Teoría – Tema 6

Teoría - 16 - Aplicar inversa para resolver ecuaciones matriciales

Matriz considerada como incógnita

Si todos los coeficientes de una matriz X son incógnitas desconocidas, podemos considerar esa matriz como una incógnita en la ecuación matricial:

$$A\cdot X=B$$

Donde A y B son matrices de coeficientes conocidos, y siendo A una matriz multiplicable por X .

¿Podemos resolver estas ecuaciones matriciales aplicando matriz inversa? Sí es posible. Siempre y cuando la matriz sobre la que debamos calcular inversa sea una matriz invertible. No olvides lo que hemos estudiado en apartados anteriores: si no puedo aplicar inversa, siempre me queda la opción de operar con los coeficientes de las matrices hasta llegar a una igualdad de matrices donde podamos igualar coeficiente a coeficiente.

Sea $A\cdot X=B$. Despejamos la matriz X (recuerda que el cociente de matrices no está definido):

$$A\cdot X=B \quad\rightarrow\quad A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \quad\rightarrow\quad I\cdot X=A^{-1}\cdot B \quad\rightarrow\quad X=A^{-1}\cdot B$$

Donde hemos aplicado que, si existe la inversa de una matriz, el producto $A^{-1}\cdot A=I$ es igual a la matriz identidad. Fíjate que hemos aplicado la matriz inversa A^{-1} por la izquierda de la matriz A , y esto implica que A^{-1} también se aplica por la izquierda de la matriz B (ya que el producto de matrices no es conmutativo).

Ejemplo 1 resuelto

Resolver $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & -2\end{pmatrix}$ **.**

Donde la inversa de $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ resulta $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & -2\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & -2\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{5}{2} & -2\end{pmatrix}$$

¿Y si no puedo aplicar matriz inversa para despejar X?

Recuerda lo que ya has estudiado: siempre queda la opción de operar con los coeficientes de las matrices y llegar a una igualdad de matrices, donde igualar coeficiente a coeficiente.

Sea, por ejemplo, la ecuación matricial $A\cdot X=C$.

Supongamos que A es una matriz $3x3$, mientras que A es una matriz columna $3x1$. Si la matriz A no admite inversa, podemos plantear el siguiente sistema:

$$A\cdot X=C \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{Bmatrix} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=c_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=c_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=c_3 \end{Bmatrix}$$

Y resolver el sistema para obtener los valores x,y,z de la matriz de incógnitas.