

Hoofdstuk I: veelterm(en)(functies)

www.karelappeltans.be

July 3, 2023

Contents

1	De rechte, veeltermfunctie van graad 1	2
2	De parabool, veeltermfunctie van graad 2	3
3	De elementaire functie $f(x) = x^3$, veeltermfunctie van graad 3	3
4	Willekeurige veeltermfuncties	4
4.1	domein en gedrag bij de grenzen van het domein	4
4.2	nulwaarden, snijpunten met de x-as	5
4.2.1	stappenplan	5
4.2.2	veelterm in productvorm: ontbinding in factoren	7
4.3	nulwaarden en tekentabel	8
4.3.1	tekentabel opstellen	8
4.3.2	snijpunten zoeken	9
4.3.3	ongelijkheden	9
4.4	functievoorschriften opstellen	10
4.5	symmetrie	10
4.6	Algemene notatie	11
5	Euclidische deling	11
6	Toepassingen	12
7	Transformaties	12
8	Absolute waarde	13
9	Oefeningen	13
10	taak	15

1 De rechte, veeltermfunctie van graad 1

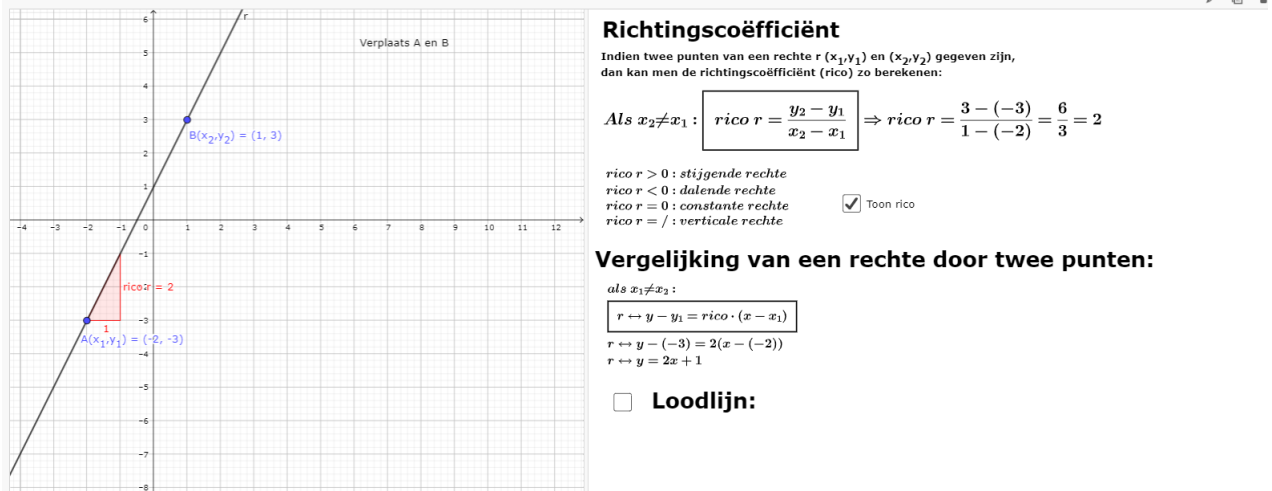


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/V6dh2XPP>

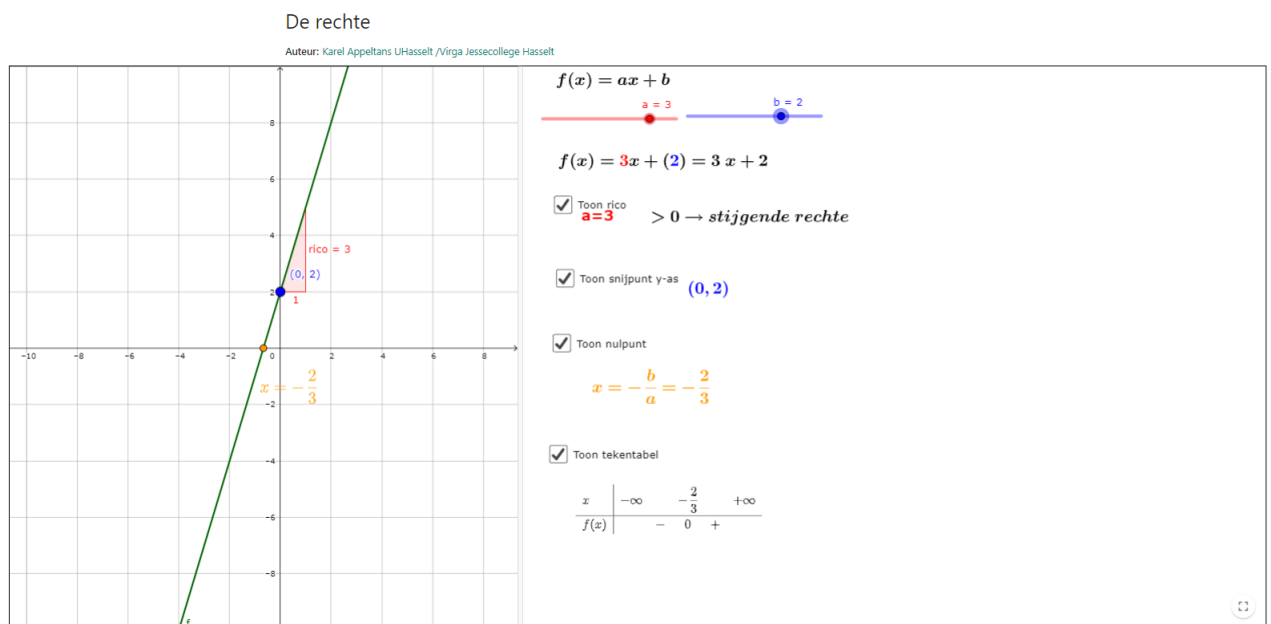


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/TF8KaYf2>

2 De parabool, veeltermfunctie van graad 2

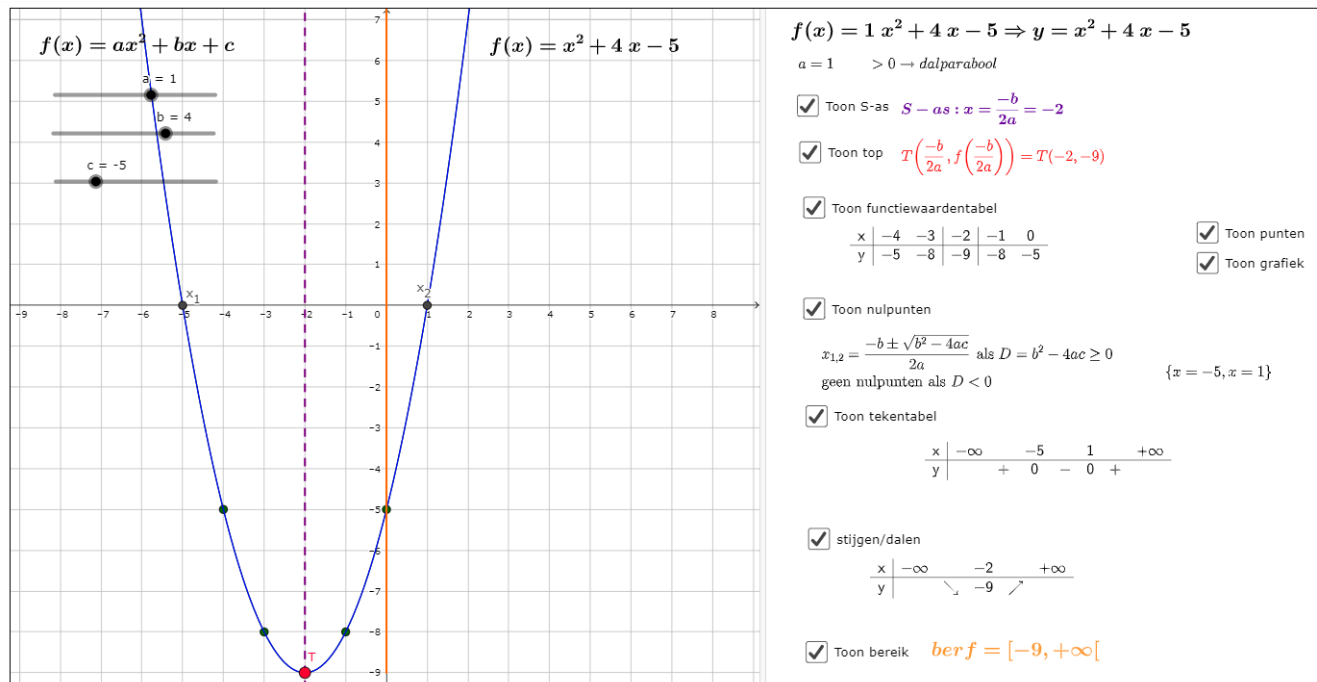


Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/uB6aYGJp>

3 De elementaire functie $f(x) = x^3$, veeltermfunctie van graad 3

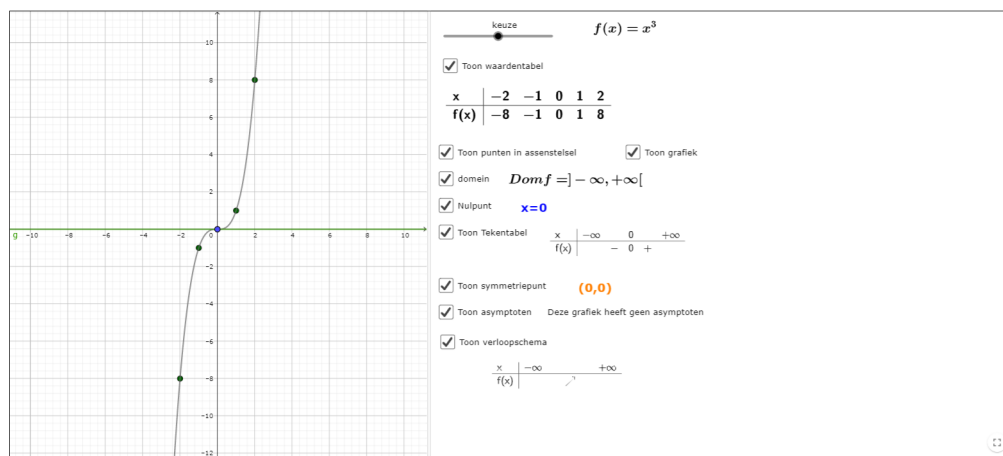


Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/pqvnzptk>

4 Willekeurige veeltermfuncties

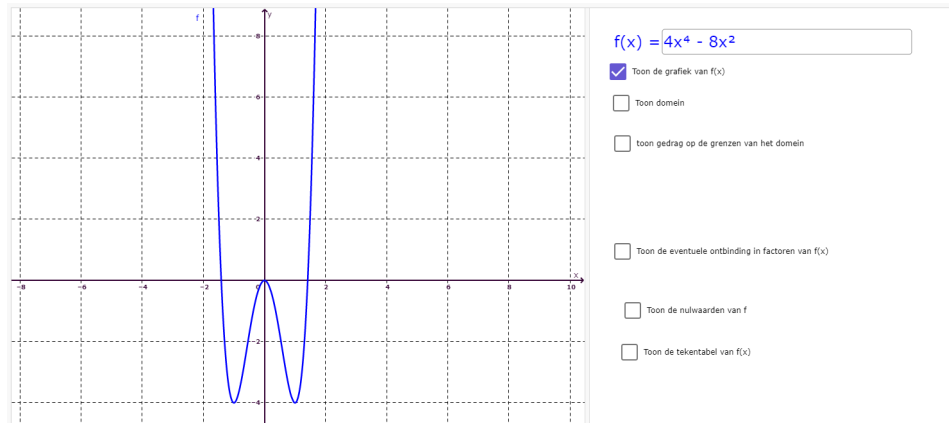
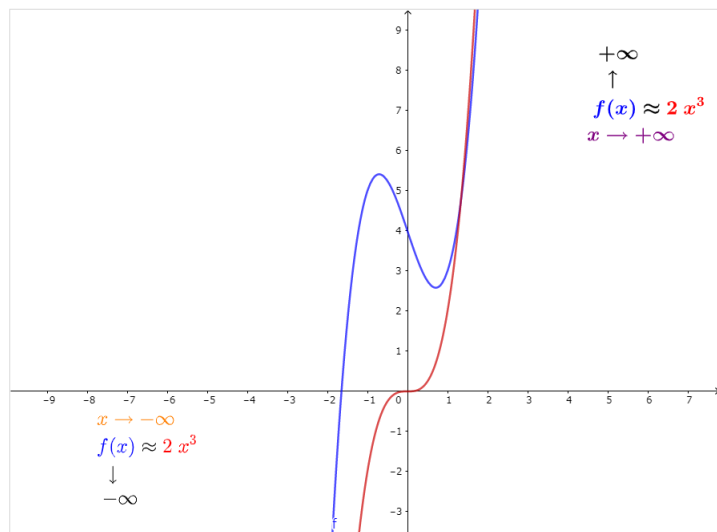


Figure 5: <https://www.geogebra.org/material/edit/id/uzmbrnee>

4.1 domein en gedrag bij de grenzen van het domein

Bij veeltermen altijd $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{hoogste graadsterm}$$



Limieten naar $\pm\infty$ bij veeltermfuncties

$$f(x) = 2x^3 - 3x + 4$$

☒ toon alleen hoogste graadsterm

☒ Toon algebraïsche notatie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 3x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = 2(+\infty)^3 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 3x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = 2(-\infty)^3 = -\infty$$

Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee>

4.2 nulwaarden, snijpunten met de x-as

4.2.1 stappenplan

Stappenplan

stap 1: herschrijf de vergelijking naar ...=0

stap 2: een gemeenschappelijke factor eerst afzonderen

stap 3: als de onbekende slechts 1 keer voorkomt, moet men deze afzonderen

stap 4: als de graad van de onbekende 2 is, kan men

stap 4a: een merkwaardig product gebruiken:

stap 4b: de abc-formule gebruiken

stap 5: als de graad van de onbekende meer dan 2 is, kan men

stap 5a: een merkwaardig product gebruiken

stap 5b: het rekenschema van Horner gebruiken

Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

stap 4b: de abc-formule

Nieuwe vergelijking

$$3x^2 - 15x - 15 = 0$$

Gebruik de abc-formule om de oplossingen van deze vierkantsvergelijkingen te bekomen. Vereenvoudig zo ver mogelijk

$$D = b^2 - 4ac$$

Als $D \geq 0$ dan $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Als $D < 0$ geen reële oplossingen

Je kan hiernaast jouw oplossingen achteraf controleren!

☒ Toon exacte oplossing (als $D > 0$, of $D = 0$)

$$\frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}$$
$$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$$

Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

Nulpunten/oplossingen/wortels kwadratische vergelijking
m.b.v. som en product van wortels
Vb : los op : $x^2 + 5x + 4 = 0$
$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

dit geeft hier: $s = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5$
$$p = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

Zoek twee getallen waarvan het product 4 is en de som -5 is

dit geeft :

$$x_1 = -1 \text{ en } x_2 = -4$$

want $(-1) \cdot (-4) = 4$ en $(-1) + (-4) = -5$

Los op: $x^2 + 7x + 10 =$ nieuwe opgave

☒ tip 1 ☒ tip 2

$$p = \frac{c}{a} = 10, \quad (-2) \cdot (-5) = 10 \text{ en } (-2) + (-5) = -7.$$
$$s = -\frac{b}{a} = -7.$$

☒ antwoord

$$x_1 = -5 \quad \vee \quad x_2 = -2$$

Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

Stap 4a&5a: een merkwaardig product gebruiken

Ontbinding in factoren:

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2 = (A + B)(A + B)$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2 = (A - B)(A - B)$$

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$$

Nieuwe opgave

 $25x^2 - 16$

Toon oplossing

 $25x^2 - 16 = (5x - 4)(5x + 4)$

↺ ↻ ↷

Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

Stap 3

Regel van Horner

als strategie bij ontbinding in factoren met factor $x-a$, $a \in \mathbb{Z}$

Voorbeeld:
bepaal de ontbinding in factoren van $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$
Bekijk de delers van de constante term: -4
delers -4 = {+1, -1, +2, -2, +4, -4}
Zoek een deler die 0 als beeld heeft,
 $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -2 \neq 0$
 $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$
 $P(x) = 1x^3 + 3x^2 + 0x - 4 \quad d(x) = x - (1)$

1	3	0	-4
	+	+	+
(1) · 1 = 1	4	4	0
1	4	4	0

$Q(x) = 1x^2 + 4x + 4$
 $r(x) = 0$
 $P(x) = d(x) \cdot q(x) + r$
 $x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$

Q(x) kan eventueel via opnieuw Horner of via andere strategieën verder ontbonden worden

Willekeurig:
Vul in: $P(x) = x^3 + 1$

Delers van 1 zijn {1, -1}
Zoek een deler die 0 als beeld heeft:
 $P(-1) = 0 \quad -1 \text{ is een juiste kandidaat!}$

1	0	0	1
-1	-1	1	-1
1	-1	1	0

Quotiënt $Q(x) = x^2 - x + 1$
rest $r = 0$
 $x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$

Figure 11: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

Voorbeelden:

$x^2 + 5x + 7 = x + 3$ $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \text{ (stap 1)}$ $\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \text{ (stap 4a)}$ $\Leftrightarrow (x + 2)(x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow x = -2 \text{ (2x)}$	$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = 0 \text{ via horner}$ $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ of } x^2 + 4x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ of } (x + 2)^2 = 0$ $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ of } x = -2 \text{ of } x = -2$	$12x^5 - 26x^4 + 2x^3 + 4x^2 = 0$ $\Leftrightarrow 2x^2(6x^3 - 13x^2 + x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow 2x^2 = 0 \text{ of } 6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$ $x^2 = \frac{0}{2} = 0!$ $x = \pm\sqrt{0} = 0(2x)$
$4x^3 - 108 = 0$ $\Leftrightarrow x^3 = \frac{108}{4} = 27$ $\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$	$(2 - x)(1 + x)^2 x = 0$ $\Leftrightarrow 2 - x = 0 \text{ of } 1 + x = 0 \text{ (2x) of } x = 0$ $\Leftrightarrow x = 2 \text{ of } x = -1(2x) \text{ of } x = 0$	$\text{of } (x - 2)(6x^2 - x - 1) = 0 \text{ (via Horner)}$ $x - 2 = 0 \text{ of } 6x^2 - x - 1 = 0$ $x = 2$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{2} \\ \searrow -\frac{1}{3} \end{matrix}$

Figure 12: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

4.2.2 veelterm in productvorm: ontbinding in factoren

Elke veelterm(functie) kan ontbonden worden in factoren van de 1ste graad en/of factoren van de tweede graad met een negatieve discriminant.

Werkwijze

Bij ontbinding in factoren wil men een veelterm schrijven als product van meerdere factoren

stap 1: gemeenschappelijke factoren afzonderen

stap 2: bij tweede graad

stap 2a: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

stap 2b: merkwaardig product

stap 3: bij graad 3 en hoger: Horner

Probeer altijd elke term zover mogelijk te ontbinden!

Figure 13: <https://www.geogebra.org/m/jnqy9wsd>

stap 2a

Ontbinding van de drieterm: $-2x^2 + 3x - 1$

Nieuwe opgave

☒ toon oplossing

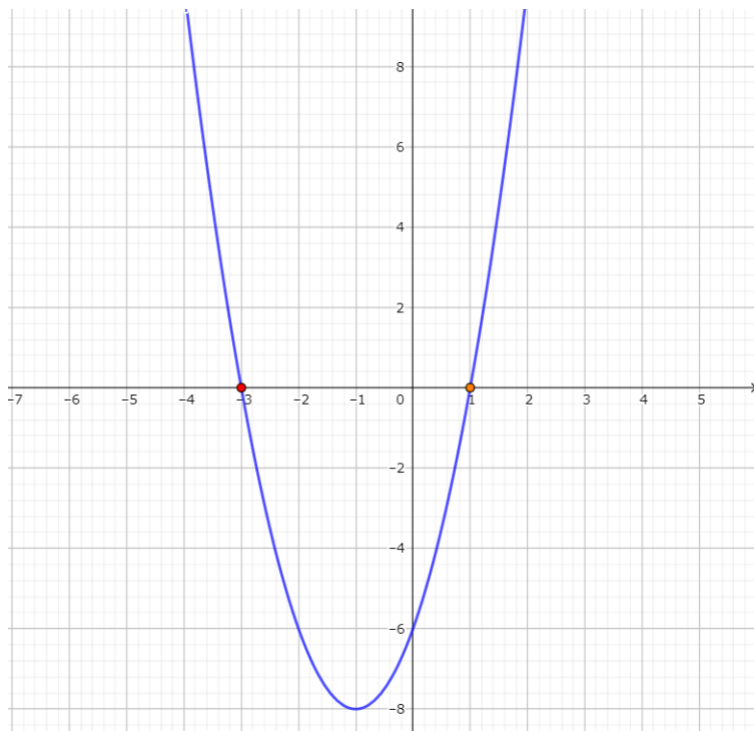
$x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = 1$

$$-2x^2 + 3x - 1 = -2\left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right) \cdot (x - (1))$$

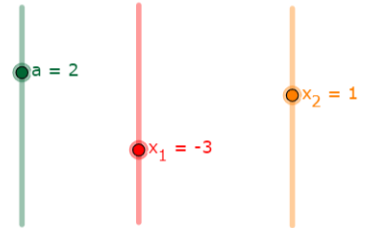
$$-2x^2 + 3x - 1 = -(x - 1)(2x - 1)$$

Figure 14: <https://www.geogebra.org/m/jnqy9wsd>



De parabool vorm3:

$f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$
met x_1 en x_2 de nulwaarden



$$f(x) = 2(x - (-3))(x - (1))$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x + 3)(x - 1) \\ &= 2x^2 + 4x - 6 \end{aligned}$$

Figure 15: <https://www.geogebra.org/m/uB6aYGJp>

4.3 nulwaarden en tekentabel

4.3.1 tekentabel opstellen

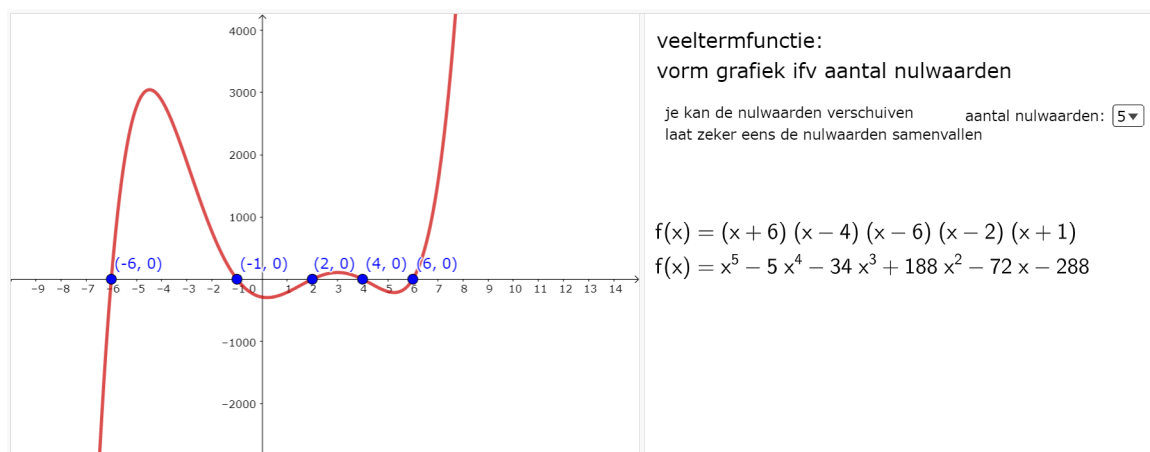


Figure 16: <https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee>

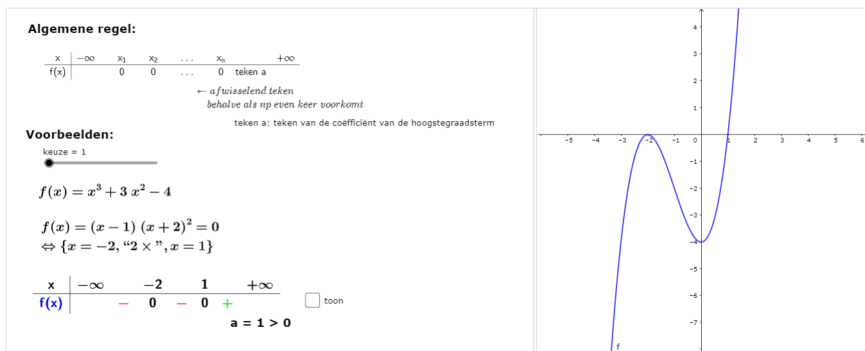


Figure 17: <https://www.geogebra.org/m/jtap9fqz>

4.3.2 snijpunten zoeken

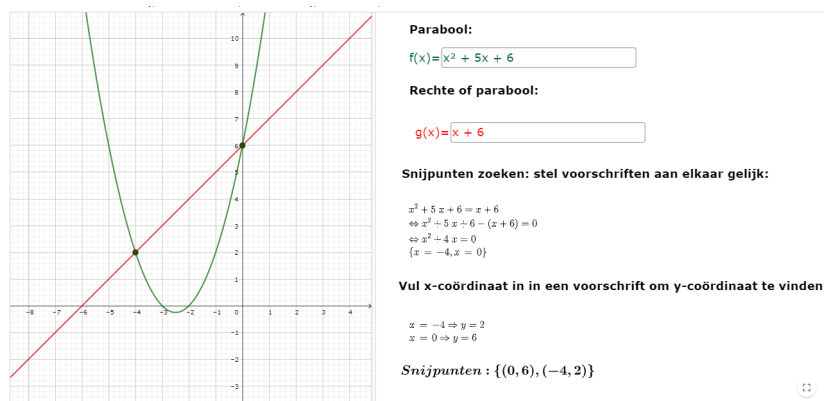


Figure 18: <https://www.geogebra.org/m/nWmmAaSg>

4.3.3 ongelijkheden

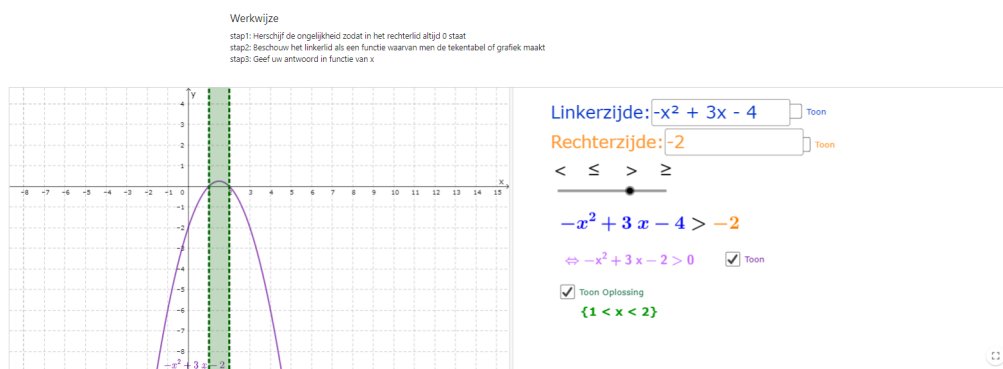


Figure 19: <https://www.geogebra.org/m/dR7jSdKn>

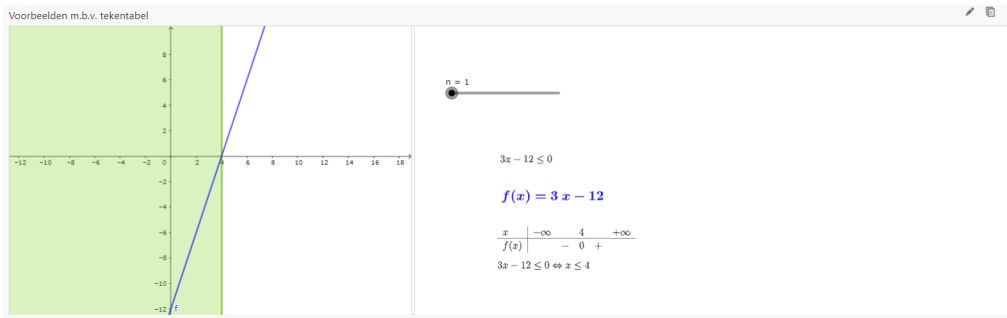


Figure 20: <https://www.geogebra.org/m/dR7jSdKt>

4.4 functievoorschriften opstellen

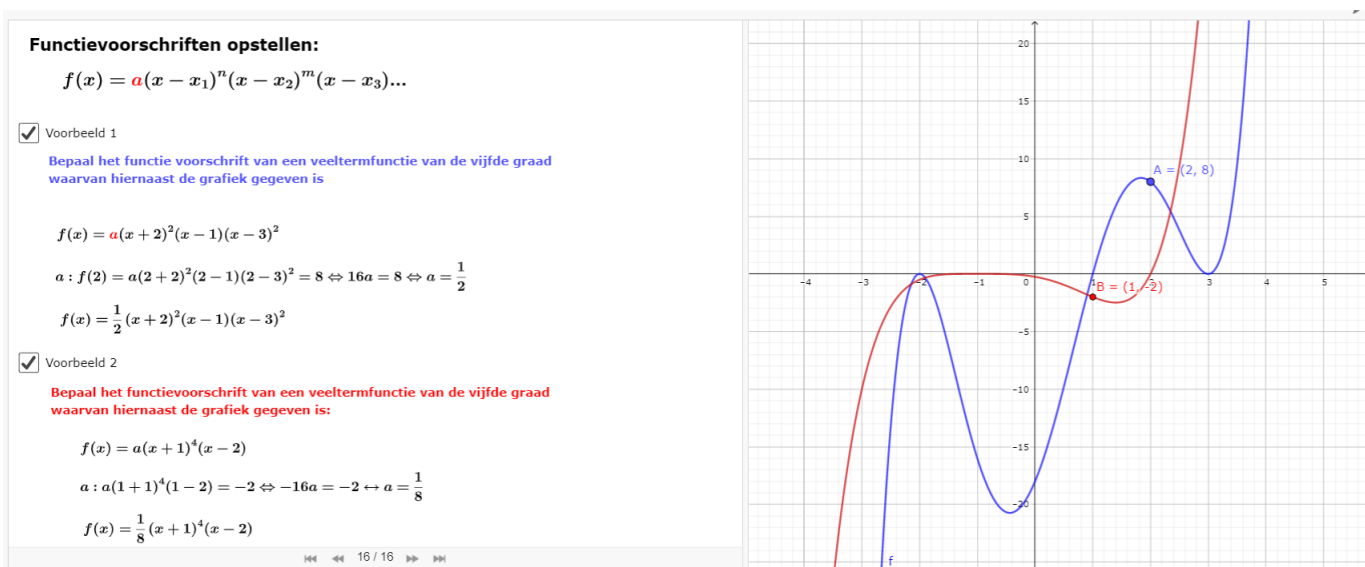


Figure 21: <https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee>

4.5 symmetrie

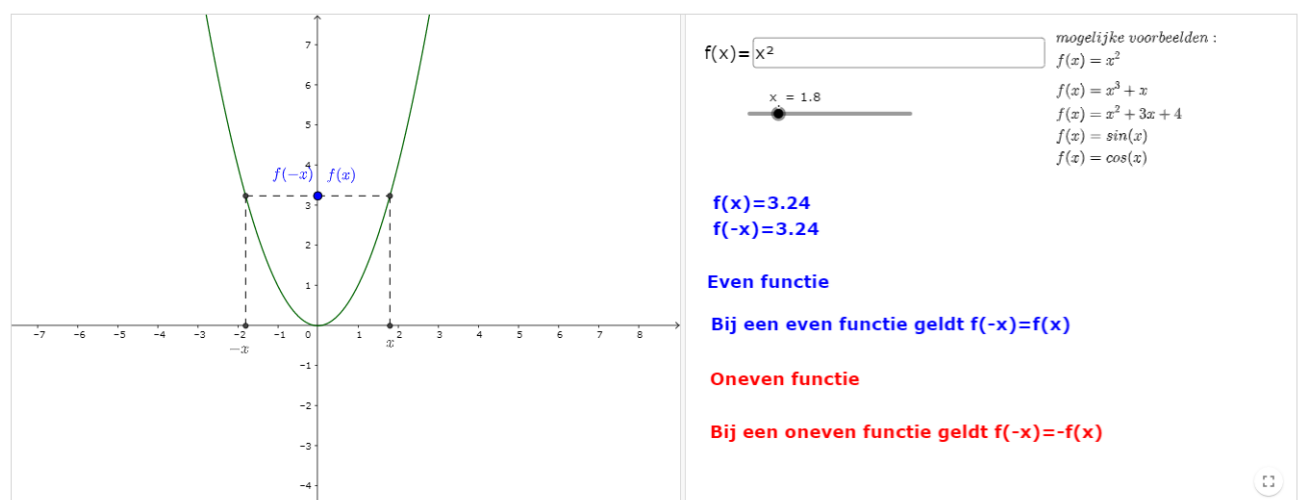


Figure 22: <https://www.geogebra.org/m/kve5bgdv>

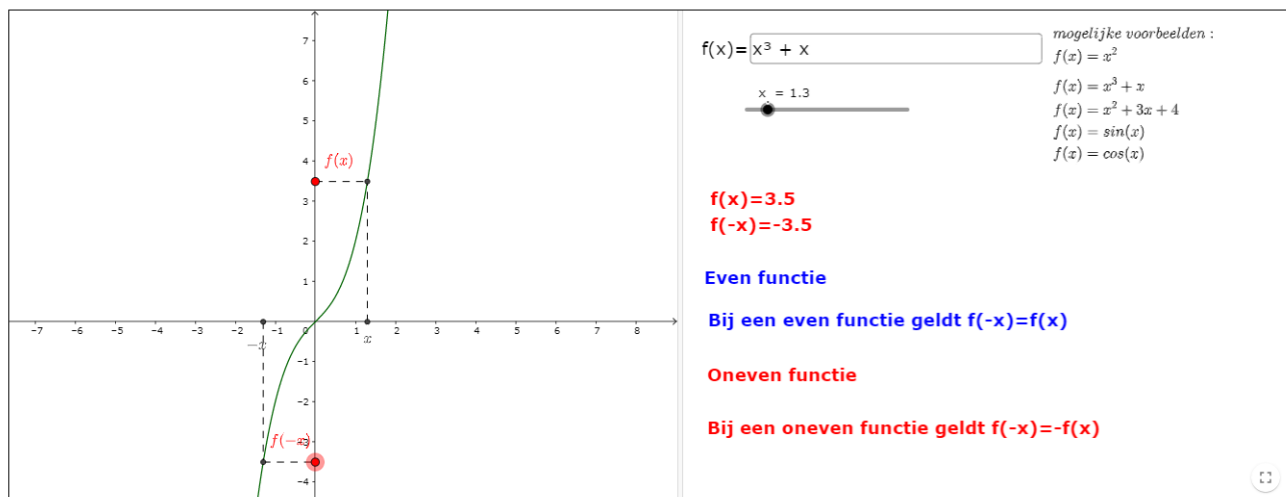


Figure 23: <https://www.geogebra.org/m/kve5bgdv>

4.6 Algemene notatie

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

5 Euclidische deling

$ \begin{array}{r} 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 3 \\ -(3x^4 - 9x^3 + 3x^2) \\ \hline 4x^3 - 2x^2 - 7x \\ -(4x^3 - 12x^2 + 4x) \\ \hline 10x^2 - 11x + 3 \\ -(10x^2 - 30x + 10) \\ \hline 19x - 7 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^2 - 3x + 1 \\ \hline 3x^2 + 4x + 10 \end{array} $
$ \begin{array}{r} 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 3 \\ -(3x^4 - 9x^3 + 3x^2) \\ \hline 4x^3 - 2x^2 - 7x \\ -(4x^3 - 12x^2 + 4x) \\ \hline 10x^2 - 11x + 3 \\ -(10x^2 - 30x + 10) \\ \hline 19x - 7 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 4 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline 4x^2 \\ -(4x^2 - 4x) \\ \hline 4x - 4 \\ -(4x - 4) \\ \hline 0 \end{array} $
$ \begin{aligned} q(x) &= 3x^2 + 4x + 10 \\ r(x) &= 19x - 7 \\ 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 3 &= (x^2 - 3x + 1)(3x^2 + 4x + 10) + (19x - 7) \end{aligned} $	$ \begin{aligned} q(x) &= x^2 + 4x + 4 \\ r(x) &= 0 \\ x^3 + 3x^2 - 4 &= (x - 1)(x^2 + 4x + 4) \end{aligned} $

$D(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x) \text{ met } gr(r(x)) < gr(d(x))$

Figure 24: <https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee>

6 Toepassingen

Toepassing veeltermfuncties

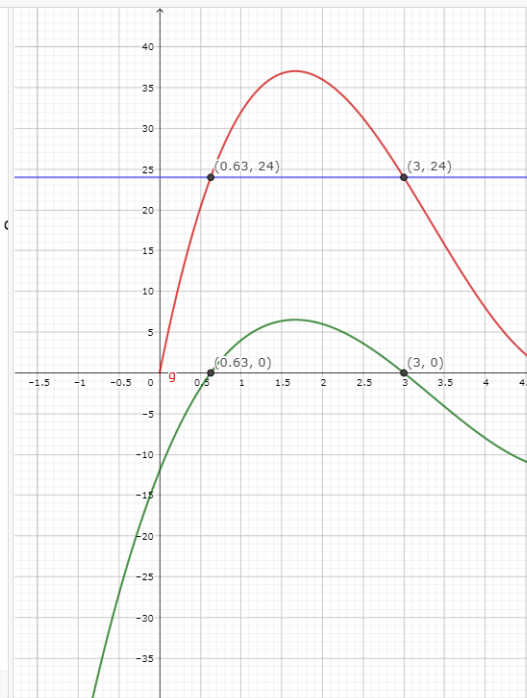
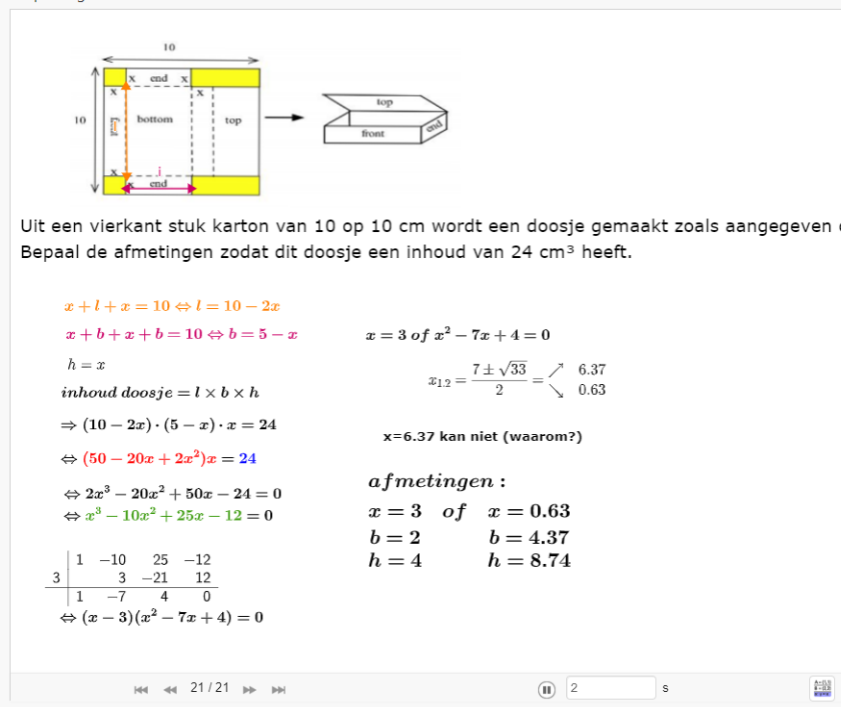


Figure 25: <https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee>

7 Transformaties

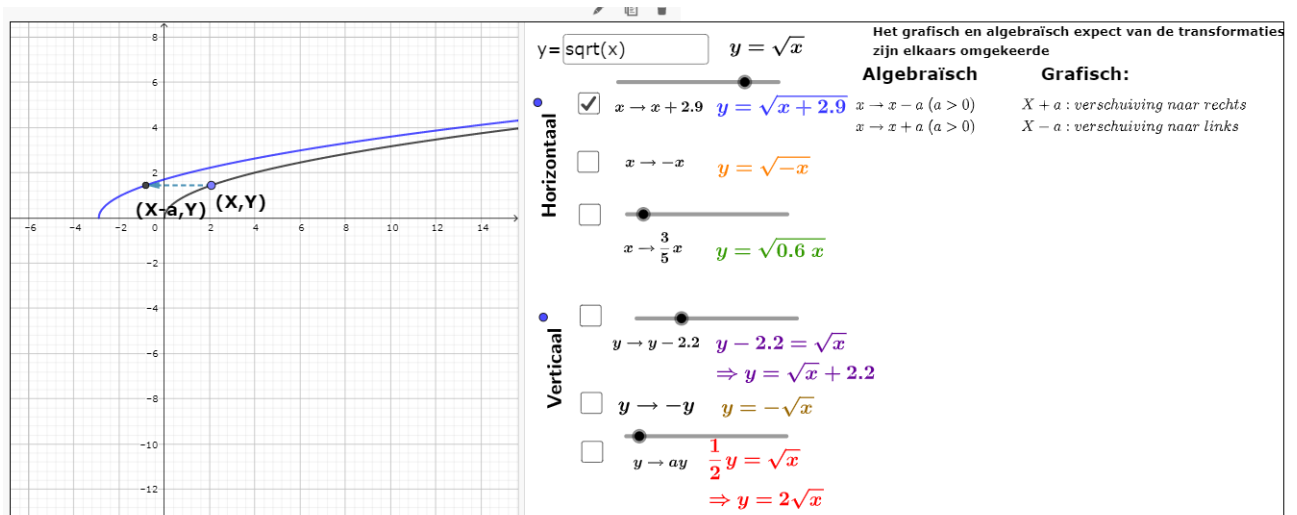


Figure 26: <https://www.geogebra.org/m/mq5zh8t>

Overzicht

Horizontaal

Verschuiving: vervang "x" door "(x-c)"; $c > 0$ verschuiving naar rechts, $c < 0$ naar links.

Spiegeling om de y-as: vervang "x" door "-x"

Uitrekking/inkrimping met factor $\frac{1}{b}$: vervang "x" door "(bx)"

Verticaal

Verschuiving: vervang "y" door "(y-d)"; $d > 0$ naar boven, $d < 0$ naar beneden.

Spiegeling om de x-as: vervang "y" door "-y"

Uitrekking/inkrimping met factor a: vervang "y" door " $\frac{y}{a}$ "

8 Absolute waarde



Figure 27: <https://www.geogebra.org/m/bg86qmsa>

9 Oefeningen

- Bepaal de vergelijking van de rechte die
 - door het punt $(-4,3)$ gaat en parallel ligt aan de lijn $x + 4y = 6$.
 - door het punt $(3,3)$ gaat en loodrecht staat op de lijn $x - 3y = 10$.
- de functie $y = f(x) = -x^2 + px - 5$ heeft een maximum voor $x = 1$. Bereken p en de maximale functiewaarde
- De functie $y = f(x) = px^2 + 4x + p$ heeft een maximum. De maximale functiewaarde is 3. Bereken p.
- Ontbind in factoren
 - $49 - x^2$
 - $5x^3 - 4x^2 - 8x + 7$
 - $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$
 - $x^3 - 6x^2 + 9x$
- Los op
 - $4(x - 2) = 3x - 7(2x - 3)$
 - $2(x - 3) + x < 5(x - 1) + 2$
 - $-9x^2 + 12x - 4 = 0$
 - $x^2 - 5x + 6 = 0$
 - $2x^2 - 7x + 6 = 0$
 - $2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 28x - 12 = 0$
 - $x^4 - 1 = 0$
 - $4x^2 + 2x \leq 20$
 - $(x - 3)^2 + (x - 1)^2 = 2$

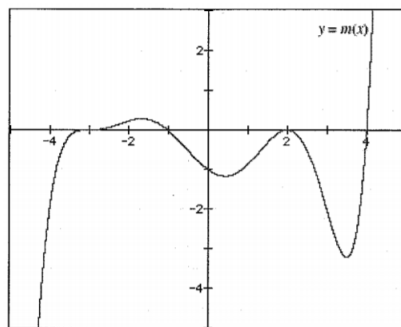
- (j) $(3x - 2)^2 - 5(3x - 2) - 14 = 0$
 (k) $(x^2 + 5x + 6)(2x - 1) < 0$
 (l) $x^3 - 2x^2 \leq 4x - 8$ (A. $x \leq -2$ of $x = 2$)

6. Bepaal de snijpunten van de grafieken van

- (a) $y = x^2 - 2x$ en $y = 6 - x$
 (b) $y = x^3 - 3x + 2$ en $y = (x - 1)^2$
 (c) $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ en $y = (x - 2)(x - 4)^2$

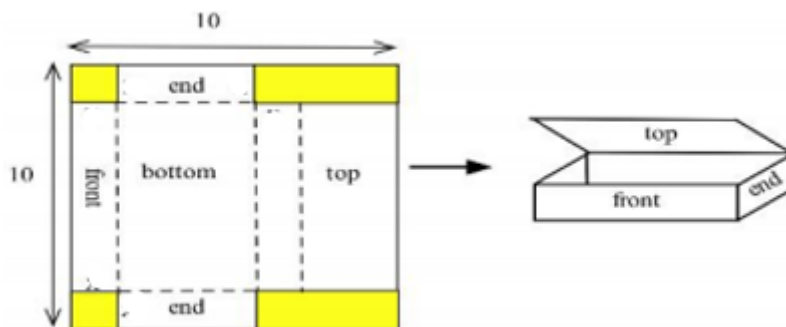
$y = x^2 - 2x$ en $y = 6 - x$

7. Bepaal het voorschrift van een veeltermfunctie $m(x)$ van de zevende graad, waarvan de grafiek gegeven is.



8. Bepaal alle intervallen waar $f(x) = (x - 2)^{2021} \cdot (x - 1)^{2022} \cdot (x + 1)^{2023} \cdot (x + 2)^{2024}$ positief is
9. Gegeven de veeltermfunctie $f : x \mapsto x^3 + (1 - k^2)x + k$ met $k \in \mathbb{R}$
- (a) Toon aan dat $-k$ een wortel is.
 (b) Bepaal de twee andere wortels
 (c) Bepaal de waarden van k waarvoor de grafiek van f slechts één reële wortel heeft
10. Gegeven $f(x) = x^3 + x^2 - x + k$. Bepaal de waarde(n) van k als je weet dat $x - k$ een deler is (A. $k = -1, k = 0$)
11. Gegeven $f(x) = 6x^3 + Ax^2 - 6x + B$.
- (a) Bepaal de waarden van A en B als je weet dat de grafiek van f de x -as raakt bij $x = 5$ en dat de veelterm bij deling door $x - 1$, $r = 24$ geeft.
 (b) Geef de volledige ontbinding in factoren
12. Gegeven de veelterm $p(x) = 2x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 36$ met a, b, c en $d \in \mathbb{R}$ en nulwaarden $1, -1, 3$ en -3 . Bepaal de 5de nulwaarde van deze veelterm.
13. De veelterm $P(x)$ is gelijk aan $2x^3 + rx^2 + 8x$ en heeft slechts één nulpunt. Welke waarde(n) kan r hebben? (A. $-8 < r < 8$)
14. De veelterm $p(x) = x^3 + 2x^2 + kx - 2$ heeft drie reële nulpunten $a, \frac{1}{a}$ en b . Bepaal de parameter k . (A. $k = -7$)
15. Men beschouwt de functie $f(x) = 2x^3 - mx + m - 2$. Bereken m zodat de grafiek van f aan de x -as raakt. (A. $m = \frac{3}{2}$ en $m = 6$)
16. Als de veeltermfunctie $f(x) = x^4 + 2x^3 + 9x + a$ gedeeld wordt door $x^2 - x + 2$ is het quotiënt $x^2 + bx + 1$ en de rest $cx + 5$. Bepaal de waarden van a, b en c (A. $a = 7, b = 3$ en $c = 4$)
17. De veeltermfunctie $f(x) = x^8 - 12x^6 + 49x^4 - 78x^2 + 42$ heeft acht wortels. Hoeveel hiervan zijn positief?

18. Een fabrikant van dozen kan uit een stuk karton van 10 op 10 cm volgend doosje maken:



- (a) Bepaal een voorschrift voor de inhoud van deze doos.
 - (b) Bepaal de afmetingen voor die doos met een inhoud van 8 cm^3 .
19. Een goudsmid vervaardigt een rechthoekig kadertje waarvan twee overstaande zijden gouden staafjes zijn van 100 euro per cm lengte en de twee andere, zilveren staafjes van 75 euro per cm lengte. Bepaal de afmetingen voor een kadertje met een oppervlakte van 12 cm^2 als je 1500 euro wil spenderen.
 20. Een open doos met een vierkant als grondvlak wordt gemaakt uit 9 m^2 materiaal. Bepaal de afmetingen voor een doos met een inhoud van 2 m^3
 21. Bepaal het functievoorschrift van de grafiek die men bekomt door de grafiek van $y = x^2$ achtereenvolgens 3 eenheden naar boven te verschuiven, 2 eenheden naar links, te spiegelen om de y-as en tenslotte te spiegelen om de x-as
 22. De grafiek van $y = x^3$ wordt achtereenvolgens 1 eenheid naar beneden verschoven, dan uitgerokken met een factor 3, dan gespiegeld om de x-as en tenslotte 2 eenheden naar rechts verschoven. Geef het nieuwe voorschrift.
 23. Bepaal de transformaties die men uitgevoerd heeft op $y = \sqrt{x}$ om $y = 2\sqrt{-x+3}-4$ te bekomen.
 24. Oefeningen met absolute waarde
 - (a) Teken de grafiek van $f(x) = ||x - 2| - 2|$
 - (b) Los op: $|x + 5| - 2|x - 1| \geq 0$
 - (c) Los op: $|x - 3| = x^2 - 3$

10 taak