

Hoofdstuk I: veelterm(en)(functies)

www.karelappeltans.be

September 11, 2021

1 de rechte, veeltermfunctie van graad 1

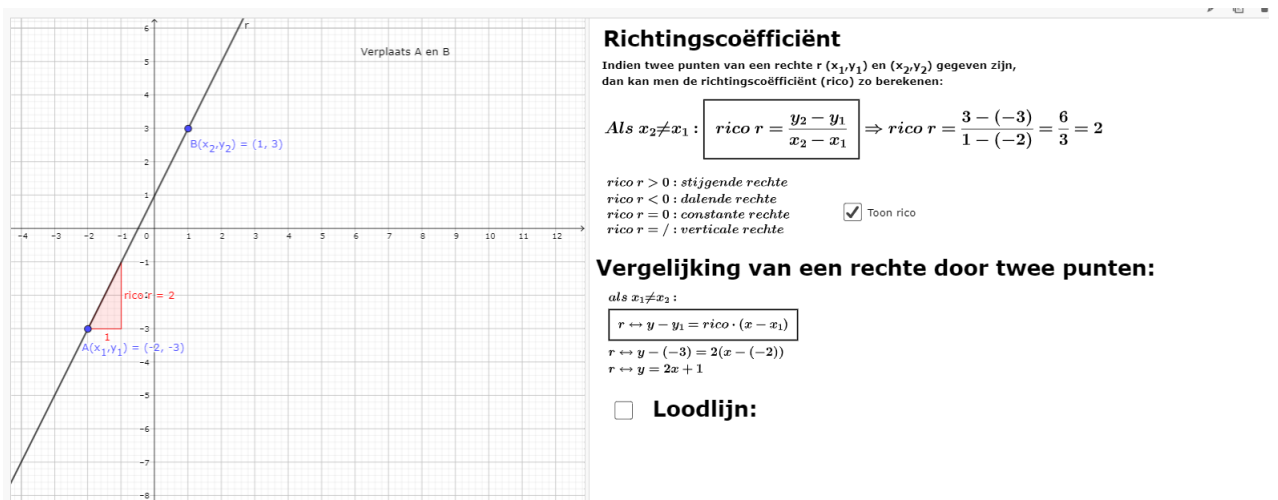


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/V6dh2XPP>

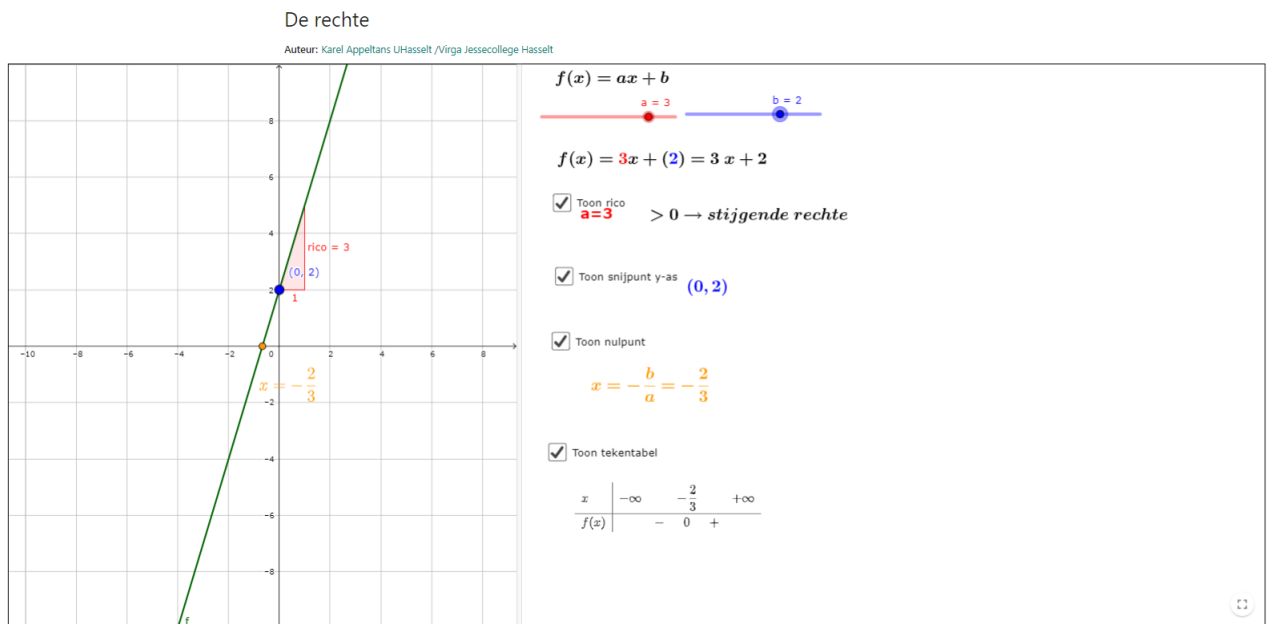


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/TF8KaYf2>

2 de parabool, veeltermfunctie van graad 2

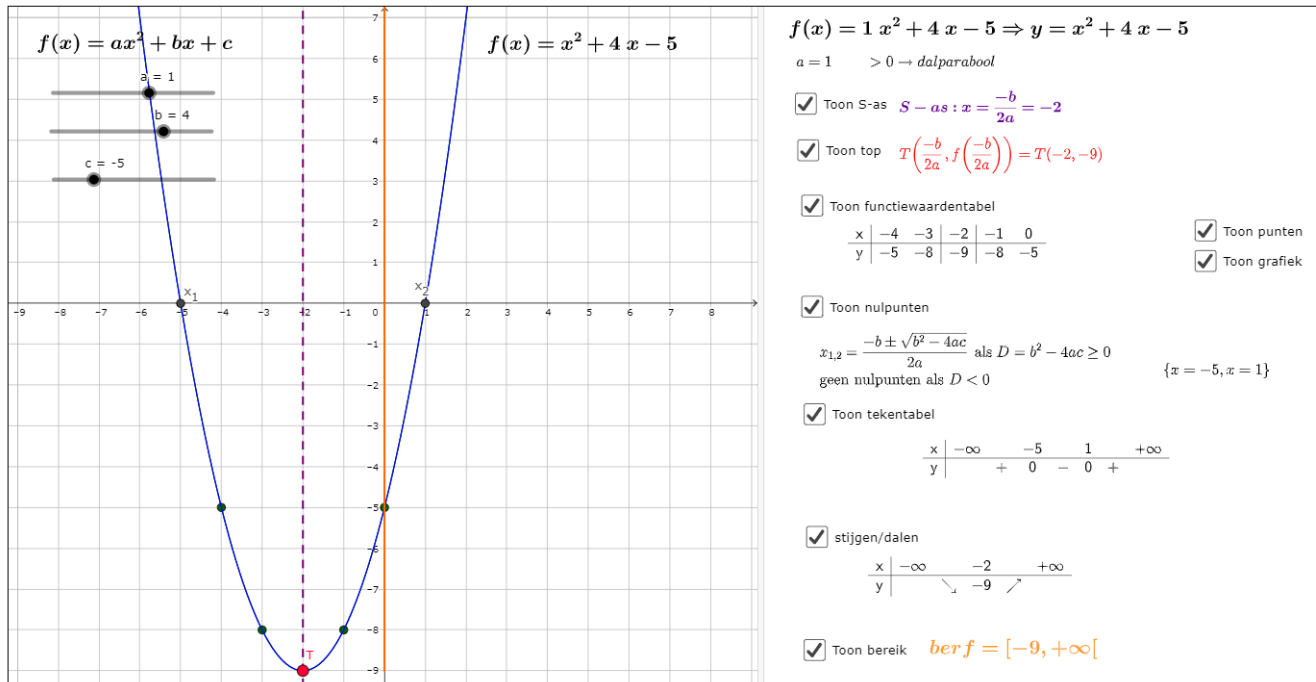


Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/uB6aYGJp>

3 elementaire functie $f(x) = x^3$, veeltermfunctie van graad 3

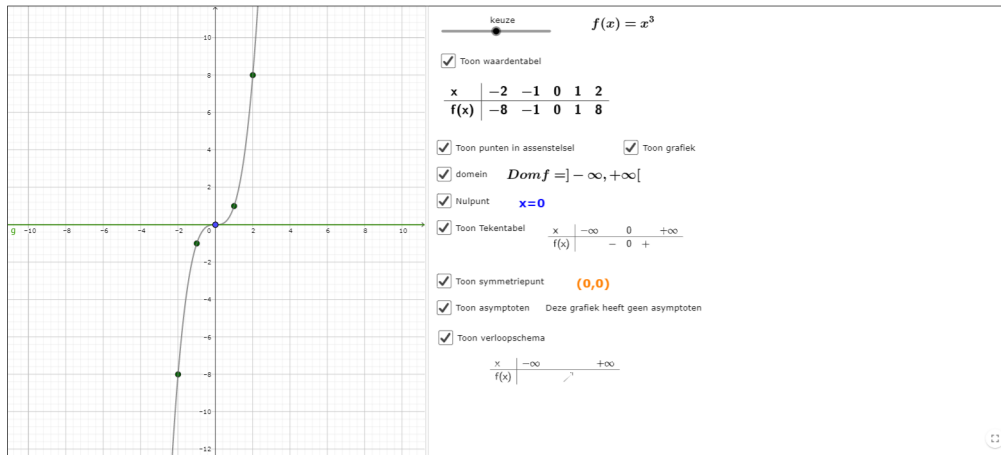


Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/pqvnzptk>

4 nulpunten

Stappenplan

- stap 1: herschrijf de vergelijking naar ...=0
- stap 2: een gemeenschappelijke factor eerst afzonderen
- stap 3: als de onbekende slechts 1 keer voorkomt, moet men deze afzonderen
- stap 4: als de graad van de onbekende 2 is, kan men
 - stap 4a: een merkwaardig product gebruiken;
 - stap 4b: de abc-formule gebruiken
- stap 5: als de graad van de onbekende meer dan 2 is, kan men
 - stap 5a: een merkwaardig product gebruiken
 - stap 5b: het rekenschema van Horner gebruiken

Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

stap 4b: de abc-formule

Nieuwe vergelijking

$3x^2 - 15x - 15 = 0$

Gebruik de abc-formule om de oplossingen van deze vierkantsvergelijkingen te bekomen. Vereenvoudig zo ver mogelijk

$D = b^2 - 4ac$

Als $D \geq 0$ dan $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Als $D < 0$ geen reële oplossingen

Je kan hiernaast jouw oplossingen achteraf controleren!

Toon exacte oplossing (als $D > 0$, of $D = 0$)

$\frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}$

$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$

Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

Nulpunten/oplossingen/wortels kwadratische vergelijking m.b.v. som en product van wortels

Vb : los op : $x^2 + 5x + 4 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

dit geeft hier: $s = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5$

$p = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$

Zoek twee getallen waarvan het product 4 is en de som -5 is

dit geeft :

$x_1 = -1$ en $x_2 = -4$

want $(-1) \cdot (-4) = 4$ en $(-1) + (-4) = -5$

Los op: $x^2 + 7x + 10 =$ nieuwe opgave

tip 1 tip 2

$p = \frac{c}{a} = 10,$ $(-2) \cdot (-5) = 10$ en $(-2) + (-5) = -7.$

$s = -\frac{b}{a} = -7.$

antwoord

$x_1 = -5$ v $x_2 = -2$

Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

Stap 4a&5a: een merkwaardig product gebruiken

Ontbinding in factoren:

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2 = (A + B)(A + B)$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2 = (A - B)(A - B)$$

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$$

Nieuwe opgave $25x^2 - 16$

Toon oplossing $25x^2 - 16 = (5x - 4)(5x + 4)$

Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

Stap 3

Regel van Horner

als strategie bij ontbinding in factoren met factor $x-a$, $a \in \mathbb{Z}$

Voorbeeld:
 bepaal de ontbinding in factoren van $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$
Bekijk de delers van de constante term: -4
delers -4 = {+1, -1, +2, -2, +4, -4}
 Zoek een deler die 0 als beeld heeft,
 $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -2 \neq 0$
 $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$

$P(x) = 1x^3 + 3x^2 + 0x - 4$ $d(x) = x - (1)$

1	3	0	-4
	+	+	+
1	(1) · 1 = 1	(1) · (-4) = 4	(1) · 4 = 4
1	4	4	0

$Q(x) = 1x^2 + 4x + 4$
 $r(x) = 0$
 $P(x) = d(x) \cdot q(x) + r$
 $x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$

Q(x) kan eventueel via opnieuw Horner of via andere strategieën verder ontbonden worden

Willekeurig:
 Vul in: $P(x) = x^3 + 1$

Delers van 1 zijn {1, -1}

Zoek een deler die 0 als beeld heeft:
 $P(-1) = 0$ **-1 is een juiste kandidaat!**

-1	1	0	0	1
	-1	1	-1	
1	-1	1	0	0

$Quotiënt Q(x) = x^2 - x + 1$
 $rest r = 0$
 $x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$

Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

Voorbeelden:

$x^2 + 5x + 7 = x + 3$ $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$ (stap 1) $\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0$ (stap 4a) $\Leftrightarrow (x + 2)(x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow x = -2$ (2x)	$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = 0$ via horner $\Leftrightarrow x - 1 = 0$ of $x^2 + 4x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow x - 1 = 0$ of $(x + 2)^2 = 0$ $\Leftrightarrow x - 1 = 0$ of $x = -2$ of $x = -2$	$12x^5 - 26x^4 + 2x^3 + 4x^2 = 0$ $\Leftrightarrow 2x^2(6x^3 - 13x^2 + x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow 2x^2 = 0$ of $6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$ $x^2 = \frac{0}{2} = 0!$ $x = \pm\sqrt{0} = 0(2x)$ of $(x - 2)(6x^2 - x - 1) = 0$ (via Horner) $x - 2 = 0$ of $6x^2 - x - 1 = 0$ $x = 2$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$
$4x^3 - 108 = 0$ $\Leftrightarrow x^3 = \frac{108}{4} = 27$ $\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$	$(2 - x)(1 + x)^2 x = 0$ $\Leftrightarrow 2 - x = 0$ of $1 + x = 0$ (2x) of $x = 0$ $\Leftrightarrow x = 2$ of $x = -1(2x)$ of $x = 0$	

Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/Y7qJRUQf>

5 ontbinding in factoren

Elke veelterm(functie) kan ontbonden worden in factoren van de 1ste graad en/of factoren van de tweede graad met een negatieve discriminant.

Werkwijze

Bij ontbinding in factoren wil men een veelterm schrijven als product van meerdere factoren

stap 1: gemeenschappelijke factoren afzonderen

stap 2: bij tweede graad

stap 2a: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

stap 2b: merkwaardig product

stap 3: bij graad 3 en hoger: Horner

Probeer altijd elke term zover mogelijk te ontbinden!

Figure 11: <https://www.geogebra.org/m/jnqy9wsd>

stap 2a

Ontbinding van de drieterm: $-2x^2 + 3x - 1$ Nieuwe opgave

toon oplossing $x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = 1$

$$-2x^2 + 3x - 1 = -2\left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right) \cdot (x - (1))$$
$$-2x^2 + 3x - 1 = -(x - 1)(2x - 1)$$




Figure 12: <https://www.geogebra.org/m/jnqy9wsd>

Stap 2b

Ontbinding in factoren:

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2 = (A + B)(A + B)$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2 = (A - B)(A - B)$$

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$$

$9x^2 + 12x + 4$
 $9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2$

Figure 13: <https://www.geogebra.org/m/jnqy9wsd>

Stap 3

Regel van Horner

als strategie bij ontbinding in factoren met factor $x-a$, $a \in \mathbb{Z}$

Voorbeeld:

bepaal de ontbinding in factoren van $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

Bekijk de delers van de constante term: -4

delers -4 = {+1, -1, +2, -2, +4, -4}

Zoek een deler die 0 als beeld heeft,

$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -2 \neq 0$$

$$f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$P(x) = 1x^3 + 3x^2 + 0x - 4 \quad d(x) = x - (1)$$

1	3	0	-4
	+	+	+
1	(1) · 1 = 1	(1) · (-4) = 4	(1) · 4 = 4
1	4	4	0

$$Q(x) = 1x^2 + 4x + 4$$

$$r(x) = 0$$

$$P(x) = d(x) \cdot q(x) + r$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$$

Q(x) kan eventueel via opnieuw Horner of via andere strategieën verder ontbonden worden

Willekeurig:

Vul in: $P(x) = x^3 + 1$

Delers van 1 zijn {1, -1}

Zoek een deler die 0 als beeld heeft:

$$P(-1) = 0 \quad \text{-1 is een juiste kandidaat!}$$

1	0	0	1
-1	-1	1	-1
1	-1	1	0

$$\text{Quotiënt } Q(x) = x^2 - x + 1$$

$$\text{rest } r = 0$$

$$x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$$

Figure 14: <https://www.geogebra.org/m/jnqy9wsd>

6 snijpunten zoeken

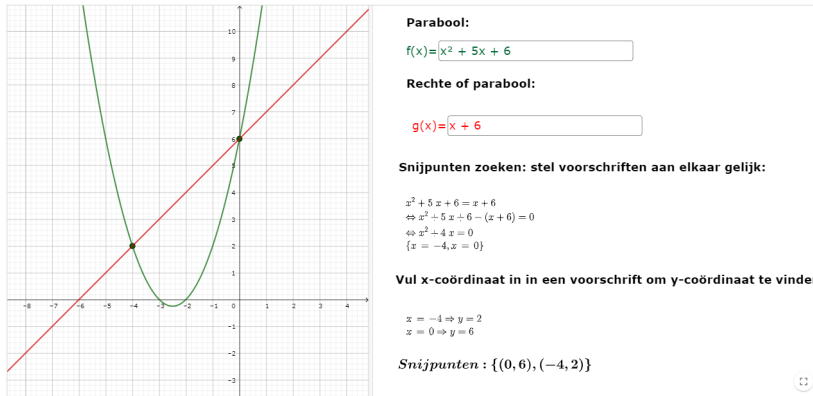


Figure 15: <https://www.geogebra.org/m/nWmmAaSq>

7 willekeurige veeltermfuncties

7.1 domein en gedrag bij de grenzen van het domein

Bij veeltermen altijd $\text{dom } f = \mathbb{R} =] - \infty, +\infty[$
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{hoogste graadsterm}$

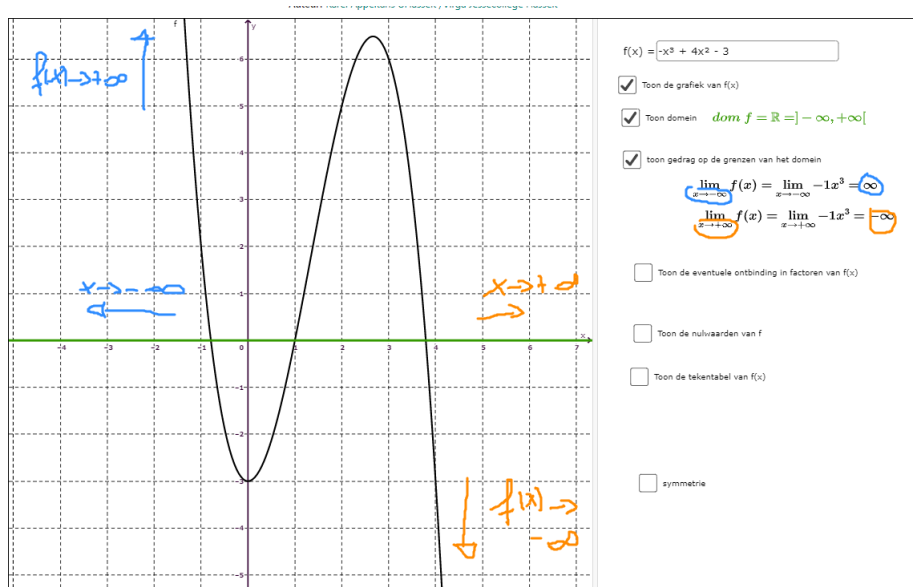


Figure 16: <https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee>

7.2 tekentabel

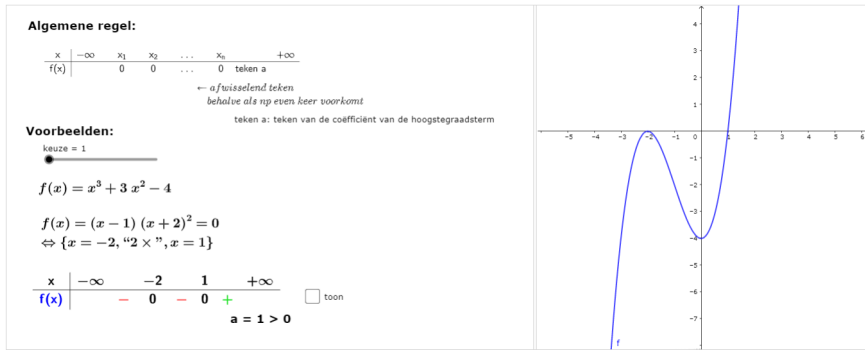


Figure 17: <https://www.geogebra.org/m/jtap9fqz>

7.3 ongelijkheden

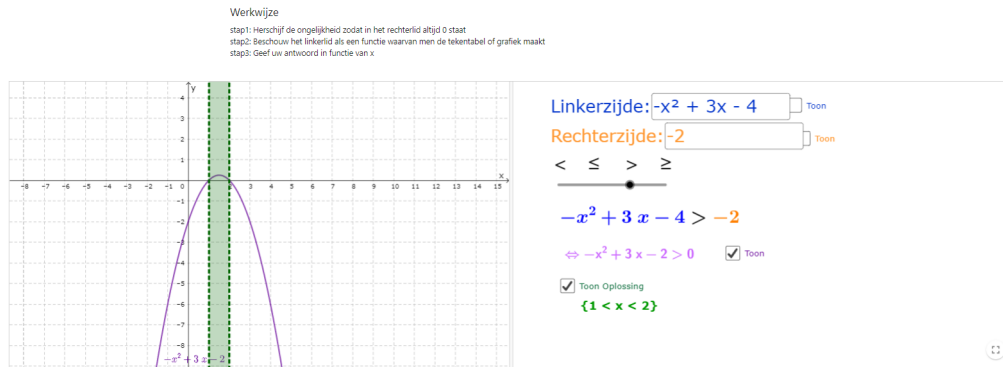


Figure 18: <https://www.geogebra.org/m/dR7jSdK>

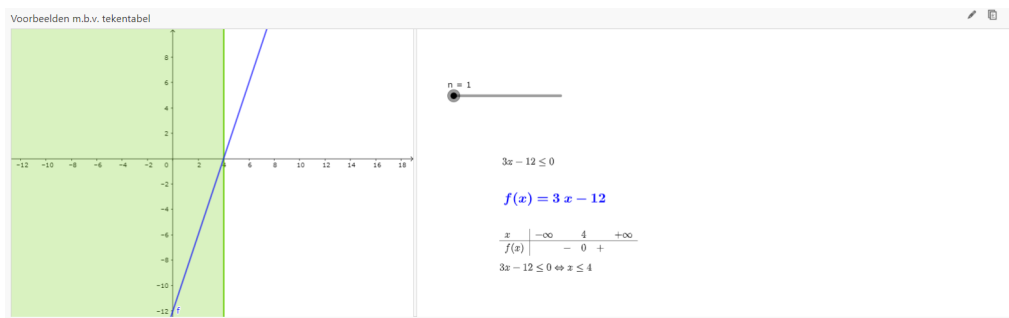


Figure 19: <https://www.geogebra.org/m/dR7jSdK>

7.4 functievoorschriften opstellen

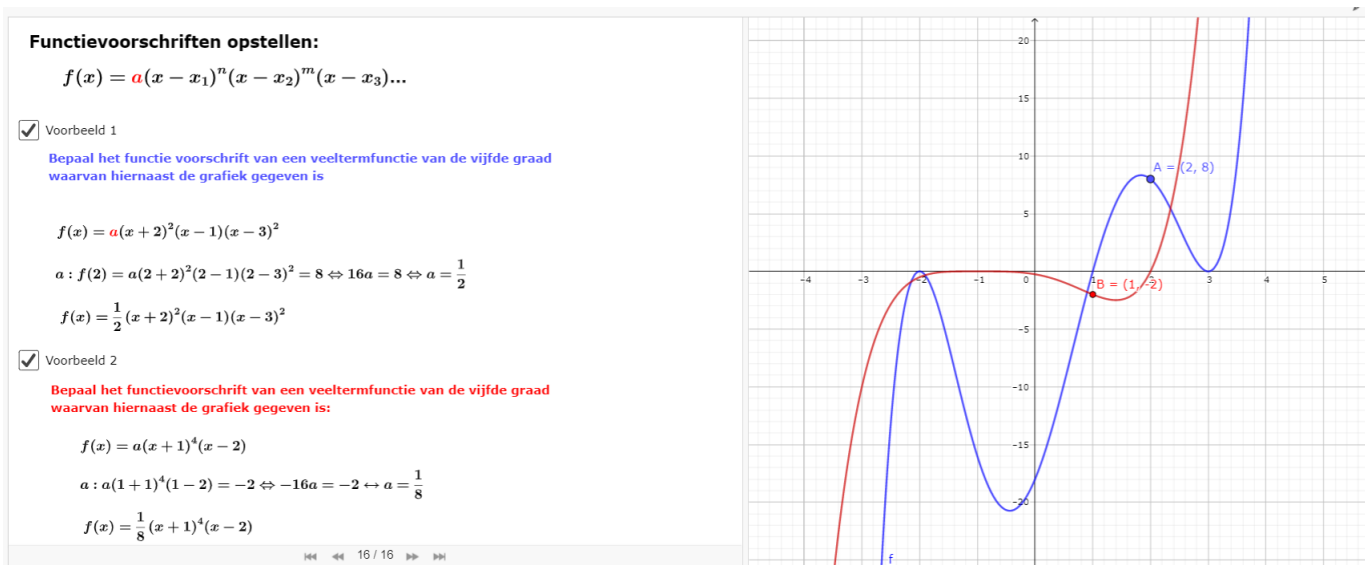


Figure 20: <https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee>

7.5 symmetrie

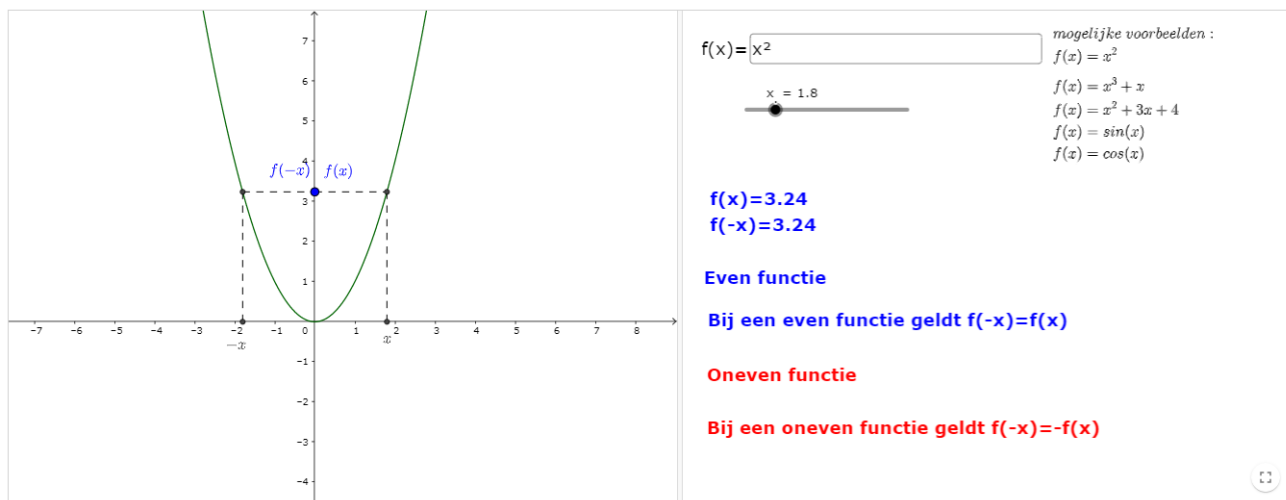


Figure 21: <https://www.geogebra.org/m/kve5bgdv>

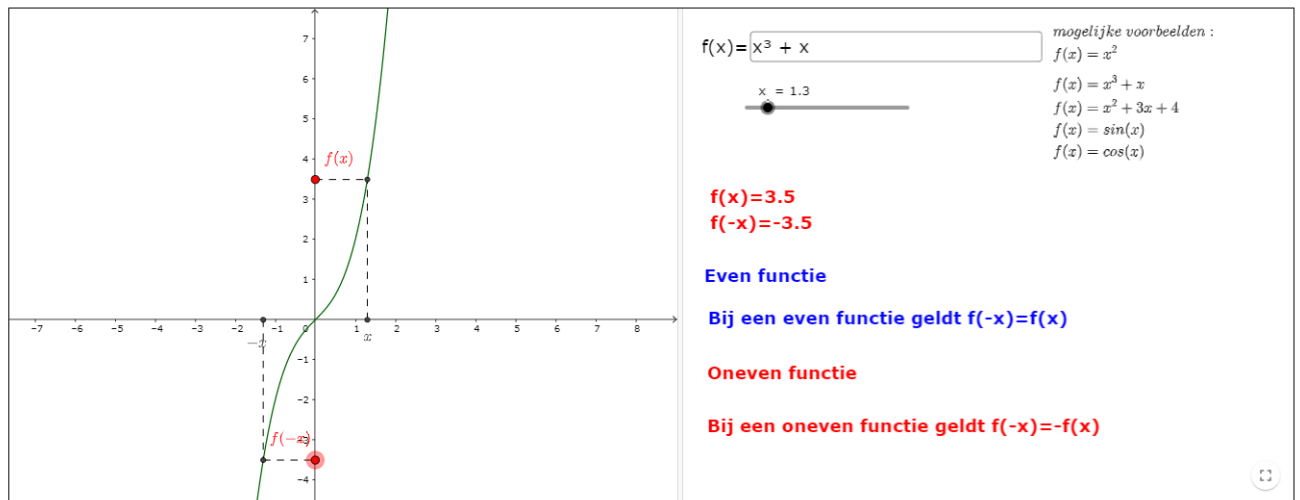


Figure 22: <https://www.geogebra.org/m/kve5bgdv>

8 Toepassingen

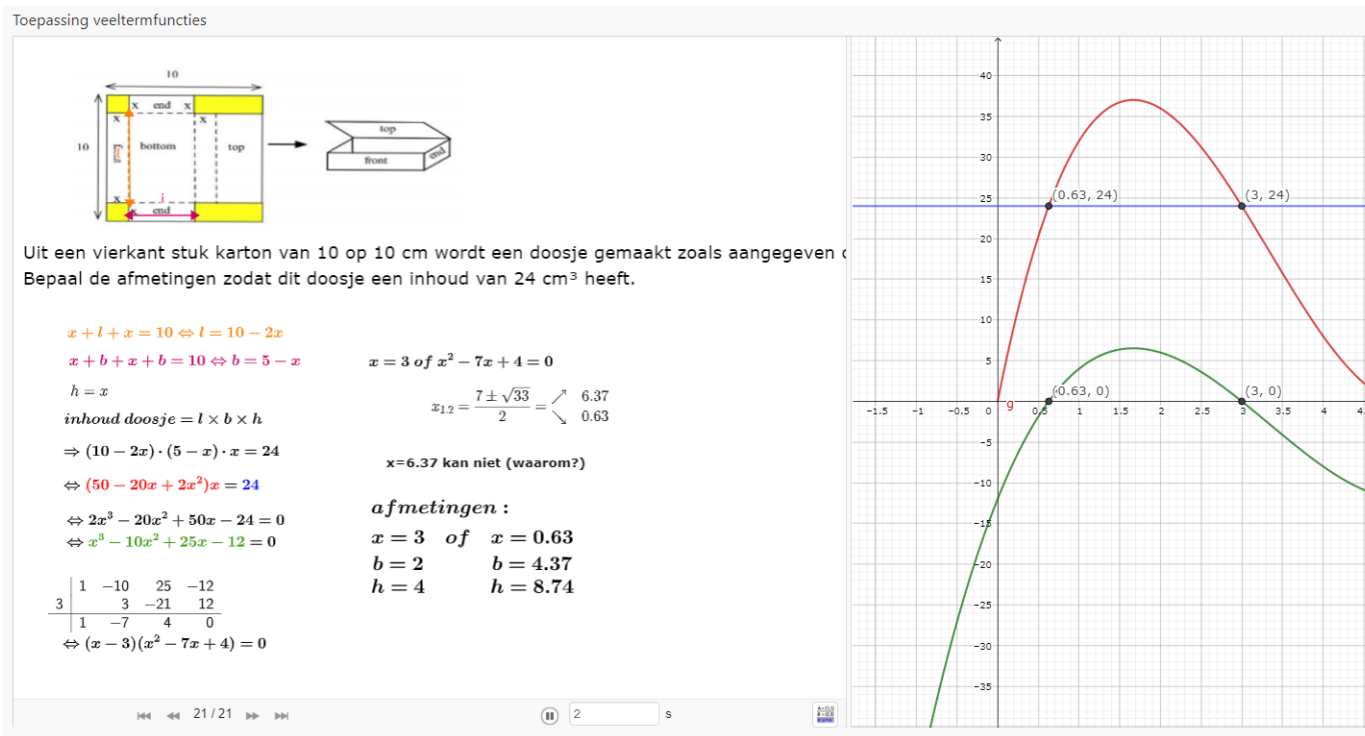


Figure 23: <https://www.geogebra.org/m/uzmbrnee>

9 Transformaties

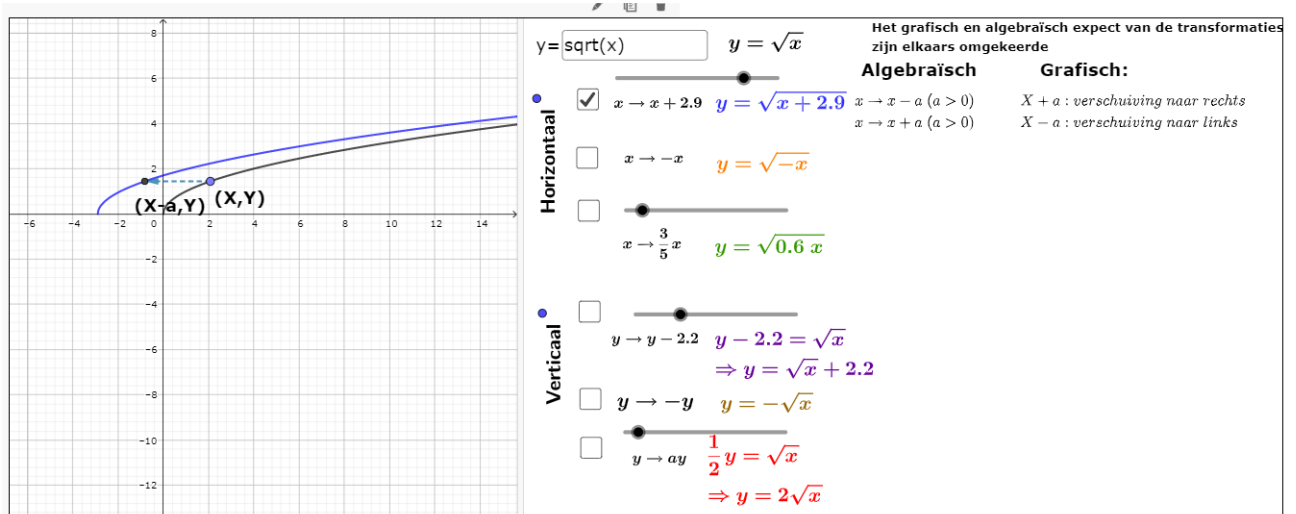


Figure 24: <https://www.geogebra.org/m/mq5zhh8t>

Overzicht

Horizontaal

Verschuiving: vervang "x" door "(x-c)"; $c > 0$ verschuiving naar rechts, $c < 0$ naar links.

Spiegeling om de y-as: vervang "x" door "-x"

Uitrekking/inkrimping met factor $\frac{1}{b}$: vervang "x" door "(bx)"

Verticaal

Verschuiving: vervang "y" door "(y-d)"; $d > 0$ naar boven, $d < 0$ naar beneden.

Spiegeling om de x-as: vervang "y" door "-y"

Uitrekking/inkrimping met factor a: vervang "y" door " $\frac{y}{a}$ "

10 Algemene notatie

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

11 Oefeningen

- Bepaal de vergelijking van de rechte die
 - door het punt (-4,3) gaat en parallel ligt aan de lijn $x + 4y = 6$.
 - door het punt (3,3) gaat en loodrecht staat op de lijn $x - 3y = 10$.
- de functie $y = f(x) = -x^2 + px - 5$ heeft een maximum voor $x = 1$. Bereken p en de maximale functiewaarde
- De functie $y = f(x) = px^2 + 4x + p$ heeft een maximum. De maximale functiewaarde is 3. Bereken p.
- Ontbind in factoren
 - $49 - x^2$
 - $5x^3 - 4x^2 - 8x + 7$
 - $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

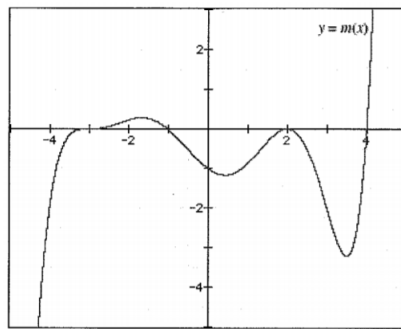
(d) $x^3 - 6x^2 + 9x$

5. Los op

- (a) $4(x - 2) = 3x - 7(2x - 3)$
- (b) $2(x - 3) + x < 5(x - 1) + 2$
- (c) $-9x^2 + 12x - 4 = 0$
- (d) $x^2 - 5x + 6 = 0$
- (e) $2x^2 - 7x + 6 = 0$
- (f) $2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 28x - 12 = 0$
- (g) $x^4 - 1 = 0$
- (h) $4x^2 + 2x \leq 20$
- (i) $(x - 3)^2 + (x - 1)^2 = 2$
- (j) $(3x - 2)^2 - 5(3x - 2) - 14 = 0$
- (k) $(x^2 + 5x + 6)(2x - 1) < 0$

6. Bepaal de snijpunten van de grafieken van $y = x^2 - 2x$ en $y = 6 - x$

7. Bepaal het voorschrift van een veeltermfunctie $m(x)$ van de zevende graad, waarvan de grafiek gegeven is.



8. Bepaal alle intervallen waar $f(x) = (x - 2)^{2021} \cdot (x - 1)^{2022} \cdot (x + 1)^{2023} \cdot (x + 2)^{2024}$ positief is

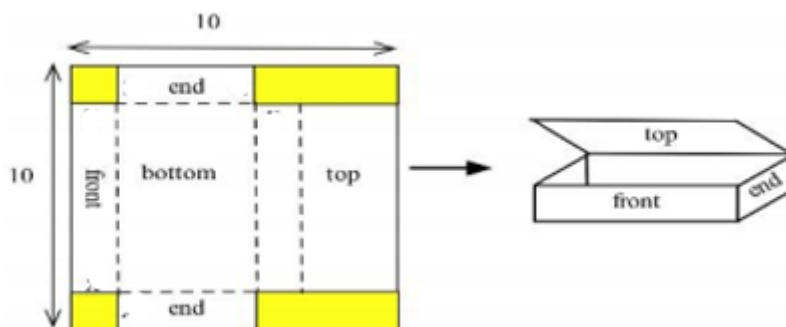
9. Gegeven de veeltermfunctie $f : x \mapsto x^3 + (1 - k^2)x + k$ met $k \in \mathbb{R}$

- (a) Toon aan dat $-k$ een wortel is.
- (b) Bepaal de twee andere wortels
- (c) Bepaal de waarden van k waarvoor de grafiek van f slechts één reële wortel heeft

10. Gegeven de veelterm $p(x) = 2x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 36$ met a, b, c en $d \in \mathbb{R}$ en nulwaarden 1, -1, 3 en -3. Bepaal de 5de nulwaarde van deze veelterm.

11. De veeltermfunctie $f(x) = x^8 - 12x^6 + 49x^4 - 78x^2 + 42$ heeft acht wortels. Hoeveel hiervan zijn positief?

12. Een fabrikant van dozen kan uit een stuk karton van 10 op 10 cm volgend doosje maken:



- (a) Bepaal een voorschrift voor de inhoud van deze doos.
- (b) Bepaal de afmetingen voor die doos met een inhoud van 8cm^3 .
13. Een goudsmid vervaardigt een rechthoekig kadertje waarvan twee overstaande zijden gouden staafjes zijn van 100 euro per cm lengte en de twee andere, zilveren staafjes van 75 euro per cm lengte. Bepaal de afmetingen voor een kadertje met een oppervlakte van 12 cm^2 als je 1500 euro wil spenderen.
14. Een open doos met een vierkant als grondvlak wordt gemaakt uit 9 m^2 materiaal. Bepaal de afmetingen voor een doos met een inhoud van 2 m^3
15. Bepaal het functievoorschrift van de grafiek die men bekomt door de grafiek van $y = x^2$ achtereenvolgens 3 eenheden naar boven te verschuiven, 2 eenheden naar links, te spiegelen om de y-as en tenslotte te spiegelen om de x-as
16. De grafiek van $y = x^3$ wordt achtereenvolgens 1 eenheid naar beneden verschoven, dan uitgerokken met een factor 3, dan gespiegeld om de x-as en tenslotte 2 eenheden naar rechts verschoven. Geef het nieuwe voorschrift.
17. Bepaal de transformaties die men uitgevoerd heeft op $y = \sqrt{x}$ om $y = 2\sqrt{-x+3}-4$ te bekomen.
18. Oefeningen met absolute waarde
- (a) Teken de grafiek van $f(x) = ||x - 2| - 2|$
- (b) Los op: $|x + 5| - 2|x - 1| \geq 0$
- (c) Los op: $|x - 3| = x^2 - 3$
19. oefeningen handboek

12 taak