Problemas – Tema 3

Problemas resueltos - 10 - Teorema de Rolle

1. Calcula a para que $f(x)=\begin{cases} 1-\cos(x) & si \quad x\leq 0 \\ x^2+ax & si \quad x>0 \end{cases}$ verifique el teorema de Rolle en el intervalo $[\frac{-\pi}{2},1]$. Para ese resultado de a obtener el valor que predice el teorema en dicho intervalo.

Para poder aplicar el teorema de Rolle, al función debe ser continua en $[\frac{-\pi}{2},1]$, derivable en $(\frac{-\pi}{2},1)$ y verificar $f(\frac{-\pi}{2})=f(1)$.

La función es continua $[\frac{-\pi}{2},1]-\{0\}$ por ser polinómica más coseno (a la izquierda de cero) y por ser polinómica (a la derecha de cero). En el punto frontera $x=0$ debe verificarse:

$$f(0)=0$$
$$\lim_{x\to 0^-}(1-\cos(x))=0$$
$$\lim_{x\to 0^+}(x^2+ax)=0$$

Ambos límites laterales coinciden → $límite \quad L=0$

$$f(0)=0=L$$

Por lo tanto, la función es continua en $x=0$, independientemente del valor de a .

Estudiamos la derivabilidad.

$$f'(x)=\begin{cases} sen(x) & si \quad x<0 \\ 2x+a & si \quad x>0 \end{cases}$$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos

La función es derivable $(\frac{-\pi}{2},1)-\{0\}$ por ser seno (a la izquierda de cero) y por ser polinómica (a la derecha de cero). En el punto frontera $x=0$ debe verificarse:

$f'(0^-)=0$, $f'(0^+)=a$ → si $a=0$ la función es derivable en $x=0$.

Obtenemos el valor de la función en los extremos del intervalo, tomando $a=0$.

$$f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=1 \quad , \quad f(1)=1 \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=f(1)$$

Se cumplen todas las condiciones del teorema de Rolle. El valor que predice el teorema es:

$$\exists c \in \left(\frac{-\pi}{2}, 1\right) / f'(c)=0$$

Debemos anular la derivada en ambos tramos de la función.

$$sen(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=0$$
$$2x=0 \quad \rightarrow \quad x=0$$

Por lo tanto, el valor que predice Rolle es $x=0$.

2. Dada $f(x)=\frac{\cos(x^3+2x^2+3x)}{\sqrt{x^2+x+2}}$ **, demuestra que existe un valor** $\alpha\in(-2,1)/ f'(\alpha)=0$

$$f(-2)=\frac{\cos(-8+8-6)}{\sqrt{4-2+2}}=\frac{\cos(-6)}{2}=\frac{\cos(6)}{2}$$ → ya que el coseno es función par

$$f(1)=\frac{\cos(1+2+3)}{\sqrt{1+1+2}}=\frac{\cos(6)}{2}$$

$$f(-2)=f(1)$$

Además, nuestra función es continua en toda la recta real ya que el coseno es continuo en todo $\mathbb{R}$ y el discriminante de la raíz siempre es positivo. En particular, la función es continua en $[-2,1]$.

$$f'(x)=\frac{-sen(x^3+2x^2+3x)\cdot(3x^2+4x+3)\cdot\sqrt{x^2+x+2}-\cos(x^3+2x^2+3x)\cdot\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}}{x^2+x+2}$$

La función derivada es continua en toda la recta real, porque así lo son la función coseno, los polinomios y las raíces que aparecen en su expresión. Además, el denominador nunca se anula. Por lo tanto, $f(x)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$.

Con esto, se cumplen todas las condiciones del teorema de Rolle, que afirma:

$$\exists\alpha\in(-2,1)/ f'(\alpha)=0$$

3. Sea la función $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$

a) Obtener las asíntotas.

b) Obtener los intervalos de crecimiento y los extremos relativos.

c) ¿Cuánto debe valer a para que podamos aplicar el Teorema de Rolle a la función $g(x)=f(x)+ax$ en el intervalo $[0,1]$?

a) $f(x)=x\cdot e^{-x^2}=\frac{x}{e^{x^2}}$

El dominio del numerador y del denominador son toda la recta real, por ser polinomio y exponencial elevado a un polinomio.

Además, la exponencial nunca se anula. Por lo tanto, el dominio de la función es toda la recta real.

Es decir, no existen candidatos para las A.V. → No hay A.V.

Para obtener las A.H. Aplicamos límite en + y en – infinito. Lo hacemos en ambos lados, ya que no tenemos un cociente de polinomios, por lo que no tenemos garantizado que ambos límites coincidan.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → Explicar teoría de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2}\cdot 2x}=\frac{1}{\infty}=0$$

Si hacemos el límite en – infinito, llegamos al mismo resultado, porque aparece la misma indeterminación.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=0$$

En consecuencia, existe A.H. En la recta horizontal $y=0$ si $x\to\pm\infty$.

Si existe A.H., no aparece A.O.

b) Obtenemos primera derivada (ojo, derivamos como un cociente).

$$f(x)=\frac{x}{e^{x^2}} \rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot e^{x^2}-x\cdot e^{x^2}2\cdot x}{(e^{x^2})^2}=\frac{1-2x^2}{e^{x^2}} \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow x=\frac{\pm\sqrt{2}}{2}$$

Situamos los dos puntos críticos en la recta real. Recuerdo que el dominio es toda la recta real.

Evaluamos la derivada en cada uno de los intervalos en que se divide la recta real. Donde la derivada sea negativa, la función es estrictamente decreciente. Donde la derivada sea positiva, la función es estrictamente creciente.

$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ → estrictamente decreciente

$(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ → estrictamente creciente

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$ → estrictamente decreciente

Los extremos relativos, y sus imágenes, son:

$A\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},-0{,}43\right)$ → mínimo relativo

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0{,}43\right)$ → máximo relativo

c)¿Cuánto debe valer a para que podamos aplicar el Teorema de Rolle a la función $g(x)=f(x)+ax$ en el intervalo $[0,1]$?

$g(x)=\frac{x}{e^{x^2}}+ax$

El Teorema de Rolle afirma que si la función $g(x)$ es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$, y se cumple que las imágenes de los extremos coinciden $g(0)=g(1)$, podemos afirmar que existe un valor $c\in(0,1)$ que cumple $g'(c)=0$.

La función es suma de dos funciones continuas en toda la recta real. Además, su derivada también es continua en toda a recta real, por lo que podemos afirmar que es derivable en toda la recta real.

En consecuencia, la función es continua en $[0,1]$ y derivable $(0,1)$.

Aplicamos condición:

$g(0)=g(1)$

$g(0)=0$, $g(1)=\frac{1}{e}+a$ → $0=\frac{1}{e}+a$ → $a=\frac{-1}{e}$