Sección 3.4

3.

Ya que la masa de 3 kg es estirada 20 cm = 0.2 mt por una fuerza de 15 N, podemos determinar la constante de elasticidad del resorte $K = \frac{F}{x} = \frac{15N}{0.2mt} = 75 \frac{N}{mt}$

y como el movimiento es libre y sin fuerza de amortiguamiento, ya conocemos que la elongación del resorte x(t) viene dada por:

$$x(t) = x_0 \cos(w_0 t) + \frac{v_0}{w_0} \operatorname{sen}(w_0 t)$$

donde la frecuencia es $w_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{75}{3}} \frac{rad}{seg} = 5 \frac{rad}{seg}$

y puesto que $x_0 = 0$ mt y $v_0 = -10 \frac{mt}{seg}$; tenemos que

$$x(t) = -2 \operatorname{sen}(5t)$$

concluyendo que la amplitud del movimiento es $c = 2$ m con un periodo $T = \frac{2\pi}{w_0}$ seg $= \frac{2\pi}{5}$ seg ≈ 1.25 seg

4.

a. Puesto que la masa de 250 gr = 0.25 kg esta es estirada 25 cm = 0.25 m por una fuerza de 9N, podemos encontrar la constante de elasticidad del resorte $K = \frac{F}{x} = \frac{9N}{0.25\,m} = 36 \frac{N}{m}$

y como el movimiento es libre y sin fuerza de amortiguamiento ya conocemos que la elongación del resorte x(t) esta dada por

$$x(t) = \frac{1}{w_0} \sqrt{x_0^2 w_0^2 + v_0^2} \cos(w_0(t - \delta))$$

donde la frecuencia angular es en este caso

$$w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{36}{0.25}} \frac{rad}{seg} = 12 \frac{rad}{seg}$$

y debido que $x_0 = 1$ mt y $v_0 = -5 \frac{mt}{seg}$; con lo cual el tiempo de retardo $\delta = \frac{d}{w_0} = \frac{1}{w_0}\left[2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{w_0 x_0}\right)\right]$ pues $x > 0$ y $v_0 > 0$

entonces así $\delta = 0.49$ seg

Con lo cual $x(t) = \frac{13}{12} \cos(12(t - 0.491))$

$$x(t) = \frac{13}{12} \cos(12t - 5.88)$$

b. La amplitud del movimiento es $c = \frac{13}{12}$ mt y el periodo del movimiento es

$$T = \frac{2\pi}{w_0} \text{ seg} = \frac{\pi}{6} \text{ seg} \approx 0.52 \text{ seg}$$

13.

a Iniciamos calculando el coeficiente de amortiguamiento critico C_{cr}

$$C_{cr} = \sqrt{4km} = 4\sqrt{5} \ \frac{kg}{seg}$$

$\Rightarrow$ Con la cual el movimiento es sobreamortiguado pues la elongación del resorte vendra dada por

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{p^2 - w_0^2}} \left[(V_0 - X_0 r_2) e^{r_1 t} + (X_0 r_1 - V_0) e^{r_2 t} \right]$$

donde $r_1 = -p + \sqrt{p^2 - w_0^2}$

$$r_2 = -p - \sqrt{p^2 - w_0^2}$$

con $p = \frac{c}{2m}$ y $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Son las raices (reales y distintas) de la ecuacion auxiliar asociada
en nuestro caso, $p = \frac{9}{20} \frac{rad}{seg}$ y $w_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{rad}{seg}$

Asi que $r_1 = -0.4 \text{ seg}^{-1}$ y $r_2 = -0.5 \text{ seg}^{-1}$

pues $x(0) = x_0 = 0 mt$ y $x'(0) = V_0 = 5 \frac{mt}{seg}$

tenemos que $x(t) = 10 \left[5e^{-0.4t} - 5e^{-0.5t} \right]$ mt

$$x(t) = 50 \left[e^{-0.4t} - e^{-0.5t} \right] \text{ mt}$$

b. Debemos encontrar el valor de $x_{max}(t)$:

$$x'(t) = 50\left[-0.4e^{-0.4t} + 0.5e^{-0.5t}\right] = 0$$

$$\rightarrow -0.4e^{-0.4t} + 0.5e^{-0.5t} = 0$$

$$0.5e^{-0.5t} = 0.4e^{-0.4t}$$

$$\frac{5}{4} = e^{0.1t}$$

$$\ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln e^{0.1t} = 0.1t$$

$$\rightarrow t \approx 2.23 \text{ seg}$$

Debido a que $x''(t) = 50\left[0.16e^{-0.4t} - 0.25e^{-0.5t}\right]$

y $x''(2.23) < 0$ concluimos que la masa se desplaza hacia la derecha con amplitud maxima $x_{max} = x(2.23) \approx 4.09$ mt y luego de 2.23 seg aproximadamente despues del inicio de su movimiento

14.

a. Debemos empezar calculando el coeficiente de amortiguamiento critico C_{cr}

$$C_{cr} = \sqrt{4km} \approx 150.33 \frac{kg}{seg}$$

tenemos que el movimiento es subamortiguado pues $C < C_{cr}$; sabemos entonces que la elongacion del resorte esta dada por

$$x(t) = \frac{1}{w_1}\sqrt{x_0^2 w_1^2 + (V_0 + \rho x_0)^2}\, e^{-\rho t} \cdot \cos(w_1(t - \delta_1))$$

en donde $x(0) = x_0 = 20$; $x'(0) = V_0 = 4$; $\rho = \frac{c}{2m} = \frac{1}{5}$;

$w_0^2 = \frac{k}{M} = 9.04$; $w_1 = \sqrt{w_0^2 - \rho^2} = 3$ y donde:

$$\delta_1 = \frac{1}{w_1}\tan^{-1}\left(\frac{V_0 + \rho x_0}{w_1 x_0}\right) \approx 0.21 \text{ seg}$$ con lo cual

obtenemos:

$$x(t) = 25e^{-\frac{1}{5}t}\cos(3(t - 0.21)) = 25e^{-0.2t}\cos$$

22.

→ Podemos hallar $K = \frac{F}{x} = \frac{12\ lb}{6\ in} = \frac{12\ lb}{6 \cdot \frac{1}{12}\ ft} = 24\ \frac{lb}{ft}$

tambien $c = 3\ \frac{lb}{ft/seg}$, y como hay amortiguamiento, encontramos el coeficiente de amortiguamiento critico

$$C_{cr} = \sqrt{4\ Km} = 6\ \frac{lb}{ft/seg}$$

Entonces podemos concluir que $c < C_{cr}$, por lo tanto el movimiento es subamortiguado; con lo cual tenemos que la ecuación de movimiento esta dada por

$$x(t) = \frac{1}{\omega_1}\sqrt{x_0^2\,\omega_1^2 + (V_0 + p x_0)^2}\ e^{-pt} \cdot \cos(\omega_1(t - \delta_1))$$

en donde $x(0) = x_0 = 1\ ft$; $x'(0) = V_0 = 0\ \frac{ft}{seg}$; $p = \frac{c}{2m} = 4\ \frac{rad}{seg}$;

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}\ \frac{rad}{seg} = 8\ \frac{rad}{seg} \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = \sqrt{48}\ \frac{rad}{seg} =$

$4\sqrt{3}\ \frac{rad}{seg}$ es la frecuencia del movimiento subamortiguado y donde $\delta_1 = \frac{1}{\omega_1}\tan^{-1}\left(\frac{V_0 + p x_0}{\omega_1 x_0}\right) = \frac{1}{4\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{6}\ seg$

asi que $x(t) = \frac{1}{4\sqrt{3}}\, 8 e^{-4t} \cos\left(4\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{4\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$$x(t) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\ e^{-4t} \cos(4\sqrt{3}t - \pi/6)$$

Por lo cual la amplitud variante con el tiempo es $A = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ y el angulo fase $\alpha_1\ \frac{\pi}{6}$ rad

23.

a.

Nos dan que $m = 100$ slugs $\rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{100}}$ y como

$\omega_0 = 80 \frac{ciclo}{min} = 80 \frac{2\pi rad}{60 seg} = \frac{8\pi}{3} \frac{rad}{seg}$

$\rightarrow \omega_0^2 = \frac{K}{1000}$

$100\left(\frac{8\pi}{3}\right)^2 = K \rightarrow K \approx 7018 \frac{slug}{seg} = 7018 \frac{lb}{ft/seg} \cdot \frac{1}{seg} = 7018 \frac{lb}{ft/seg}$

b.

Ya que $\omega_1 = 78 \frac{ciclos}{min} = 78 \cdot \frac{2\pi}{60 seg} = \frac{13\pi}{5} \frac{rad}{seg}$

y como $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = \frac{13\pi}{5} \frac{rad}{seg}$

$\rightarrow \omega_0^2 - p^2 = \left(\frac{13\pi}{5}\right)^2$

$\left(\frac{8\pi}{3}\right)^2 - \left(\frac{13\pi}{5}\right)^2 = p^2$

$\rightarrow p \approx 1.86$ rad/seg

→ Estamos buscando para que tiempo la amplitud variante en el tiempo del movimiento subamortiguado; tendría variaciones de 1% del valor inicial en $t = 0$

$Ce^{-pt} = \frac{1}{100} C$

$\rightarrow e^{-pt} = \frac{1}{100} \rightarrow \ln e^{-pt} = \ln\left(\frac{1}{100}\right)$

$-pt = \ln\left(\frac{1}{100}\right)$

$t = -\frac{1}{p} \ln\left(\frac{1}{100}\right)$ seg

$t \approx 2.47$ seg