Wachstumsprozesse

Gerhard Egger

Wachstumsmodelle
GGB-Buch von Andreas Lindner
https://www.geogebra.org/m/wpkrb3gt

1. **Beschränktes Wachstum** (mündliche RP)

a. Definiere, was man unter exponentiellem, beschränktem und logistischem Wachstum in diskreten Modellen versteht!

b. Von einem Medikament wird eine Tagesdosis von 35 mg eingenommen.
Bis zur nächsten Einnahme werden 40 % abgebaut.
Erstelle eine Differenzengleichung und ermittle daraus die Sättigungsgrenze!

c. Stelle den Wachstumsprozess mittels einer Tabelle grafisch dar! (diskretes Modell)
Lege für den Abnahmefaktor einen Schieberegler an und demonstriere die Auswirkung von Änderungen!

$$x_{n+1} = x_n \cdot 0{,}6 + 35 \quad | -x_n$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= 35 - x_n \cdot 0{,}4 \\ &= 0{,}4 \cdot \left(\frac{35}{0{,}4} - x_n\right) \\ &= 0{,}4 \cdot (87{,}5 - x_n) \end{aligned}$$

$S = 87{,}5$ mg

Wachstumsprozesse

Im Folgenden werden Wachstumsmodelle betrachtet.

Die nachstehende Differenzengleichung beschreibt ein Wachstum.

$N_{t+1} - N_t = r \cdot (S - N_t)$

N_t ... Bestand zum Zeitpunkt t
r ... Wachstumskonstante, $r \in \mathbb{R}^+$
S ... (obere) Kapazitätsgrenze

a) Auf einem Kreuzfahrtschiff mit 2000 Passagieren erkranken ab dem Zeitpunkt $t = 0$, zu dem noch kein Passagier erkrankt ist, jeden Tag 5 % der noch nicht erkrankten Passagiere.
Dabei ist N_t die Anzahl der erkrankten Passagiere zum Zeitpunkt t mit t in Tagen.

1) Geben Sie eine Differenzengleichung für N_{t+1} an.

$N_{t+1} - N_t = 0{,}05 \cdot (2000 - N_t)$

2) Ermitteln Sie, nach wie vielen Tagen erstmals mehr als 25 % der Passagiere erkrankt sind.

a) Auf einem Kreuzfahrtschiff mit 2 000 Passagieren erkranken ab dem Zeitpunkt $t = 0$, zu dem noch kein Passagier erkrankt ist, jeden Tag 5 % der noch nicht erkrankten Passagiere.
Dabei ist N_t die Anzahl der erkrankten Passagiere zum Zeitpunkt t mit t in Tagen.

1) Geben Sie eine Differenzengleichung für N_{t+1} an.

$N_{t+1} - N_t = 0{,}05 \cdot (2000 - N_t)$

2) Ermitteln Sie, nach wie vielen Tagen erstmals mehr als 25 % der Passagiere erkrankt sind.

B2 =B1 + 0.05 (2000 - B1)

	A	B	C	D
1	0	0		
2	1	100		
3	2	195		
4	3	285.25		
5	4	370.99		
6	5	452.44		
7	6	529.82		
8	7	603.33		
9	8	673.16		

a) **Lösungserwartung:**

a1) $N_{t+1} - N_t = 0{,}05 \cdot (2000 - N_t)$ mit $N_0 = 0$

a2) mögliche Vorgehensweise:
$N_{t+1} = N_t + 0{,}05 \cdot (2000 - N_t) = 0{,}95 \cdot N_t + 100$
$\Rightarrow$ Für $N_0 = 0$ ist $N_6 > 500$.
Nach 6 Tagen sind erstmals mehr als 25 % der Passagiere erkrankt.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Punkt für eine richtige Differenzengleichung, wobei „$N_0 = 0$" nicht angegeben sein muss. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [5; 6]

b) Die Differenzengleichung $N_{t+1} - N_t = r \cdot (S - N_t)$ lässt sich in der Form $N_{t+1} = a \cdot N_t + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ darstellen.

1) Drücken Sie r und S durch a und b aus.

$$N_{t+1} - N_t = r \cdot (S - N_t) \quad | + N_t$$

$$N_{t+1} = r \cdot S - r \cdot N_t + N_t$$

$$N_{t+1} = r \cdot S - N_t \cdot (r - 1)$$

$$N_{t+1} = \underbrace{r \cdot S}_{b = r \cdot S} + N_t \cdot \underbrace{(1 - r)}_{a = 1 - r}$$

$$r = 1 - a$$

$$S = \frac{b}{r}$$

$$S = \frac{b}{1 - a}$$

b) Die Differenzengleichung $N_{t+1} - N_t = r \cdot (S - N_t)$ lässt sich in der Form $N_{t+1} = a \cdot N_t + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ darstellen.

Zur Entwicklung eines neuen Impfstoffs wird das Wachstum einer Bakterienkultur in einer Petrischale untersucht.

In der nachstehenden Tabelle ist der Inhalt N_t (in cm²) derjenigen Fläche angeführt, die von der Bakterienkultur zum Zeitpunkt t (in h) bedeckt wird.

t in h	N_t in cm²
0	5,00
1	9,80
2	14,41

$$N_{t+1} = a \cdot N_t + b$$
$$9{,}8 = a \cdot 5 + b$$
$$14{,}41 = a \cdot 9{,}8 + b$$

2) Ermitteln Sie a und b mithilfe der in der obigen Tabelle ang

1	{9.8=a 5+b,14.41=a 9.8+b} ✓ $\{9.8 = a \cdot 5 + b, 14.41 = a \cdot 9.8 + b\}$
2	{9.8 = a * 5 + b, 14.41 = a * 9.8 + b} NLöse: $\{a = 0.96, b = 5\}$

3. Fischfang

P0 = 2000
Wachstumsrate 5 %
Fangquote (am Ende jedes Jahres): 110

a. Berechne P1, P2, P3!

b. Erstelle ein rekursives Modell (GGB)!
Wie lange dauert es, bis die Population ausgestorben ist?

$P_{n+1} = P_n \cdot 1{,}05 - 110$

$P_0 = 2000$

$P_1 = 2000 \cdot 1{,}05 - 110 = 1990$

$P_2 = 1990 \cdot 1{,}05 - 110 = 1979{,}5 \approx 1980$

$P_3 = 1980 \cdot 1{,}05 - 110 = 1969$

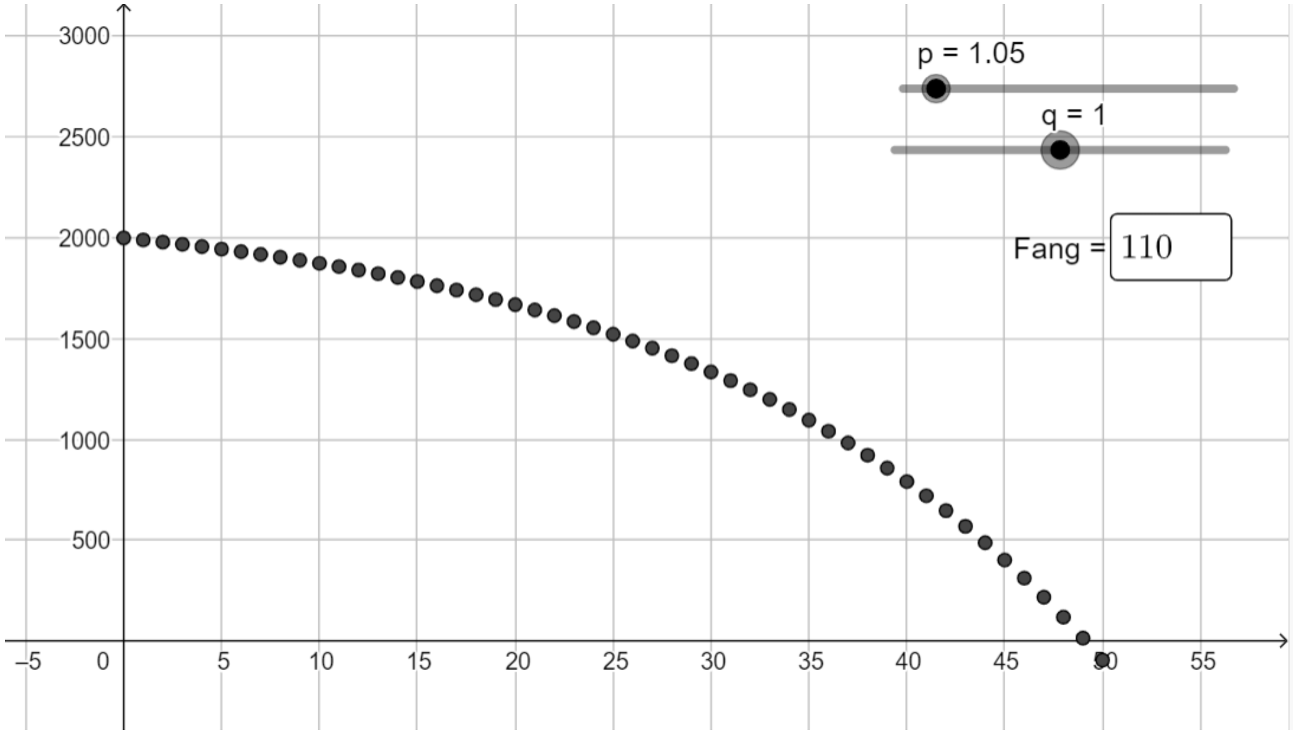
3. Fischfang

P0 = 2000
Wachstumsrate 5 %
Fangquote (am Ende jedes Jahres): 110

$$P_{n+1} = P_n \cdot 1{,}05 - 110$$

a. Berechne P1, P2, P3!

b. Erstelle ein rekursives Modell (GGB)!
Wie lange dauert es, bis die Population ausgestorben ist?



	A	B
38	37	983.72
39	38	922.9
40	39	859.05
41	40	792
42	41	721.6
43	42	647.68
44	43	570.07
45	44	488.57
46	45	403
47	46	313.15
48	47	218.81
49	48	119.75
50	49	15.73
51	50	-93.48
52		
53		

$$P_1 = P_0 \cdot 1{,}05 - 110$$

$$P_2 = P_0 \cdot 1{,}05^2 - 110 \cdot 1{,}05 - 110$$

$$P_3 = P_0 \cdot 1{,}05^3 - 110 \cdot 1{,}05^2 - 110 \cdot 1{,}05 - 110$$

$$\vdots$$

$$P_n = P_0 \cdot 1{,}05^n - 110 \cdot 1{,}05^{n-1} - 110 \cdot 1{,}05^{n-2} - \ldots - 110$$

$$= P_0 \cdot 1{,}05^n - 110 \cdot (1{,}05^{n-1} + 1{,}05^{n-2} + \ldots + 1)$$

$$P_n = 2000 \cdot 1{,}05^n - 110 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 1{,}05^i$$

$$P_n = 2000 \cdot 1{,}05^n - 110 \cdot \frac{1{,}05^n - 1}{1{,}05 - 1}$$

$$P_n = 2000 \cdot 1{,}05^n - 110 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 1{,}05^i$$

$$P_n = 2000 \cdot 1{,}05^n - 110 \cdot \frac{1{,}05^n - 1}{1{,}05 - 1}$$

1	P(n):=2000 1.05^n-110 Summe(1.05^i, i, 0, n-1) ✓ $P(n) := 2000 \cdot 1.05^n - 110 \sum_{i=0}^{n-1} 1.05^i$
2	P(10) ≈ 1874.22
3	P1(n):=2000 1.05^n-110 (1.05^n-1)/(1.05-1) ✓ $P1(n) := 2000 \cdot 1.05^n - 110 \cdot \frac{1.05^n - 1}{1.05 - 1}$
4	P1(10) ≈ 1874.22
5	P1(n)=0 Löse: $\left\{ n = \frac{-\ln(11)}{\ln(20) - \ln(21)} \right\}$
6	{n = (-ln(11)) / (ln(20) - ln(21))} ≈ $\{n = 49.15\}$

3. Fischfang

$P0 = 2000$
Wachstumsrate 5 %
Fangquote (am Ende jedes Jahres): 110

a. Berechne P1, P2, P3!

b. Erstelle ein rekursives Modell (GGB)!
Wie lange dauert es, bis die Population ausgestorben ist?

c. Erstelle ein explizites Modell!

d. Variante: Die Fangquote wächst ausgehend von 70 (am Ende des 1. Jahres) jährlich um 8%