Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 15 - derivabilidad en funciones definidas a trozos

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=\begin{Bmatrix} 0 & si & x<0 \\ x & si & x\geq 0 \end{Bmatrix}$.

En los intervalo abiertos $x<0, x>0$ la función es continua y derivable por ser polinómica.

En el punto frontera $x=0$ se cumple:

$f(0)=0$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=0$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=0=L$

$f(0)=L$

Por lo tanto la función es continua en $x=0$. Es decir, $f(x)$ es continua en toda la recta real.

Estudiamos la derivabilidad en el punto frontera.

$f'(x)=\begin{Bmatrix} 0 & si & x<0 \\ 1 & si & x>0 \end{Bmatrix}$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos

En $x=0$ es fácil comprobar que la derivada lateral izquierda es 0 , mientras que la derivada lateral derecha es 1 . Por lo tanto, la función no es derivable en $x=0$. Es decir, la función es continua en toda la recta real pero es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$.

2. ¿Para qué valores de a y b la siguiente función es derivable en todo $\mathbb{R}$?

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^3-x & si & x\leq 0 \\ a\,x+b & si & x>0 \end{Bmatrix}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, tiene que ser en primer lugar continua en todo $\mathbb{R}$.
La función es continua y derivable en los intervalos abiertos $(-\infty,0)$ y $(0,+\infty)$ por ser polinómica.
Las condiciones de continuidad en el punto $x=x_0$ son:

$$\exists\ f(x_0),\, x_0\in Dom(f)$$
$$\lim_{x\to x_o^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$
$$f(x_0)=L$$

Las condiciones para que sea derivable en el punto $x=x_0$ son:

$$f(x)\, sea\ continua\ en\, x_0$$
$$f'(x_0^+)=f'(x_0^-)$$

Continuidad en punto frontera $x=0$:

$$f(0)=0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0 \ ,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=b \ \rightarrow\ b=0$$

$f(0)=L \Rightarrow\ 0=0$ → La función es continua en $x=0$ si $b=0$

Calculamos la función derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & si \quad x<0 \\ a & si \quad x>0 \end{cases}$$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos

Derivabilidad en el punto frontera $x=0$:

$$f'(0^-)=-1 \ ,\ f'(0^+)=a \ \rightarrow\ a=-1$$

Si $b=0$ la función es continua en toda la recta real y si además $a=-1$ la función es derivable en todo su dominio.

3. Obtener el valor de a y b para que la función $f(x)=\begin{Bmatrix} x^2+ax+b-1 & si & x<2 \\ \ln(x-1) & si & x\geq 2\end{Bmatrix}$ sea derivable en $x=2$.

Una función a trozos es derivable en un punto frontera si cumple las condiciones de continuidad y de suavidad (también llamadas de derivabilidad).

Las condiciones de continuidad en un punto frontera son las siguientes:

$$\exists f(2)=\ln(2-1)=\ln(1)=0$$

$$\lim_{x\to 2^-}(x^2+ax+b-1)=(evaluar)=3+2a+b$$

$$\lim_{x\to 2^+}\ln(x-1)=(evaluar)=0$$

Igualamos los límites laterales para obtener el valor del límite: $L=3+2a+b=0$

El valor de la función en el punto debe ser igual al valor del límite: $L=f(2) \quad \rightarrow \quad L=0$

Calculamos la derivada de la función a trozo (sin incluir, por ahora, el signo igual para $x=2$ ya que eso es precisamente lo queremos demostrar).

$$f'(x)=\begin{Bmatrix} 2x+a & si & x<2 \\ \dfrac{1}{x-1} & si & x>2\end{Bmatrix}$$

Las derivadas laterales deben coincidir:

$$f'(2^-)=4+a$$

$$f'(2^+)=1$$

$$f'(2^-)=f'(2^+) \quad \rightarrow \quad 4+a=1 \quad \rightarrow \quad a=-3$$

Si sustituimos en $3+2a+b=0 \quad \rightarrow \quad 3-6+b=0 \quad \rightarrow \quad b=3$

4. Sea $f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x}+2 & si \quad x\neq 0 \\ k & si \quad x=0 \end{cases}$

a) ¿Hay algún valor de k para el cual f(x) sea continua en $x=0$ **?**

b) ¿Hay algún valor de k para el cual f(x) sea derivable en $x=0$ **?**

a) Para que una función sea continua en $x=x_0$ deben satisfacerse tres condiciones:

- Estar definida la función en el punto → $\exists f(x_0)$

- Existir los límites laterales, ser finitos y ser iguales → $\lim_{x\to x_{0-}} f(x)=\lim_{x\to x_{0+}} f(x)=L$

- Coincidir el límite con el valor de la función en el punto → $f(x_0)=L$

Aplicamos estas condiciones a nuestra función, con $x_0=0$.

$$f(0)=k$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{sen(x)}{x}+2\right)=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{sen(x)+2x}{x}\right)=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación

Aplicamos L'Hôpital en la indeterminación y derivamos numerador y denominador.

$$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{sen(x)+2x}{x}\right)=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{\cos(x)+2}{1}\right)=(evaluar)=3$$

Para el límite lateral derecho obtenemos idéntico resultado. Por lo tanto, para que la función sea continua en $x=0$, debe cumplirse $k=3$.

b) Una función es derivable en $x=x_0$ si cumple:

- La función es continua en $x=x_0$ (las condiciones de continuidad las hemos indicado en el apartado anterior del problema).

- Las derivadas laterales coinciden → Recuerda que las derivadas laterales, en el fondo, implicar hacer el límite de la función derivada en el punto a estudiar. Por lo tanto, si aparecen indeterminaciones podemos aplicar las técnicas de resolución de límites.

Para que sea continua ya hemos demostrado que $k=3$.

Calculemos las derivadas laterales. Para ello, derivamos el tramo de la función a la izquierda y derecha de 0. ¡OJO! Para la derivabilidad de la función en el punto $x=0$ necesitamos que las derivadas laterales sean iguales; no necesitamos el valor de la derivada justo en el punto $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x}+2 & si \quad x\neq 0 \\ 3 & si \quad x=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{\cos(x)\cdot x-sen(x)}{x^2} \quad si \quad x\neq 0$$

$f'(0^-)=(evaluar)=\dfrac{0}{0}$ → Indeterminación → Resolver la derivada lateral como un límite.

$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\cos(x)\cdot x-sen(x)}{x^2}=\dfrac{0}{0}$ → L'Hôpital

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-sen(x)\cdot x+\cos(x)-\cos(x)}{2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-sen(x)\cdot x}{2x}=(simplificar)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-sen(x)}{2}=0$$

La derivada lateral derecha toma el mismo valor.

Conclusión: la función es derivable en $x=0$ si $k=3$. ¡OJO! Fíjate que el valor de k ha sido determinante para la continuidad. Pero para la condición de suavidad (derivadas laterales iguales) no ha tomado ningún papel.

5. Estudia continuidad y derivabilidad en $f(x)=\begin{Bmatrix} -x & si & x<0 \\ x^2 & si & x\geqslant 0 \end{Bmatrix}$ **. Aplica la definición formal de derivada al estudiar la derivabilidad.**

Estudiamos la continuidad en el punto frontera $x=0$, ya que en el resto del dominio de $f(x)$ la función es continua por ser un polinomio.

Una función $f(x)$ es continua en el punto $x=0$ si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

El punto $x=0$ tiene imagen → $\exists f(0)$

Existe el límite de la función en $x=0$ → $\exists \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$

La imagen coincide con el límite de la función en el punto → $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$

Aplicamos estas tres condiciones al punto $x=0$.

$f(0)=0$

$\lim_{x\to 0^-}(-x)=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}(x^2)=0 \quad \to \quad \lim_{x\to 0^-}(-x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2)=\lim_{x\to 0} f(x)$

$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x) \quad \to \quad 0=0$

Por lo tanto, la función es continua en $x=0$. A continuación, estudiamos la derivabilidad.

Una función es derivable (suave) en el punto $x=0$ si, y sólo si, es derivable por la izquierda y por la derecha en dicho punto y las derivadas laterales coinciden. Aplicando la definición formal de derivada:

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0^-+h)-f(0^-)}{h}$$

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0^++h)-f(0^+)}{h}$$

Aplicando esta condición a la izquierda y derecha de $x=0$.

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{-(0+h)-(-0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=(simplificar)=\lim_{h\to 0^-}(-1)=-1$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{(0+h)^2-0^2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{h^2}{h}\right)=(simplificar)=\lim_{h\to 0^+}(h)=0$$

Al no coincidir las derivadas laterales la función no es derivable en $x=0$.

6. Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=|x|$. Aplica la definición formal de derivada al estudiar la derivabilidad.

Rompemos la función a trozos → $f(x)=\begin{cases} -x & si \quad x<0 \\ x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

Estudiamos la continuidad en el punto frontera $x=0$, ya que en en los intervalos abiertos de cada tramo tenemos un polinomio y sabemos que es una función continua y derivable en toda la recta real.

$$f(0)=0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0=L$$
$$f(0)=0=L$$

Por lo tanto la función es continua en $x=0$. Para estudiar la derivabilidad evaluamos las derivadas laterales (aplicando la definición formal de derivada).

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0^-+h)-f(0^-)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(0+h)-(-0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=(simplificar)=\lim_{h\to 0^-}(-1)=-1$$
$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0^++h)-f(0^+)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(0+h)-(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=(simplificar)=\lim_{h\to 0^+}(1)=1$$

Al no coincidir, la función no es derivable en $x=0$. Por lo tanto → $f'(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<0 \\ 1 & si \quad x>0 \end{cases}$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos porque no es derivable en $x=0$.

7. Obtener a y para que la función $f(x)$ sea derivable en $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases} 3-ax^2 & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x=1$, debe ser continua en ese punto.

$$f(1)=3-a$$

$$\lim_{x\to 1^-} 3-ax^2=3-a \quad , \quad \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2}{ax}\right)=\frac{2}{a} \quad \rightarrow \quad 3-a=\frac{2}{a} \quad \rightarrow \quad 3\cdot a-a^2-2=0 \quad \rightarrow \quad a=1 \ \ ó \ \ a=2$$

Estudiemos la derivabilidad en el punto frontera.

$$f'(x)=\begin{cases} -2\cdot a\cdot x & si \quad x<1 \\ \dfrac{-2}{a\cdot x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos

Las derivadas laterales en $x=1$ deben ser iguales:

$$f'(1^-)=-2\cdot a \quad , \quad f'(1^+)=\frac{-2}{a} \quad \rightarrow \quad -2\cdot a=\frac{-2}{a} \quad \rightarrow \quad a^2=1 \quad \rightarrow \quad a=-1 \ \ ó \ \ a=1$$

Concluyendo de las condiciones de continuidad y derivabilidad: $f(x)$ será continua y derivable en $x=1$ si y solo si $a=1$.

8. Obtener $a\geq 0$ y $b>0$ para que la función $f(x)$ sea derivable en todo su dominio.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x<0 \\ \sqrt{ax+b} & si \quad 0\leq x<2 \\ \dfrac{-x}{\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} & si \quad x>2 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, primero debe ser continua en todo $\mathbb{R}$.

Primero estudiamos la continuidad en los intervalos abiertos:

$$x<0\rightarrow x^2+2\rightarrow continua\ en\ x<0\ por\ ser\ polinómica$$

$$0<x<2\rightarrow\sqrt{ax+b}\rightarrow continua\ en\ 0<x<2\ por\ cumplir\ (ax+b)\geq 0$$

¡OJO! Fíjate que el enunciado indica explícitamente que $a\geq 0$ y $b>0$, por lo que tenemos garantizado un discriminante no nulo en el intervalo $0<x<2$.

$$x>2\rightarrow\frac{-x}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}\rightarrow continua\ en\ x>2\ por\ ser\ polinómica$$

Las condiciones de continuidad en un punto frontera $x=x_0$ son:

$$\exists\ f(x_0)$$

$$\lim_{x\rightarrow x_0-} f(x)=\lim_{x\rightarrow x_0+} f(x)=L$$

$$f(x_0)=L$$

Punto frontera en $x=0$:

$$\exists\ f(0)$$

$$\lim_{x\rightarrow 0+}\sqrt{ax+b}=\sqrt{b}\quad ,\quad \lim_{x\rightarrow 0-} x^2+2=2\quad\rightarrow\quad 2=\sqrt{b}\rightarrow b=4$$

$$f(0)=L$$

Punto frontera en $x=2$:

$$\nexists\ f(2)\rightarrow f(x)\ no\ es\ continua\ en\ x=2$$

¡OJO! La función no está definida en, $x=2$ por lo tanto no nos piden estudiar derivabilidad en este punto frontera.

Por lo tanto la función es continua en todo su dominio de definición si $b=4$. Una vez más insisto que la función no está definida en $x=2$, por lo que ese punto frontera no afecta al estudio de la derivabilidad. Y también recuerdo que la condición del enunciado $a\geq 0$ y $b>0$ garantizan que el discriminante de $\sqrt{ax+b}$ nunca sea negativo.

Vamos a estudiar la derivabilidad para saber si tenemos alguna condición mas que aplicar sobre a . Al derivar escribimos los intervalos abiertos y luego se estudia la derivabilidad en los puntos frontera.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x \quad si \quad x<0 \\ \dfrac{a}{2\cdot\sqrt{ax+4}} \quad si \quad 0<x<2 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \quad si \quad x>2 \end{cases}$$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos

En los intervalos abiertos la función derivada es continua, por lo que la función original será derivable. Fíjate que:

$x<0$ → la función derivada es un polinomio → $f(x)$ derivable

$0<x<2$ → el denominador de la función derivada nunca se anula y el discriminante de la raíz nunca se hace negativo por ser $a>0$ y $b>0$ → $f(x)$ derivable

$x>2$ → la función derivada es un polinomio → $f(x)$ derivable

En $x=2$ sabemos que la función no estaba definida, por lo que no tenemos que preguntarnos por la derivabilidad.

En $x=0$ será derivable si coinciden las derivadas laterales en ese punto.

$$f'(0-)=0 \quad , \quad f'(0+)=\frac{a}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{4}=0 \quad \rightarrow \quad a=0$$

Con $a=0$ y $b=4$, la función $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$.

9. ¿En qué puntos no es derivable $y=250-|x^2-1|$ **?**

Para que una función sea derivable en un punto x_0 debe ser continua en ese punto y coincidir las derivadas laterales.

Tenemos la diferencia de un valor constante y el valor absoluto de un polinomio. Por lo tanto la función es continua en toda la recta real.

Expresamos el valor absoluto de otra forma, dejando la función definida en 3 tramos distintos, de forma que estudiaremos la continuidad en los puntos frontera de los intervalos, ya que en los intervalos abiertos la función será derivable por ser polinómica.

$$x^2-1=0$$
$$x=\pm 1 \rightarrow \textit{puntos frontera}$$

Estudiamos el signo de los intervalos establecidos entre los puntos frontera.

$(-\infty,-1) \rightarrow f(x)>0$

$(-1,1) \rightarrow f(x)<0 \rightarrow$ Cambio de signo en la función a trozos

$(1,\infty) \rightarrow f(x)>0$

$$f(x)=\begin{cases} 250-(x^2-1) & si \quad x<-1 \\ 250+(x^2-1) & si \quad -1\le x<1 \\ 250-(x^2-1) & si \quad x\ge 1 \end{cases}$$

Ahora estudiamos la continuidad en los puntos frontera, recordando que la función es continua en $x=x_0$ si:

$$\exists\ f(x_0)$$
$$\lim_{x\to x_0^-}(f(x))=\lim_{x\to x_0^+}(f(x))=L$$
$$L=f(x_0)$$

En $x=1$ tendremos:

$$f(1)=250-(1^2-1)=250$$
$$\lim_{x\to 1^-}(f(x))=250 \quad , \quad \lim_{x\to 1^+}(f(x))=250 \quad \rightarrow \quad L=250$$
$$f(1)=L$$

En $x=-1$ se cumple:

$$f(-1)=250+(1^2-1)=250$$

$$\lim_{x\to -1^-}(f(x))=250 \quad , \quad \lim_{x\to -1^+}(f(x))=250 \quad \rightarrow \quad L=250$$

$$f(-1)=L$$

Es decir, la función también es continua en $x=1, x=-1$. Por lo tanto, es continua en toda la recta real.

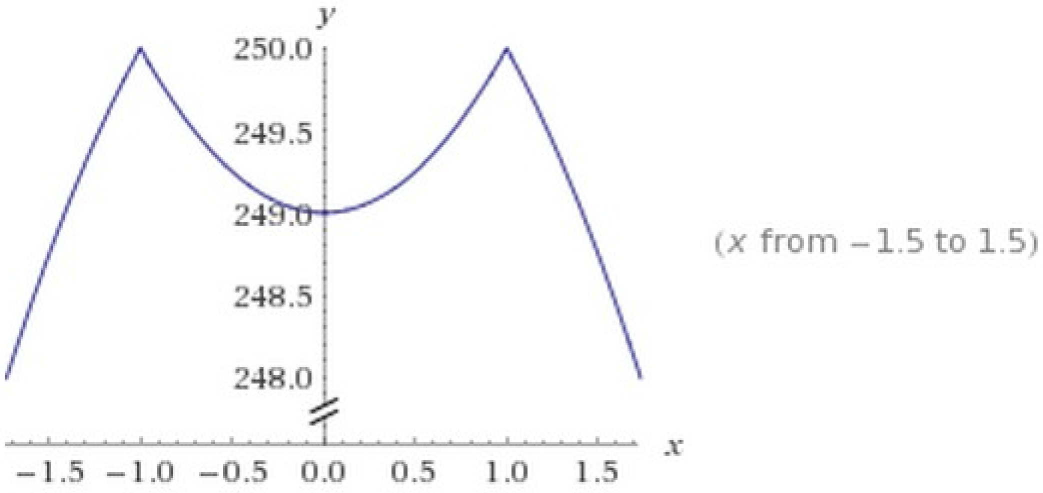
A continuación, pasamos a ver si la función es derivable en los puntos frontera $x=1$ y $x=-1$ (recordando que para ello deben coincidir las derivadas laterales de la función evaluada en esos puntos). En los intervalos abiertos la función es derivable por ser polinómica.

$$f'(x)=\begin{Bmatrix} -2x & si & x<-1 \\ 2x & si & -1<x<1 \\ -2x & si & x>1 \end{Bmatrix}$$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos

$$\lim_{x\to -1^-}(f'(x))=2 \quad , \quad \lim_{x\to -1^+}(f'(x))=-2$$

$$\lim_{x\to 1^-}(f'(x))=2 \quad , \quad \lim_{x\to 1^+}(f'(x))=-2$$

Al no coincidir las derivadas laterales en $x=1$ y $x=-1$ concluimos que la función no es derivable en esos puntos, donde tendremos puntos angulosos como podemos ver en la gráfica.



10. Obtener a y b para que $f(x)$ sea derivable para cualquier valor de x .

$$f(x)=\begin{cases} a+bx-x^2 & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en todo ℝ, tiene que ser continua en todo ℝ.

Las condiciones de continuidad en el punto $x=x_0$ son:

$\exists \ f(x_0), x_0 \in Df$

$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L, L\in R$

$f(x_0)=L$

Las condiciones para que sea derivable en el punto $x=x_0$ son:

$f(x) \ \ sea \ \ continua \ \ en \ \ x_0$

$f'(x_0^-)=f'(x_0^+)$

Primero estudiamos la continuidad en los intervalos abiertos y luego en los puntos frontera.

$x<1 \Rightarrow f(x)=a+bx-x^2$ → continua por ser polinómica

$x>1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x}$ → continua salvo donde se anula el denominador, pero $x=0\notin(1,\infty)$

En el punto frontera $x=1$:

$f(1)=a+b-1$

$\lim_{x\to 1^-} a+bx-x^2=a+b-1$, $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x}=1 \quad\rightarrow\quad a+b-1=1 \quad\rightarrow\quad a+b=2$

$f(1)=L \quad\rightarrow\quad a+b-1=1$

Estudiamos la derivabilidad, en primer lugar en los intervalos abiertos.

$$f'(x)=\begin{cases} b-2x & si \quad x<1 \\ \dfrac{-1}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$ → Recuerda: dejamos los intervalos abiertos

$x<1 \rightarrow f'(x)=b-2x$ → continua por ser polinómica → f(x) es derivable

$x>1 \rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$ → continua salvo en $x=0$, pero $x=0\notin(1,\infty)$ → f(x) es derivable

En el punto frontera $x=1$:

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} b-2x=b-2 \quad , \quad f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{x^2}=-1 \quad \rightarrow \quad b-2=-1 \Rightarrow b=1$$

Uniendo esta nueva condición a la relación obtenida $a+b=2$:

$b=1,\ a+b=2 \Rightarrow a=1$ → Valores para que $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.

11. ¿En qué puntos no es derivable $f(x)$?

$$f(x)=\begin{cases} 3x^3-27 & si \quad x<2 \\ -3 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

En primer lugar estudiamos la continuidad de la función en los intervalos abiertos:

$x<2 \rightarrow f(x)$ es continua por ser un polinomio

$x>2 \rightarrow f(x)$ es continua por ser una constante

Condiciones de continuidad en el punto frontera $x=2$:

$f(2)=-3$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(3x^3-27)=-3$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} -3=-3 \rightarrow L=-3$

$f(2)=L \rightarrow -3=-3$

La función es continua en toda la recta real.

Ahora vamos a estudiar la derivabilidad de la función. La función derivada es la siguiente:

$$f'(x)=\begin{cases} 9x^2 & si \quad x<2 \\ 0 & si \quad x>2 \end{cases}$$ → Dejamos los intervalos abiertos

Estudiamos la derivabilidad en los intervalos abiertos:

$x<2 \rightarrow f'(x)$ es continua porque se trata de un monomio → $f(x)$ derivable

$x>2 \rightarrow f'(x)$ es continua por ser una constante → $f(x)$ derivable

En el punto frontera $x=2$ deben coincidir las derivadas laterales:

$f(2^-)=\lim_{x\to 2^-} 9x^2=36$, $f(2^+)=\lim_{x\to 2^+} 0=0 \rightarrow 36\neq 0$

La función no es derivable en $x=2$.

12. Obtener m y n para que $f(x)$ sea continua. Estudia su derivabilidad para esos valores obtenidos para la continuidad.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2+1 & si & x<0 \\ m\,x+n & si & 0\leq x\leq 3 \\ x-5 & si & x>3 \end{Bmatrix}$$

Continuidad en los intervalos abiertos:

$x<0 \rightarrow f(x)$ continua por ser polinómica

$0<x<3 \rightarrow f(x)$ continua por ser polinómica

$x>3 \rightarrow f(x)$ continua por ser polinómica

Continuidad en punto frontera $x=0$:

$f(0)=(m\,x+n)=n$

$\lim_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$, $\lim_{x\to 0^+}(m\,x+n)=n \rightarrow n=1$

$f(0)=L \rightarrow n=n$

Continuidad en punto frontera $x=3$:

$f(3)=(m\,x+n)=3\,m+1$

$\lim_{x\to 3^-}(m\,x+n)=3\,m+1$, $\lim_{x\to 3^+} x-5=-2 \rightarrow 3m+1=-2 \rightarrow m=-1$

$f(3)=L \rightarrow 3m+1=-2$

La función es continua en toda la recta real. Estudiamos la derivabilidad, sustituyendo los valores obtenidos $m=-1$ y $n=1$.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} 2x & si & x<0 \\ -1 & si & 0<x<3 \\ 1 & si & x>3 \end{Bmatrix}$$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos

Derivabilidad en los intervalos abiertos:

$x<0 \rightarrow f'(x)$ continua por ser polinómica → $f(x)$ es derivable

$0<x<3 \rightarrow f'(x)$ continua por ser constante → $f(x)$ es derivable

$x>3 \rightarrow f'(x)$ continua por ser constante → $f(x)$ es derivable

Derivabilidad en el punto frontera $x=0$:

$\lim_{x\to 0^-} 2x=0$, $\lim_{x\to 0^+} -1=-1$ → $0\neq -1$

Las derivadas laterales no coinciden → la función no es derivable en $x=0$.

Derivabilidad en el punto frontera $x=3$:

$\lim_{x\to 3^-} -1=-1$, $\lim_{x\to 3^+} 1=1$ → $-1\neq 1$

Las derivadas laterales no coinciden → la función no es derivable en $x=3$.

13. Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función definida a trozos.

$$f(x)=\begin{cases} x-1+\cos(x-1) & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{sen(x-1)}{x-1} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Para estudiar la continuidad, estudiamos en primer lugar los intervalos abiertos.

$(-\infty,1) \rightarrow f(x)$ es continua por ser suma de polinomio y función coseno.

$(1,\infty) \rightarrow f(x)$ es continua porque el denominador solo se anula en $x=1\notin(1,\infty)$.

En el punto frontera $x=1$ aplicamos las condiciones de continuidad.

$$f(1)=1$$
$$\lim_{x\to 1^-}(x-1+\cos(x-1))=1$$
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{sen(x-1)}{x-1}=\frac{0}{0} \rightarrow \text{L'Hôpital} \rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{\cos(x-1)}{1}=\frac{1}{1}$$

Los límites laterales coinciden, y además son iguales al valor de la función en $x=1$. Por lo tanto, la función es continua en $x=1$.

La derivabilidad la estudiamos en primer lugar en los intervalos abiertos.

$$f'(x)=\begin{cases} 1-sen(x-1) & si \quad x<1 \\ \dfrac{\cos(x-1)\cdot(x-1)-sen(x-1)}{(x-1)^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$

$(-\infty,1) \rightarrow f'(x)$ continua por ser suma de polinomio y seno $\rightarrow f(x)$ derivable.

$(1,\infty) \rightarrow f'(x)$ continua por no anularse denominador en $(1,\infty) \rightarrow f(x)$ derivable.

En el punto frontera $x=1$ las derivadas laterales deben coincidir para que la función sea derivable.

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}(1-sen(x-1))=1$$

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cos(x-1)\cdot(x-1)-sen(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{0}{0} \rightarrow \text{L'Hôpital} \rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{-sen(x-1)\cdot(x-1)+\cos(x-1)-\cos(x-1)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1^+} \frac{-sen(x-1)\cdot(x-1)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1^+} \frac{-sen(x-1)}{2}=0$$

Las derivadas laterales no coinciden, por lo que la función no es derivable en $x=1$.

14. Determina a y b para que $f(x)=\begin{cases} e^{a\cdot x} & si \quad x\leq 0 \\ 2\cdot a+b\cdot sen(x) & si \quad 0<x \end{cases}$ sea derivable en todo su dominio.

Para ser derivable, en primer lugar, la función debe ser continua.
Estudiamos la continuidad en los intervalos abiertos.

$(-\infty,0) \rightarrow f(x)$ continua por ser exponencial
$(0,\infty) \rightarrow f(x)$ continua por ser polinómica más función seno

Estudiamos la continuidad en el punto frontera $x=0$.

$f(0)=1$

$\lim_{x\to 0^-} e^{a\cdot x}=1$

$\lim_{x\to 0^+} (2\cdot a+b\cdot sen(x))=2\cdot a$

Igualamos límites laterales → $1=2\cdot a \rightarrow a=\frac{1}{2}$ → De esta forma existe el límite en $x=0$ y es igual al valor de la función en $x=0$ → La función es continua en $x=0$.
Pasamos a estudiar la derivabilidad, en primer lugar, en los intervalos abiertos.

$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} & si \quad x<0 \\ b\cdot \cos(x) & si \quad 0<x \end{cases}$ → dejamos los intervalos abiertos

$(-\infty,0) \rightarrow f'(x)$ continua por ser exponencial → $f(x)$ es derivable
$(0,\infty) \rightarrow f'(x)$ continua por ser coseno → $f(x)$ es derivable

Estudiamos la derivabilidad en el punto frontera $x=0$, comprobando si las derivadas laterales coinciden.

$f'(0^-)=\frac{1}{2}$

$f'(0^+)=b$

Igualamos derivadas laterales → $b=\frac{1}{2}$ → condición a cumplir para garantizar que la función sera derivable en $x=0$.

15. Sea $f(x)=\begin{Bmatrix} a+\ln(1-x) & si & x<0 \\ x^2 e^{-x} & si & x\geq 0 \end{Bmatrix}$ **.**

a) Calcula a **para que la función sea continua en toda la recta real.**

b) Estudiar la derivabilidad de la función.

a) Continuidad en los intervalos abiertos.

$(-\infty,0) \rightarrow f(x)=a+\ln(1-x)$ → Es continua ya que al argumento del logaritmo siempre es positivo en el intervalo $(-\infty,0)$.

$(0,\infty) \rightarrow f(x)=x^2 e^{-x}$ → Es continua por ser producto de polinomio y exponencial, que son funciones continuas en toda la recta real.

Continuidad en el punto frontera.

$x=0 \rightarrow f(0)=0$

$\lim_{x\to 0^-}(a+\ln(1-x))=a$

$\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{-x}=0$

Por continuidad los límites laterales deben ser iguales → $0=a$ → límite $L=0$

$f(0)=0=L$ → la función es continua en $x=0$ si $0=a$

b) La función es continua en toda la recta real. Estudiamos ahora su derivabilidad.

Derivabilidad en los intervalos abiertos.

$f'(x)=\begin{Bmatrix} \frac{-1}{1-x} & si & x<0 \\ 2xe^{-x}-x^2e^{-x} & si & x>0 \end{Bmatrix}$ → dejamos intervalos abiertos

$(-\infty,0) \rightarrow f'(x)=\frac{-1}{1-x} \rightarrow f'(x)$ es continua ya que el denominador no se anula en el intervalo $(-\infty,0) \rightarrow f(x)$ es derivable.

$(0,\infty) \rightarrow f(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x} \rightarrow f'(x)$ es continua por ser producto y suma de funciones continuas en toda la recta real (polinomio y exponencial) → $f(x)$ es derivable.

Derivabilidad en el punto frontera.

$x=0$, $f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{1-x}=-1$, $f'(0^+)=\lim_{x\to 0^-}(2xe^{-x}-x^2e^{-x})=0$

$-1\neq 0$ → las derivadas laterales no coinciden → la función no es derivable en $x=0$.

16. ¿Es la función $f(x)=\begin{cases} sen(x) & si \ \ -2\pi \leq x<0 \\ x^2-2x & si \ \ 0<x<3 \end{cases}$ **derivable** $x=0$ **?**

La función no está definida en $x=0$. Por lo tanto no será continua en ese punto y, en consecuencia, no puede ser derivable en $x=0$.

17. Sabiendo que $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$ **es derivable en** $x=0$ **, calcula** b **y** c **.**

Si la función es derivable en $x=0$ implica que también es continua en el punto frontera. Y por condiciones de continuidad:

$$\exists f(0)=c$$

$$\lim_{x\to 0^-}(x^2+bx+c)=c$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación → L'Hôpital → $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=\frac{1}{1}=1$$

Para que coincidan los límites laterales → $c=1$ → Existe límite y vale $L=1$

Y, además, esta condición satisface $f(0)=c=1=L$.

Una vez comprobada la continuidad, estudiamos la derivabilidad en los intervalos abiertos donde está definida la función.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+b & si \quad x<0 \\ \dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2} & si \quad x>0 \end{cases}$$ → dejamos intervalos abiertos en la derivada

Para que la función sera derivable en $x=0$ necesitamos que coincidan las derivadas evaluadas a la izquierda y a la derecha de $x=0$.

$$f'(0^-)=b$$

$$f'(0^+)=\frac{0}{0}$$ → ¡Recuerda! La derivada lateral es un límite, por lo que podemos resolver la indeterminación.

L'Hôpital → $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-x}{(x+1)^2}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2(x+1)^2}=\frac{-1}{2}$$

Por igualdad de los límites laterales → $b=\dfrac{-1}{2}$

18. Estudia la derivabilidad de $f(x)=x^2-3|x|+2$ en $x=0$ mediante la definición formal de derivada.

Primero rompemos el valor absoluto de la función.

$$f(x)=x^2-3|x|+2 \quad \rightarrow \quad f(x)=\begin{cases} x^2+3x+2 & si \quad x\leq 0 \\ x^2-3x+2 & si \quad x>0 \end{cases}$$

La función es continua en $x=0$ ya que:

$$\exists f(0)=2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=2=L$$

$$f(0)=2=L$$

Las derivadas laterales alrededor de $x=0$, aplicando la definición formal de derivada, resultan:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^2+3(0+h)+2-0^2-3\cdot 0-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0}(h+3)=3$$

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^2-3(0+h)+2-0^2+3\cdot 0-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-3h}{h}=\lim_{h\to 0}(h-3)=-3$$

Las derivadas laterales no coinciden. Por lo tanto, la función no es derivable en $x=0$.

19. Obtener a **y** b **para que** $f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos(x)+2x & si \quad x\leq 0 \\ a^2\cdot\ln(x+1)+\dfrac{b}{x+1} & si \quad x>0 \end{cases}$ **sea derivable en** $x=0$ **.**

En estos problemas de determinar dos parámetros en una función definida en dos trozos, **suele aparecer una condición al estudiar la continuidad y otra condición a estudiar la derivabilidad**. Con esas condiciones, podremos formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resolveremos.

Primero estudiamos la continuidad en $x=0$.

$$f(0)=a\cdot\cos(0)+2\cdot 0=a$$

$$L^-=\lim_{x\to 0^-}(a\cdot\cos(x)+2x)=a \quad , \quad L^+=\lim_{x\to 0^+}(a^2\cdot\ln(x+1)+\frac{b}{x+1})=b \;\rightarrow\; L^-=L^+ \;\rightarrow\; a=b$$

$f(0)=L \;\rightarrow\; a=b \;\rightarrow\; f(x)$ es continua en $x=0$ siempre que se cumpla $a=b$

Derivamos la función a trozos. Recuerda quitar el signo igual en el punto frontera, ya que eso es precisamente lo que queremos demostrar ahora: saber si es derivable en el punto frontera $x=0$.

$$f'(x)=\begin{cases} -a\cdot sen(x)+2 & si \quad x<0 \\ \dfrac{a^2}{x+1}-\dfrac{b}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$$

La función será derivable en $x=0$ si coinciden las derivadas laterales.

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(-a\cdot sen(x)+2)=2 \quad , \quad f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(\frac{a^2}{x+1}-\frac{b}{(x+1)^2})=a^2-b \;\rightarrow\; 2=a^2-b$$

$f(x)$ es derivable en $x=0$ si se cumple la condición $2=a^2-b$

Llegamos al siguiente sistema.

$\begin{cases} a=b \\ a^2-b=2 \end{cases}$ → Sustituimos la primera ecuación en la segunda → $a^2-a-2=0$

Resolvemos → $a=-1$, $a=2$ → Las soluciones que garantizan la derivabilidad en $x=0$ son: $a=-1$, $b=-1$ y $a=2$, $b=2$