

Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 1 - cómo y para qué definir determinantes

1. Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumple $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

El enunciado nos ofrece varias condiciones:

$$a+d=1$$

$$|X|=1 \rightarrow ad-bc=1$$

$$AX=XA \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales si sus coeficientes son iguales. Por lo tanto, obtenemos cuatro nuevas condiciones:

$$\begin{cases} -c=b \\ -d=-a \\ a=d \\ b=-c \end{cases} \rightarrow \text{Hay dos ecuaciones proporcionales, por lo que el sistema queda} \rightarrow \begin{cases} a=d \\ b=-c \end{cases}$$

Por lo tanto: Si $a+d=1$ y $a=d \rightarrow a=\frac{1}{2}$, $d=\frac{1}{2}$

Si $ad-bc=1$ y $b=-c \rightarrow \frac{1}{4}+b^2=1 \rightarrow b=\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$

En consecuencia, tenemos dos matrices que cumplen las condiciones:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Calcula los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = \frac{1}{2} - 6 = \frac{-11}{2}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = 2 - 1 - 12 - (3\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2}) = -11 - (\sqrt{2} - 2) = -9 - \sqrt{2}$$

3. Resuelve.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & x & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & x & 1/3 \\ 0 & 3 & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Aplicando la regla de Sarrus:}$$

$$x^2 + 0 - 3 - (0 + 1 + 0) = 0; x^2 - 3 - 1 = 0; x^2 - 4 = 0; x^2 = 4; x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Aplicando la regla de Sarrus:}$$

$$3x^2 + 25x + 45 - (5x^2 + 9x + 75) = 0; 3x^2 - 5x^2 + 25x - 9x + 45 - 75 = 0; -2x^2 + 16x - 30 = 0$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16x^2 - (4 * (-2)) * (-30))}}{2 * (-2)}; x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 240}}{-4}; x = \frac{-16 \pm \sqrt{16}}{-4}; x = \frac{-16 \pm 4}{-4}$$

$$x = \left\{ \begin{array}{c} \frac{-16+4}{-4} \\ \frac{-16-4}{-4} \end{array} \right\}; x = \left\{ \begin{array}{c} \frac{-12}{-4} \\ \frac{-20}{-4} \end{array} \right\}; \begin{cases} x=3 \\ x=5 \end{cases} \rightarrow x=3, x=5$$