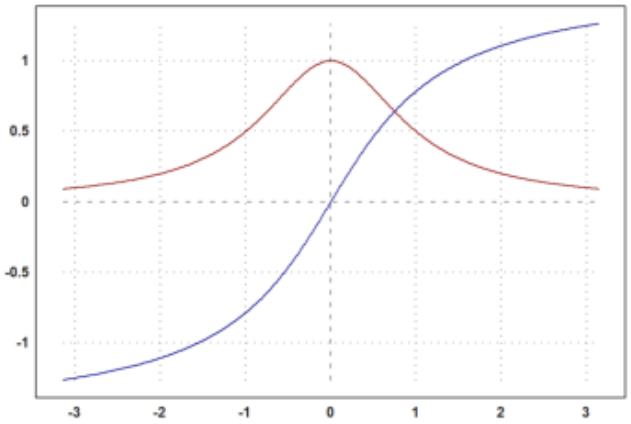
```
>function f(x) &= atan(x) // definisikan f(x)=atan(x)
```

atan(x)

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{1}{x^2+1}$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]):
```



NO.2

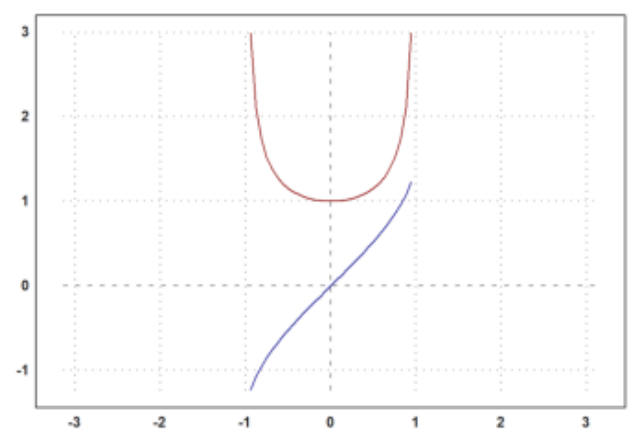
```
>function f(x) &= asin(x) // definisikan f(x)=asin(x)
```

$$\text{asin}(x)$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]):
```



SOAL INTEGRAL NO.1

```
>function f(x) &= x/(x-4); $f(x)
```

$$\frac{x}{x-4}$$

```
>$showev('integrate(x/(x-4),x))
```

$$\int \frac{x}{x-4}\,dx = 4\,\log\left(x-4\right)+x$$

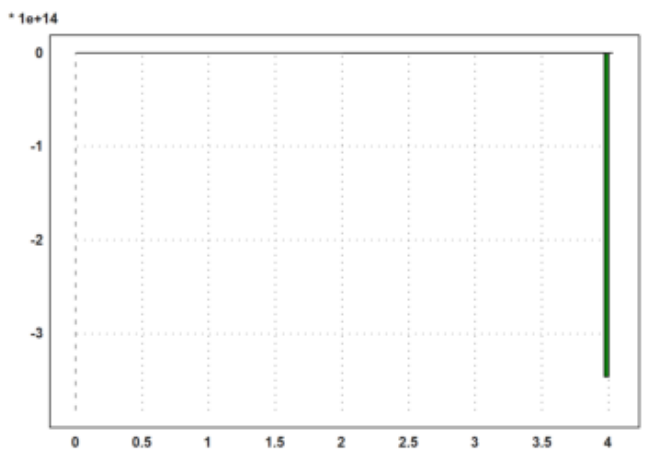
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int \frac{x}{x-4}\,dx = 4\,\log\left(x-4\right)+x$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,3))
```

$$\int_{0}^{3} \frac{x}{x-4}\,dx = 3-4\,\log 4$$

```
>x=0.01:0.03:4; plot2d(x,f(x+0.03),>bar); plot2d("f(x)",0,2,>add):
```



NO.2

```
>function f(x) &= x^4/(x+4); $f(x)
```

$$\frac{x^4}{x+4}$$

```
>$showev('integrate(x^4/(x+4),x))
```

$$\int \frac{x^4}{x+4}\,dx = 256\,\log\left(x+4\right) + \frac{3\,x^4 - 16\,x^3 + 96\,x^2 - 768\,x}{12}$$

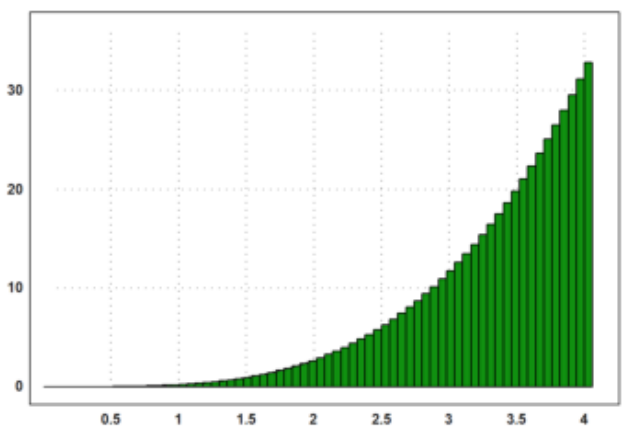
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int \frac{x^4}{x+4}\,dx = 256\,\log\left(x+4\right) + \frac{3\,x^4 - 16\,x^3 + 96\,x^2 - 768\,x}{12}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,5))
```

$$\int_{0}^{5} \frac{x^4}{x+4}\,dx = \frac{3072\,\log 9 - 1565}{12} - 256\,\log 4$$

```
>x=0.1:0.06:4; plot2d(x,f(x+0.03),>bar); plot2d("f(x)",0,2,>add):
```



Turunan Fungsi

Turunan Fungsi Turunan merupakan salah satu materi lanjutan dari limit fungsi.
Turunan dapat disebut juga sebagai diferensial dan proses dalam menentukan turunan suatu fungsi disebut sebagai diferensiasi.

Definisi turunan (limit):

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Berikut adalah beberapa sifat turunan fungsi yang dapat diperhatikan sehingga memudahkan dalam melakukan operasi turunan fungsi antara lain:

1. Aturan Penjumlahan

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

2. Aturan Pengurangan

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

3. Aturan Perkalian

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

4. Aturan Pembagian

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

```
(dengan syarat g(x) tidak sama dengan 0)
```

5. Aturan Rantai

```
Jika g(x) adalah fungsi dalam fungsi f(g(x))
```

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

6. Turunan dari konstanta

$$\frac{d}{dx}(c) = 0, c = konstanta$$

1. Aturan Penjumlahan

```
Contoh:
Terdapat f(x)=2x^2 dan g(x)=3x^2 tentukan nilai (f+g)'(x)
```

```
>$showev('limit((2*(x+h)^2-2*x^2)/h,h,0)+'limit((3*(x+h)^2-3*x^2)/h,h,0))
```

$$\lim_{h \to 0} \frac{3\,(x+h)^2 - 3\,x^2}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{2\,(x+h)^2 - 2\,x^2}{h} = 10\,x$$

```
>function f(x) &= 2*x^2
```

$$2\,x^2$$

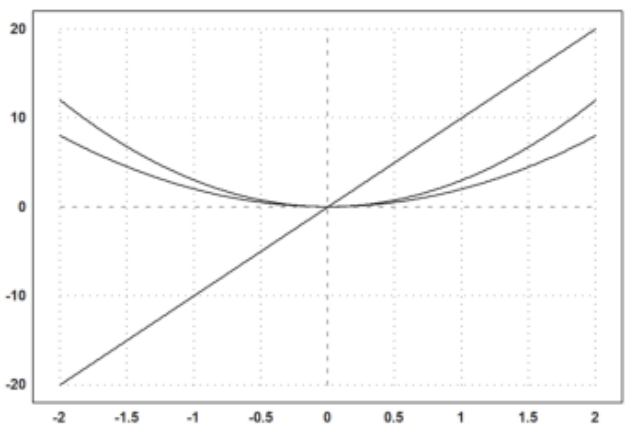
```
>function g(x) &= 3*x^2
```

$$3\,x^2$$

```
>function h(x) &= 10*x
```

$$10\,x$$

```
>plot2d(["f(x)","g(x)","h(x)"]):
```



2. Aturan Pengurangan

Contoh:
Terdapat f(x)=3x^2+3 dan g(x)=2x^2+2 tentukan nilai dari (f-g)'(x)

```
>$showev('limit((3*(x+h)^2+3-(3*x^2+3))/h,h,0)-'limit((2*(x+h)^2+2-(2*x^2+2))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{3\,(x+h)^2-3\,x^2}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{2\,(x+h)^2-2\,x^2}{h}=2\,x$$

```
>function f(x)&= 3*x^2+3
```

$$3\,x^2+3$$

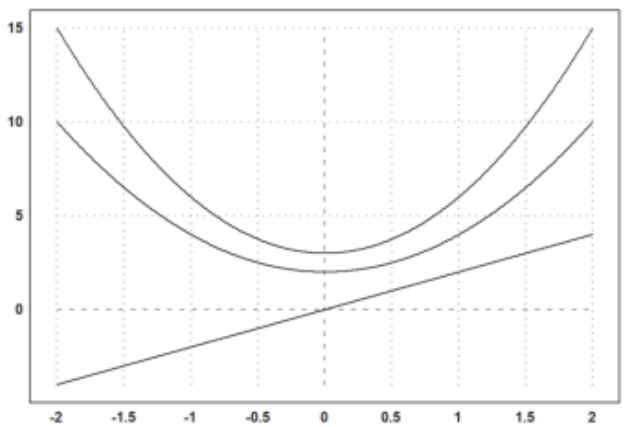
```
>function g(x) &= 2*x^2+2
```

$$2 x^{2} + 2$$

```
>function h(x) &= 2*x
```

$$2 x$$

```
>plot2d(["f(x)","g(x)","h(x)"]):
```



3. Aturan Perkalian
   Contoh:
   Terdapat u(x)=(x^3-2).(x^2-3) tentukan nilai u'(x)
   Kita bisa menentukan terlebih dahulu f(x) dan g(x) dimana
   f(x)=x^3-2 dan g(x)=x^2-3 kemudian bisa kita terapkan aturan
   perkalian

```
>$showev(((’limit(((x+h)^3-2-(x^3-2))/h,h,0))*(x^2-3))+((x^3-2)*’limit(((x+h)^2-3-(x^2-3))
```

$$\left(x^{2}-3\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{3}-x^{3}}{h}\right)+\left(x^{3}-2\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{2}-x^{2}}{h}\right)=2\,x\,\left(x^{3}-2\right)+3\,x^{2}\,\left(x^{2}-3\right)$$

```
>$expand((2*x)*(x^3-2))+((3*x^2)*(x^2-3)))
```

$$5\,x^{4}-9\,x^{2}-4\,x$$

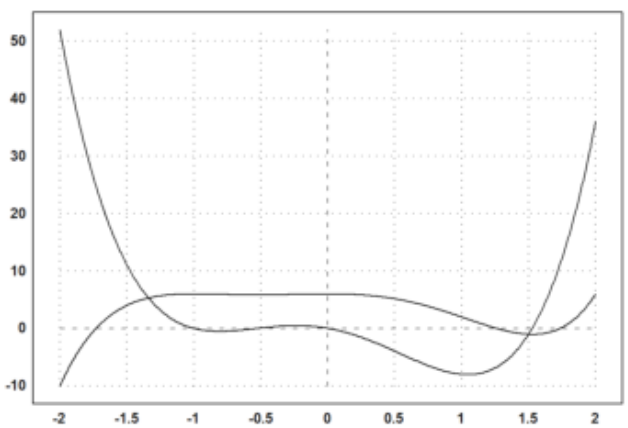
```
>function u(x) &= (x^3-2)*(x^2-3)
```

$$(x^3 - 2)\,(x^2 - 3)$$

```
>function h(x) &= 2*x*(x^3-2)+3*x^2*(x^2-3)
```

$$2\,x\,(x^3 - 2) + 3\,x^2\,(x^2 - 3)$$

```
>plot2d(["u(x)","h(x)"]):
```



4. Aturan Pembagian

Contoh:
Terdapat u(x)=2x^3/x-1 tentukan nilai u'(x)
Kita bisa menentukan terlebih dahulu f(x) dan g(x) dimana
f(x)=2x^3 dan g(x)=x-1 kemudian bisa kita terapkan aturan pembagian

```
>$showev((((’limit((2*(x+h)^3-2*x^3)/h,h,0))*(x-1))-((2*x^3)*’limit(((x+h)-1-(x-1))/h,h,0)
```

$$\frac{(x-1)\left(\lim_{h\to 0}\frac{2\,(x+h)^3-2\,x^3}{h}\right)-2\,x^3}{(x-1)^2}=\frac{6\,(x-1)\,x^2-2\,x^3}{(x-1)^2}$$

```
>$expand((6*(x-1)*x^2-2*x^3)/(x-1)^2)
```

$$\frac{4x^3}{x^2-2x+1}-\frac{6x^2}{x^2-2x+1}$$

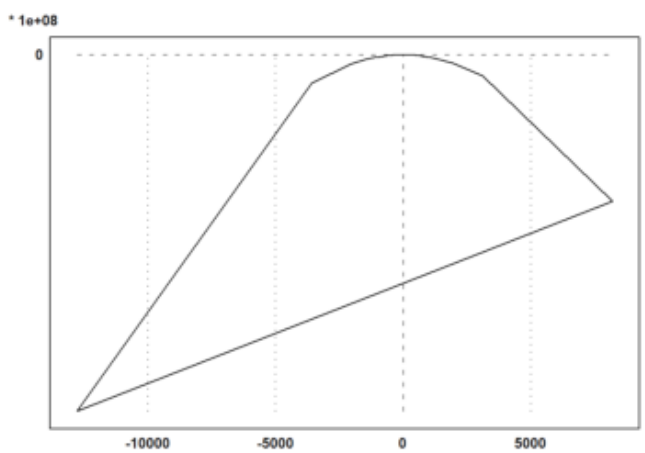
```
>function u(x)&= 2*x^3/(x-1)
```

$$\frac{2\,x^3}{x-1}$$

```
>function h(x) &= (6*(x-1)*x^2-2*x^3)/(x-1)^2
```

$$\frac{6\,(x-1)\,x^2-2\,x^3}{(x-1)^2}$$

```
>plot2d("u(x)","h(x)",5.0):
```



5. Aturan rantai

```
Contoh:
Terdapat f(x)=x^2 dan g(x)=2x tentukan nilai dari (f(g(x)))'
Kita bisa menentukan terlebih dahulu f(g(x)) yaitu
f(g(x))=(2x)^2
f(g(x))=4x^2
Sehingga dapat kita gunakan aturan rantai sebagai berikut
```

```
>$showev(('limit((4*(x+h)^2-4*x^2)/h,h,0))*('limit((2*(x+h)-2*x)/h,h,0)))
```

$$\left(\lim_{h\to 0}\frac{2\,(x+h)-2\,x}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{4\,(x+h)^2-4\,x^2}{h}\right)=16\,x$$

6. Turunan dari Konstanta

```
Contoh:
Cari nilai turunan dari 1000
```

```
>$showev('limit((1000-1000)/h,h,0))
```

$$0=0$$

Dalam mengetahui cara kerja limit untuk mencari turunan akan diberikan beberapa contoh antara lain:
Pada contoh pertama akan dicari turunan

$$x^2$$

```
>$showev('limit(((x+h)^2-x^2)/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=2\,x$$

pertama-tama bisa kita uraikan operasi pada pembilang

$$(x+h)^2-x^2$$

menguraikan

$$(x+h)^2$$

menjadi

$$x^2+2hx+h^2$$

kemudian disederhanakan dengan menghilangkan x^2

$$x^2+2hx+h^2-x^2$$

menjadi

$$2hx + h^2$$

```
>p &= expand((x+h)^2-x^2)|simplify; $p
```

$$2\,h\,x + h^2$$

```
>q &=ratsimp(p/h); $q
```

$$2\,x + h$$

Latihan

1. Tentukan suku ke-8 dari deret berikut

$$[3, 9, 27]$$

2. Hitunglah jumlah suku ke-6 dari deret no.1
3. Hitunglah limit barisan dari

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{4n+1}{n}}$$

4. Buatlah barisan kompleks dengan X1=1 dan X2=3
5. Buatlah barisan ekspresi simbolik dengan maxima (bebas).

Jawaban

1.

```
>n=8; a=3; r=3; a*r^(n-1)
```

```
  6561
```

2.

```
>n=6; a=3; r=3; a*((r^n)-1)/(r-1)
```

```
  1092
```

3.

```
>$showev('limit((\sqrt((4*n+1)/n),n,inf)))
```

$$\infty = \infty$$

4.

```
>sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,3],10)
```

```
  [1,  3,  4,  7,  11,  18,  29,  47,  76,  123]
```

5.

```
>deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,5); $deret
```

$$\left[x+1, \frac{x^2}{2}+x+1, \frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1, \frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1, \frac{x^5}{120}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1\right]$$

Latihan Soal

1. Cari nilai dari turunan fungsi

$$g(x) = 4x^4 - 3x^3 - 2x^2 - x - 1$$

2. Cari nilai dari turunan fungsi

$$f(x) = sin(x) - cos(x)$$

3. Tentukan benar atau salah bahwa turunan dari

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

adalah

$$f'(x) = 2x - 2$$

4. Tentukan titik extrem pada

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

5. Tentukan kedua titik pada soal no 4 apakah merupakan titik maksimum

```
atau minimum!
```

JAWAB

NOMOR 1
bisa langsung memasukkan fungsi ke dalam limit menjadi

```
>$showev('limit(((4*(x+h)^4-3*(x+h)^3-2*(x+h)^2-(x+h)-1)-(4*x^4-3*x^3-2*x^2-x-1))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{4\,(x+h)^4-3\,(x+h)^3-2\,(x+h)^2-4\,x^4+3\,x^3+2\,x^2-h}{h}=16\,x^3-9\,x^2-4\,x-1$$

NOMOR 2
Bisa langsung memasukkan fungsi ke dalam limit sehingga didapat:

```
>$showev('limit((sin(x+h)-cos(x+h)-(sin(x)-cos(x)))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\cos(x+h)-\sin x+\cos x}{h}=\sin x+\cos x$$

NOMOR 3
bisa langsung memasukkan fungsi ke dalam limit sehingga didapat hasilnya ternyata benar

```
>$showev('limit(((x+h)^2-2*(x+h)+1-(x^2-2*x+1))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2-2\,(x+h)+2\,x}{h}=2\,x-2$$

NOMOR 4
Pada nomor 4 bisa kita cari terlebih dahulu turunan pertama dari fungsi menggunakan limit

```
>$showev('limit(((x+h)^3-6*(x+h)^2+9*(x+h)+1-(x^3-6*x^2+9*x+1))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-6\,(x+h)^2-x^3+6\,x^2+9\,(x+h)-9\,x}{h}=3\,x^2-12\,x+9$$

Dimana f'(x)=0
Kemudian bisa kita mencari akar dengan cara memfaktorkan turunan fungsi setelah disederhanakan dengan membagi fungsi dengan angka 3 menjadi:

```
>$& (factor(x^2-4*x+3))
```

$$(x-3)\,(x-1)$$

didapat titik kritis adalah x=3 atau x=1

```
>function f(x)&= x^3-6*x^2+9*x+1
```

$$x^3 - 6\,x^2 + 9\,x + 1$$

kemudian memasukkan nilai x pada fungsi untuk mendapat nilai f(x)

```
>f(1)
```

5

```
>f(3)
```

1

didapat titik kritis fungsi terletak pada (1,5) dan (3,1)

NOMOR 5
Untuk mencari titik mana yang maksimum dan titik mana yang minimum, kita akan menggunakan turunan kedua dari fungsi yaitu f''(x)

```
>$showev('limit((3*(x+h)^2-12*(x+h)+9-(3*x^2-12*x+9))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{3\,(x+h)^2-3\,x^2-12\,(x+h)+12\,x}{h}=6\,x-12$$

Setelah menemukan turunan kedua f(x) maka kita tinggal memasukkan x=1 dan x=3 untuk mendapatkan nilai fungsi pada titik kritis.

```
>function f(x)&= 6*x-12
```

$$6\,x - 12$$

kemudian memasukkan nilai x pada fungsi turunan kedua

```
>f(1)
```

-6

```
>f(3)
```

6

didapat titik maksimum lokal fungsi pada titik (1,5) dan titik minimum lokal fungsi ada pada titik (3,1)