Teoría – Tema 6

Teoría - 7 - Producto de matrices

Producto de matrices

Dadas dos matrices A y B diremos que son multiplicables en el orden $A\cdot B$, si el número de columnas de A es igual al número de filas de B .

Si se verifica que $A=(a_{ij})$ es de orden $m\times n$ y $B=(b_{jk})$ de orden $n\times p$, la matriz producto $C=A\cdot B$ es de orden $m\times p$, donde $C=(c_{ik})$ tiene por elementos:

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{¿}\cdot b_{nk} \quad\rightarrow\quad c_{ik}=\sum_{f=1}^{n} a_{if}\cdot b_{fk}$$

Es decir, **el elemento** c_{ik} **de la matriz producto viene dado por el producto de la fila** i **de la matriz** A **por la columna** k **de la matriz** B .

Ejemplo 1 resuelto

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 2 & -1\cdot(-3)+2\cdot 1+3\cdot 5\\ 4\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 2 & 4\cdot(-3)+1\cdot 1+2\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 20\\ 13 & -1\end{pmatrix}$$

Una consecuencia de esta definición del producto de matrices es la siguiente: **el producto de dos matrices puede ser cero sin que ninguna de ellas sea la matriz nula**.

Ejemplo 2 resuelto

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Además, por lo general, **el producto de dos matrices no es conmutativo**: $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Esta consecuencia es muy importante, ya que estamos acostumbrados a trabajar con números reales donde el producto sí es conmutativo... pero en matrices no es así, y es muy común “dejarnos llevar” e intercambiar erróneamente el orden de las matrices que aparecen en un producto.

Si una matriz A deseamos multiplicarla por una matriz B , deberemos indicar siempre en que orden aplicamos la multiplicación, ya que $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Ejemplo 3 resuelto

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 3\\ -2 & 2 & 19\\ 2 & 4 & 8\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 5 & 12\end{pmatrix}$$

Comprobamos que $A\cdot B\neq B\cdot A$.

El **producto de matrices sí es asociativo**: $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

El **producto de matrices es distributivo respecto de la suma**: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$.

El **elemento neutro del producto de matrices cuadradas de orden** n **es la matriz unidad** I **de orden** n , que satisface la siguiente relación $I\cdot A=A\cdot I=A$. Es decir, al aplicar I tanto por la izquierda como por la derecha sobre la matriz arbitraria A , sigo obteniendo A .

Si repasamos las propiedades del producto de matrices, y lo comparamos cuando hemos estudiado el producto de números reales o el producto de números complejos, podemos echar en falta una propiedad: el elemento simétrico del producto, que tanto en los números reales como en los números complejos es el elemento inverso.

Es decir, ¿podemos encontrar una matriz B que al ser aplicada sobre la matriz A nos dé como resultado la matriz unidad I , que es el elemento neutro del producto de matrices? Es decir, ¿podemos encontrar una matriz B que cumpla $A\cdot B=B\cdot A=I$?

Pues... a veces sí y a veces no.... Y de existir, solo es aplicable a matrices cuadradas. Si existe esa matriz B se llama inversa de A y se representa por $B=A^{-1}$. Y se dice que la matriz A es **regular o invertible (es decir, que admite matriz inversa)**. Si no admite matriz inversa, se dice que es **singular**.

Repetimos: solo si la matriz A es cuadrada puede admitir matriz inversa. Y no todas las matrices cuadradas admiten inversa. Volveremos a este asunto más adelante.