Tema 2

Cinemática de la partícula

La mecánica es la parte de la física que estudia el movimiento de los cuerpos. Dentro de la mecánica se pueden distinguir distintas ramas atendiendo a diferentes factores. Así, si consideramos el campo de aplicación, dentro de la mecánica se puede distinguir entre: *Cinemática* (estudio del movimiento de los cuerpos sin tener en cuenta la causa que los produce), *Dinámica* (estudio de las causas que produce el movimiento de los cuerpos), *Estática* (estudio de las condiciones necesarias para que los cuerpos estén en equilibrio), etc. Por otro lado, si tenemos en cuenta cuales son las leyes básicas de la física que va a satisfacer el sistema podemos distinguir entre: *Mecánica clásica*, *Mecánica cuántica*, *Mecánica relativista*, etc. Puesto que el objetivo de este curso es dar una visión general de la mecánica nos vamos a ocupar sólo de la mecánica clásica. En este tema en concreto vamos a analizar el movimiento sin tener en cuenta las causas que lo producen, es decir, vamos a desarrollar las bases de la cinemática.

ESQUEMA DE DESARROLLO

ESQUEMA DE DESARROLLO

4.- Vector aceleración.

- 4.1.- Vector aceleración promedio.
- 4.2.- Vector aceleración instantánea.
- 4.3.- Componentes intrínsecas de la aceleración.

5.- Clasificación de los movimientos.

- 5.1.- Movimiento uniforme.
- 5.2.- Movimiento uniformemente acelerado.
- 5.3.- Movimiento circular.
- 5.4.- Movimiento oscilatorio.

6.- Composición de movimientos. Tiro parabólico.

Movimiento.- *Se dice que un cuerpo, un objeto o una partícula se mueven cuando cambian de posición con el tiempo.*

- En la definición de movimiento está incluido el concepto tiempo. Todos tenemos una idea intuitiva de lo que es el tiempo pero es interesante ahondar en este concepto diferenciador entre la mecánica clásica y la mecánica relativista.

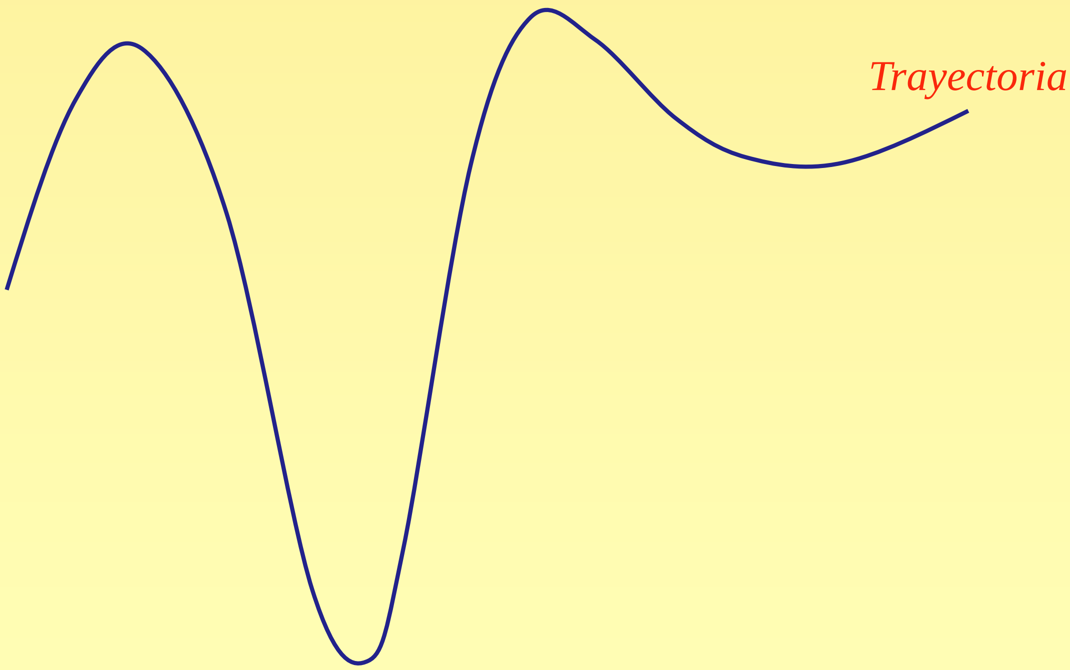
- De forma general, podemos decir que el tiempo es la magnitud física con la que medimos la duración de acontecimientos sujetos a cambio, de los sistemas sujetos a observación, es decir, el período que transcurre entre el estado del sistema cuando éste aparentaba un estado y el instante en el que registra una variación perceptible para un observador (o aparato de medida). Permite, por tanto, ordenar los sucesos en secuencias, estableciendo un pasado, un presente, y un futuro, y da lugar al principio de causalidad.

- Su unidad básica en el Sistema Internacional es el segundo, cuyo símbolo es s.

- En la mecánica clásica, el tiempo se concibe como una magnitud absoluta, es decir, es un escalar cuya medida es idéntica para todos los observadores (una magnitud relativa es aquella cuyo valor depende del observador concreto). Esta concepción del tiempo recibe el nombre de tiempo absoluto.

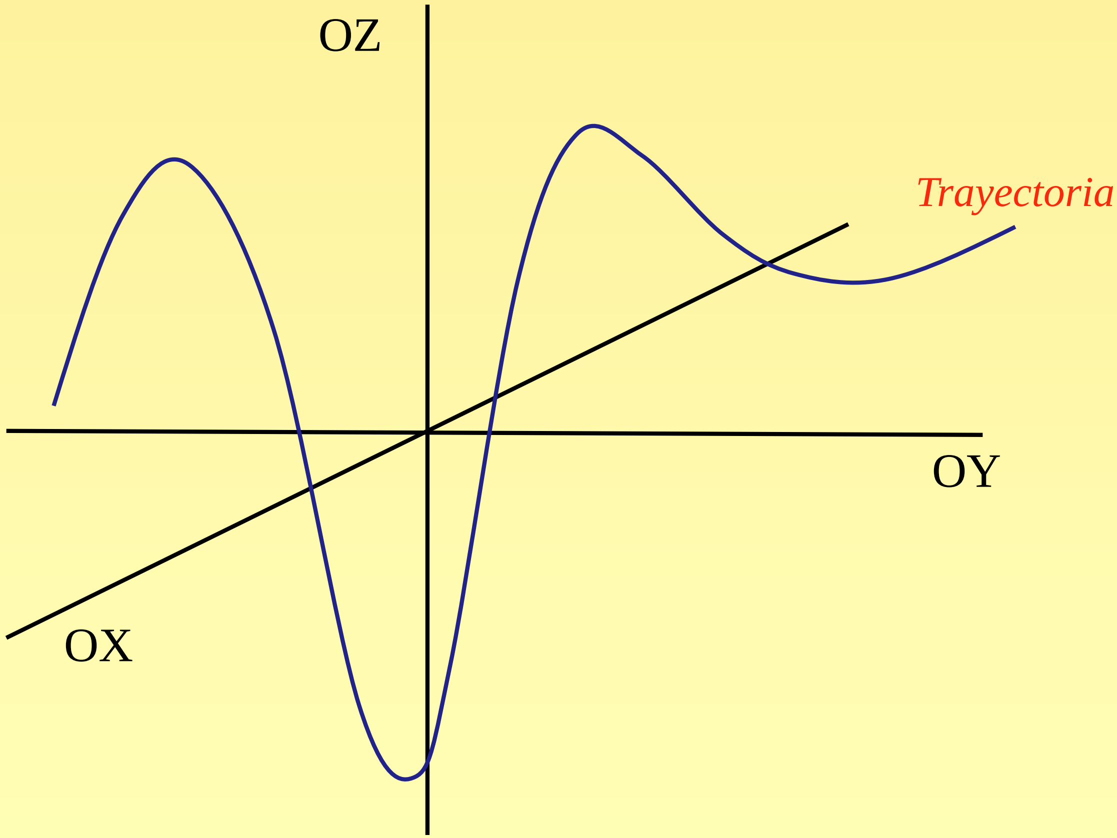
Trayectoria.- Es el lugar geométrico formado por las sucesivas posiciones del espacio que va ocupando el sistema en su movimiento.

- Se representa habitualmente mediante una línea continua.



Trayectoria.- Es el lugar geométrico formado por las sucesivas posiciones del espacio que va ocupando el sistema en su movimiento.

- Se representa habitualmente mediante una línea continua.



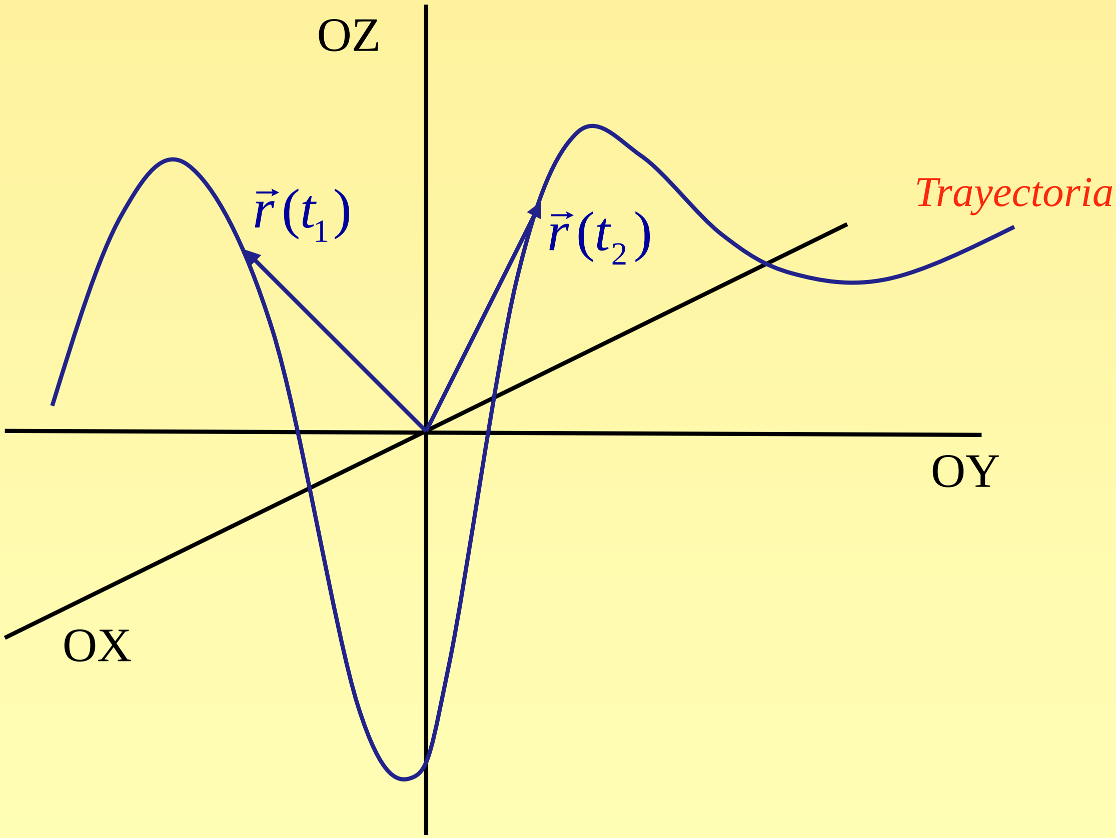
Trayectoria.- Es el lugar geométrico formado por las sucesivas posiciones del espacio que va ocupando el sistema en su movimiento.

- Se representa habitualmente mediante una línea continua.

Vector posición.- El vector posición es un vector que nos da la posición de la partícula en función del tiempo respecto a un sistema de referencia elegido y que está trazado desde el origen de dicho sistema de referencia hasta la posición de la partícula.

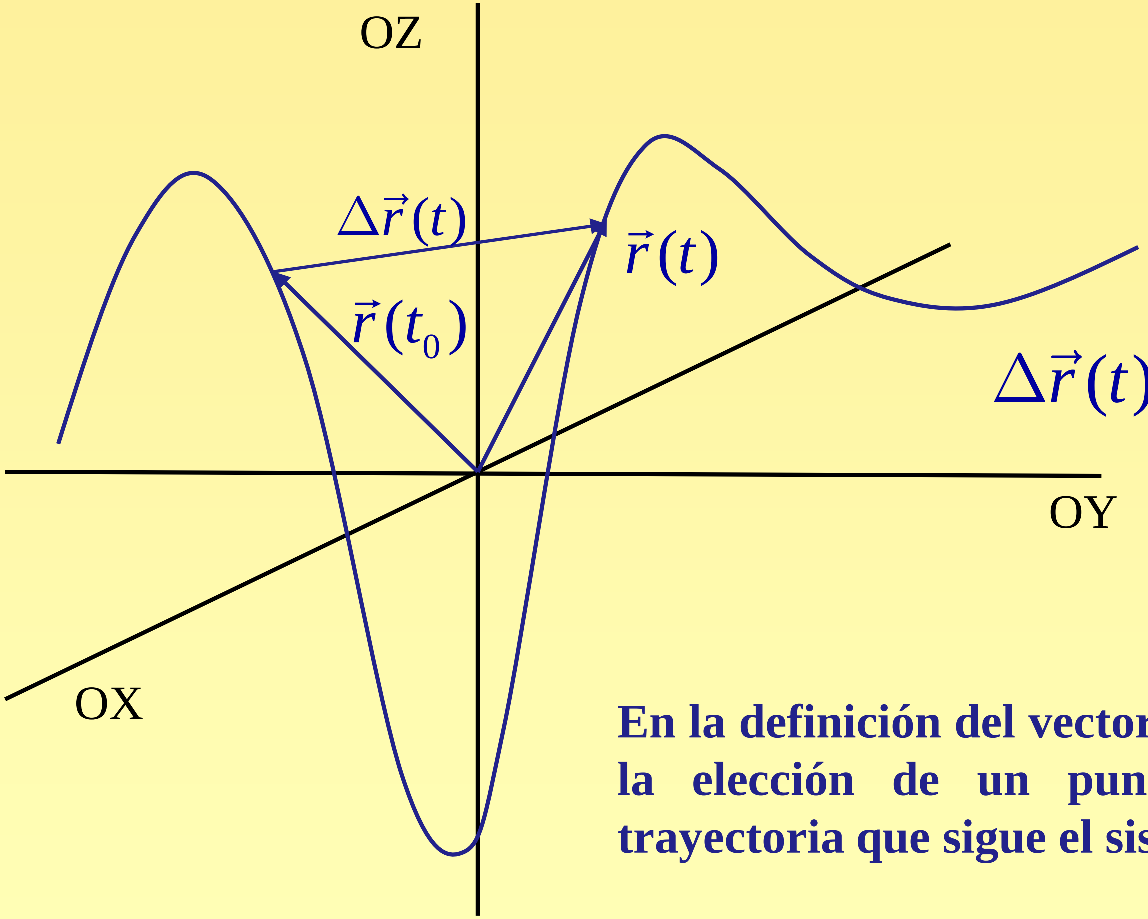
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y + z(t)\hat{u}_z$$

El objetivo principal de la cinemática, y de la mecánica en general, es determinar la trayectoria que sigue un sistema o lo que es lo mismo el vector posición del mismo.



El vector posición depende del sistema de referencia elegido.

Vector desplazamiento.- Es la magnitud que expresa la dirección y la distancia en línea recta comprendida entre dos puntos de la trayectoria.



$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \vec{r} - \vec{r}_0$$

En la definición del vector desplazamiento está implícita la elección de un punto de origen dentro de la trayectoria que sigue el sistema.

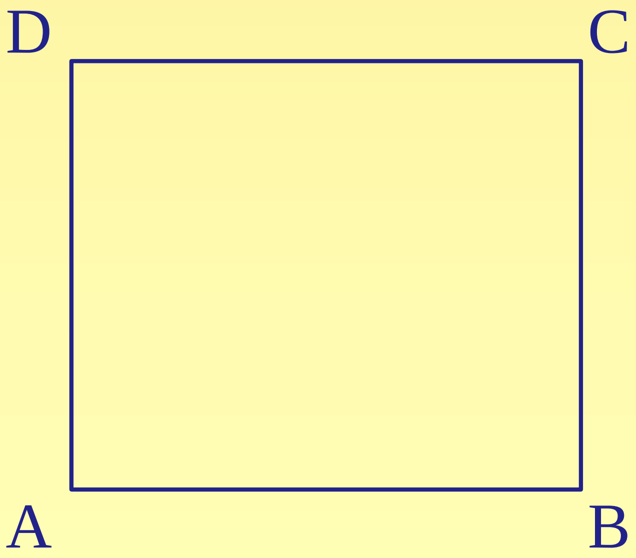
El vector desplazamiento no depende del sistema de referencia elegido si no hay desplazamiento relativo entre ellos.

Ejercicio.- Un atleta da una vuelta a una pista cuadrada de lado igual a 100m comenzando por su vértice A (figura).

(a).- Calcule el vector posición en cada uno de los vértices.

(b).- Calcule el vector desplazamiento respecto al vértice de partida.

(c).- ¿Cuál será el vector desplazamiento tras completar una vuelta a la pista.



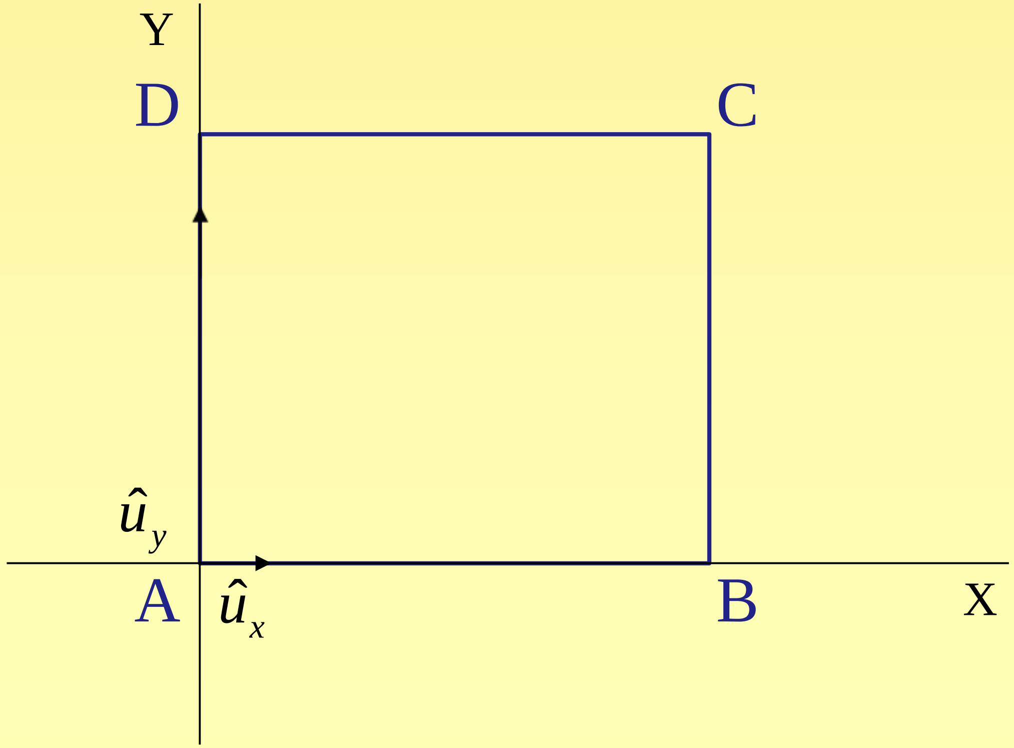
Ejercicio.- Un atleta da una vuelta a una pista cuadrada de lado igual a 100m comenzando por su vértice A (figura).

(a).- Calcule el vector posición en cada uno de los vértices.

(b).- Calcule el vector desplazamiento respecto al vértice de partida.

(c).- ¿Cuál será el vector desplazamiento tras completar una vuelta a la pista.

1.- Elegimos el sistema de referencia



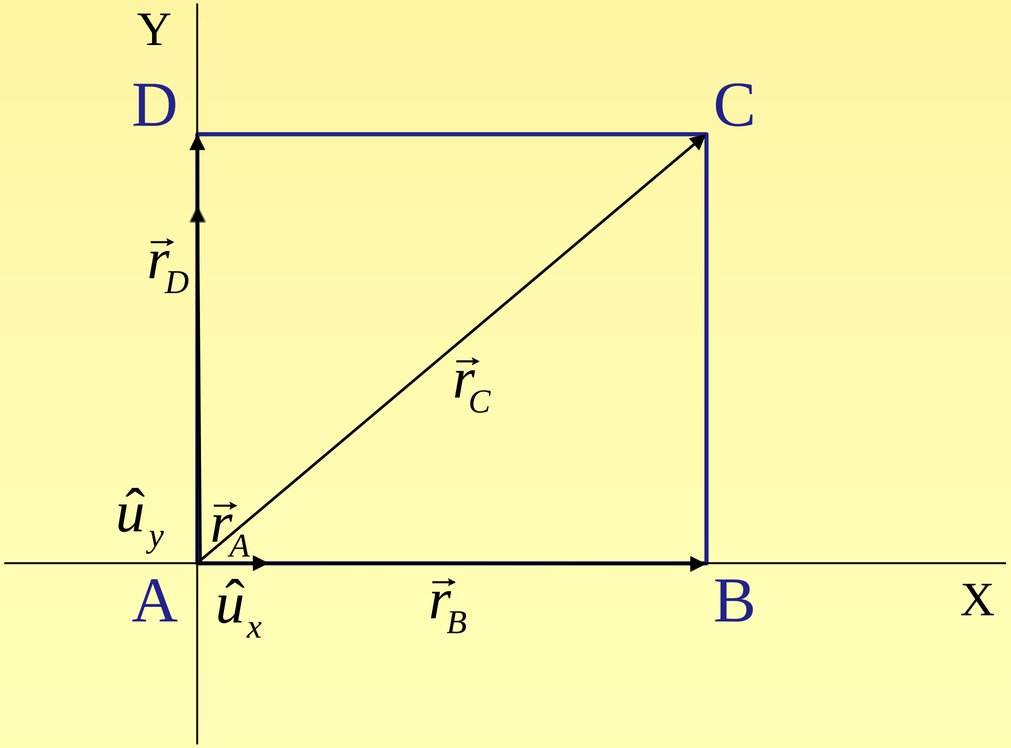
Ejercicio.- Un atleta da una vuelta a una pista cuadrada de lado igual a 100m comenzando por su vértice A (figura).

(a).- Calcule el vector posición en cada uno de los vértices.

(b).- Calcule el vector desplazamiento respecto al vértice de partida.

(c).- ¿Cuál será el vector desplazamiento tras completar una vuelta a la pista.

2.- Dibujamos los vectores posición que nos pide el enunciado



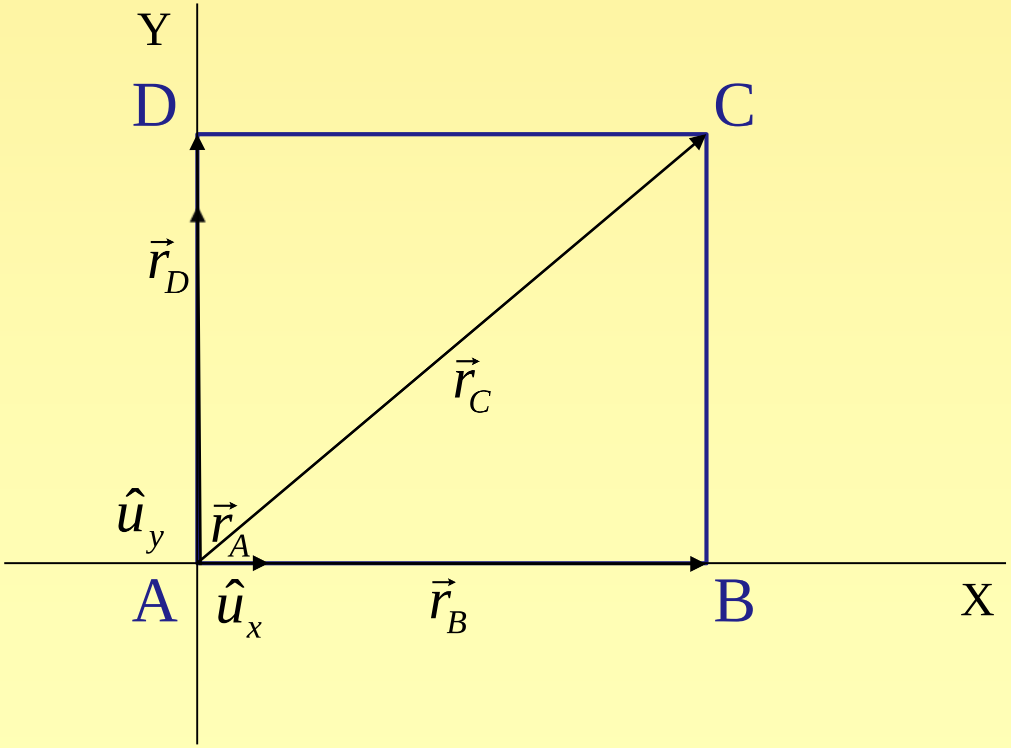
Ejercicio.- Un atleta da una vuelta a una pista cuadrada de lado igual a 100m comenzando por su vértice A (figura).

(a).- Calcule el vector posición en cada uno de los vértices.

(b).- Calcule el vector desplazamiento respecto al vértice de partida.

(c).- ¿Cuál será el vector desplazamiento tras completar una vuelta a la pista.

3.- Escribimos los vectores posición en función del sistema de referencia elegido



$$\vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,0)\ \text{m}$$

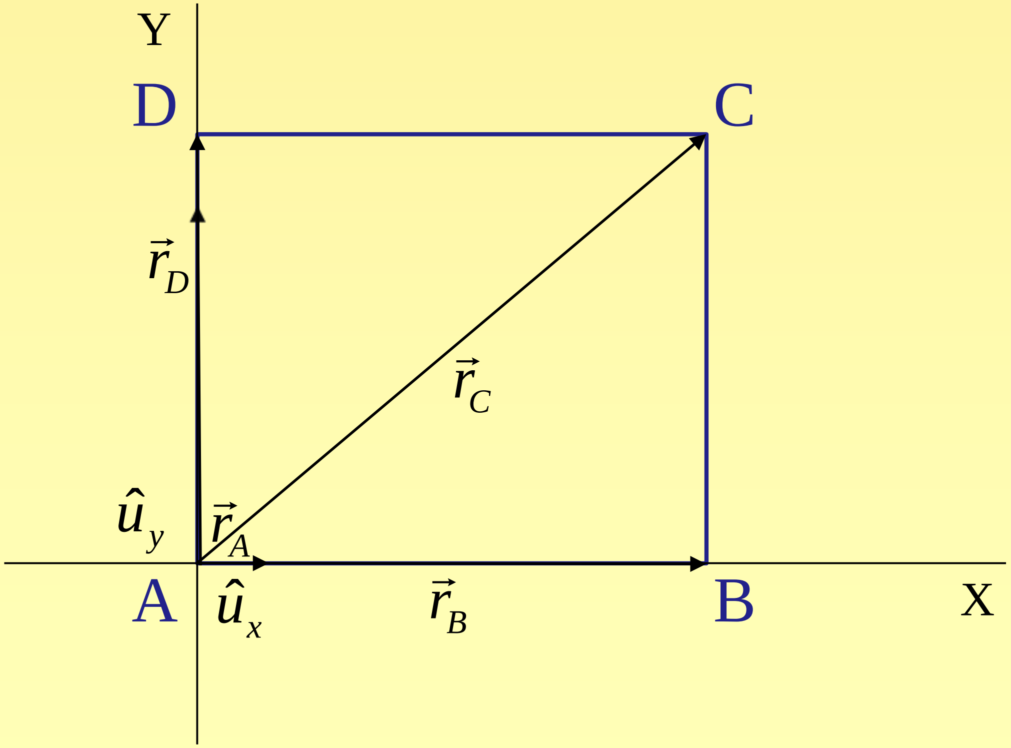
Ejercicio.- Un atleta da una vuelta a una pista cuadrada de lado igual a 100m comenzando por su vértice A (figura).

(a).- Calcule el vector posición en cada uno de los vértices.

(b).- Calcule el vector desplazamiento respecto al vértice de partida.

(c).- ¿Cuál será el vector desplazamiento tras completar una vuelta a la pista.

3.- Escribimos los vectores posición en función del sistema de referencia elegido



$$\vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,0)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_B = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,0)\ \text{m}$$

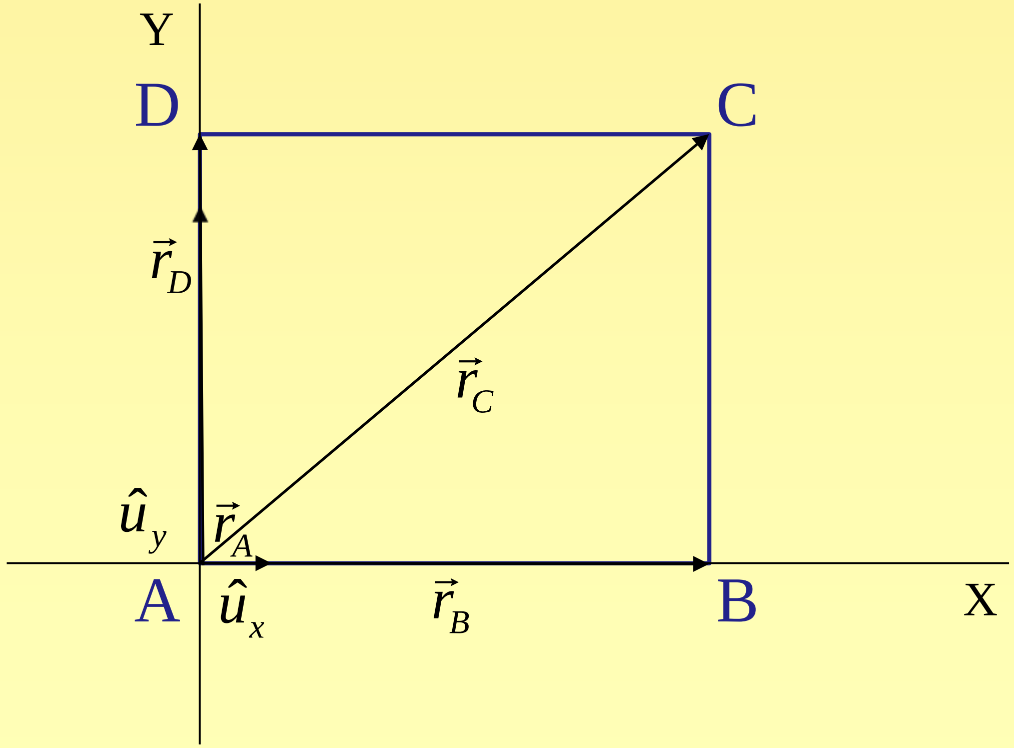
Ejercicio.- Un atleta da una vuelta a una pista cuadrada de lado igual a 100m comenzando por su vértice A (figura).

(a).- Calcule el vector posición en cada uno de los vértices.

(b).- Calcule el vector desplazamiento respecto al vértice de partida.

(c).- ¿Cuál será el vector desplazamiento tras completar una vuelta a la pista.

3.- Escribimos los vectores posición en función del sistema de referencia elegido



$$\vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,0)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_B = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,0)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_C = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,100)\ \text{m}$$

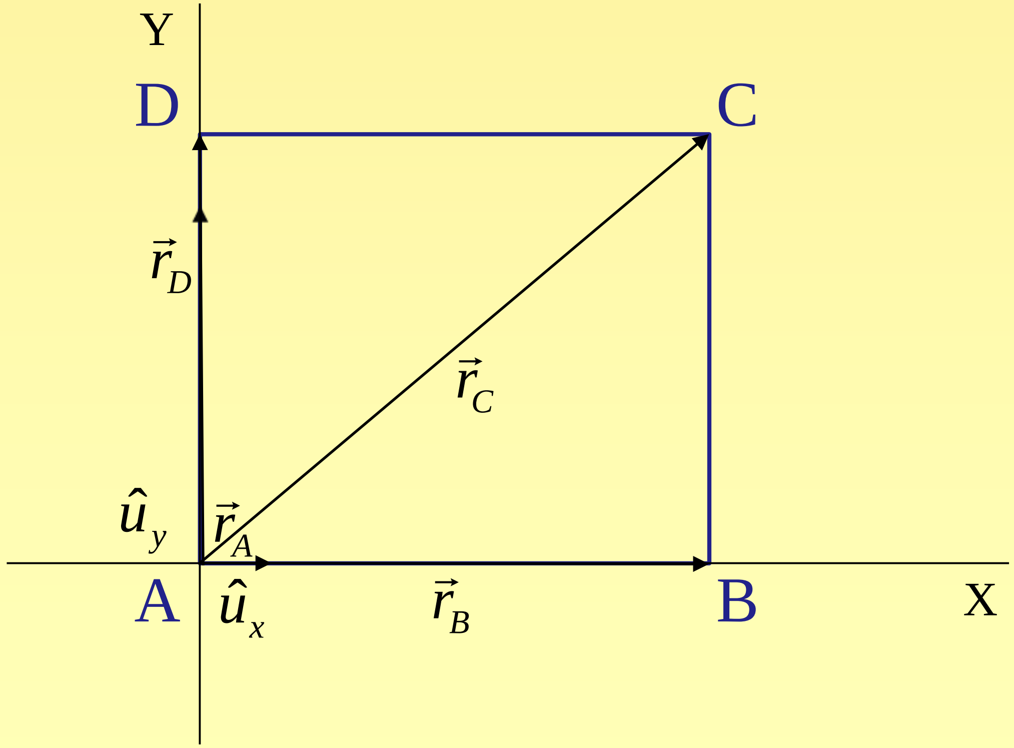
Ejercicio.- Un atleta da una vuelta a una pista cuadrada de lado igual a 100m comenzando por su vértice A (figura).

(a).- Calcule el vector posición en cada uno de los vértices.

(b).- Calcule el vector desplazamiento respecto al vértice de partida.

(c).- ¿Cuál será el vector desplazamiento tras completar una vuelta a la pista.

3.- Escribimos los vectores posición en función del sistema de referencia elegido



$$\vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,0)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_B = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,0)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_C = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,100)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_D = (0\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,100)\ \text{m}$$

Ejercicio.- Un atleta da una vuelta a una pista cuadrada de lado igual a 100m comenzando por su vértice A (figura).

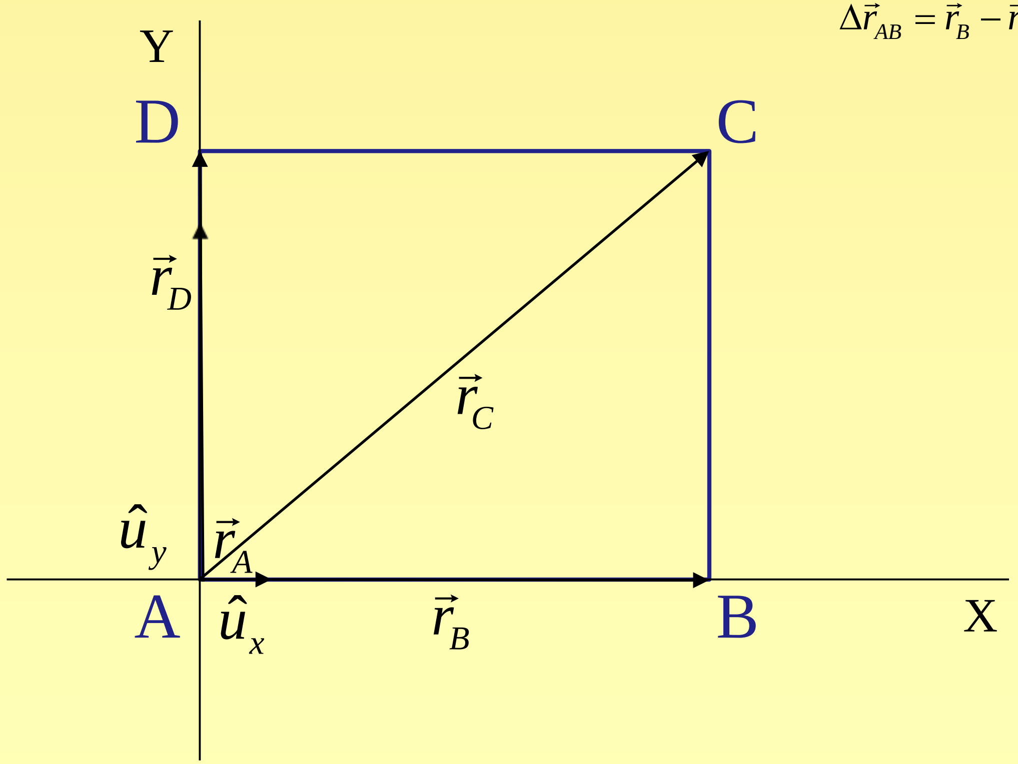
(a).- Calcule el vector posición en cada uno de los vértices.

(b).- Calcule el vector desplazamiento respecto al vértice de partida.

(c).- ¿Cuál será el vector desplazamiento tras completar una vuelta a la pista.

4.- Calculamos los vectores desplazamiento en cada uno de los vértices

$$\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100, 0)\ \text{m}$$



$$\vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0, 0)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_B = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100, 0)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_C = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,100)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_D = (0\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,100)\ \text{m}$$

Ejercicio.- Un atleta da una vuelta a una pista cuadrada de lado igual a 100m comenzando por su vértice A (figura).

(a).- Calcule el vector posición en cada uno de los vértices.

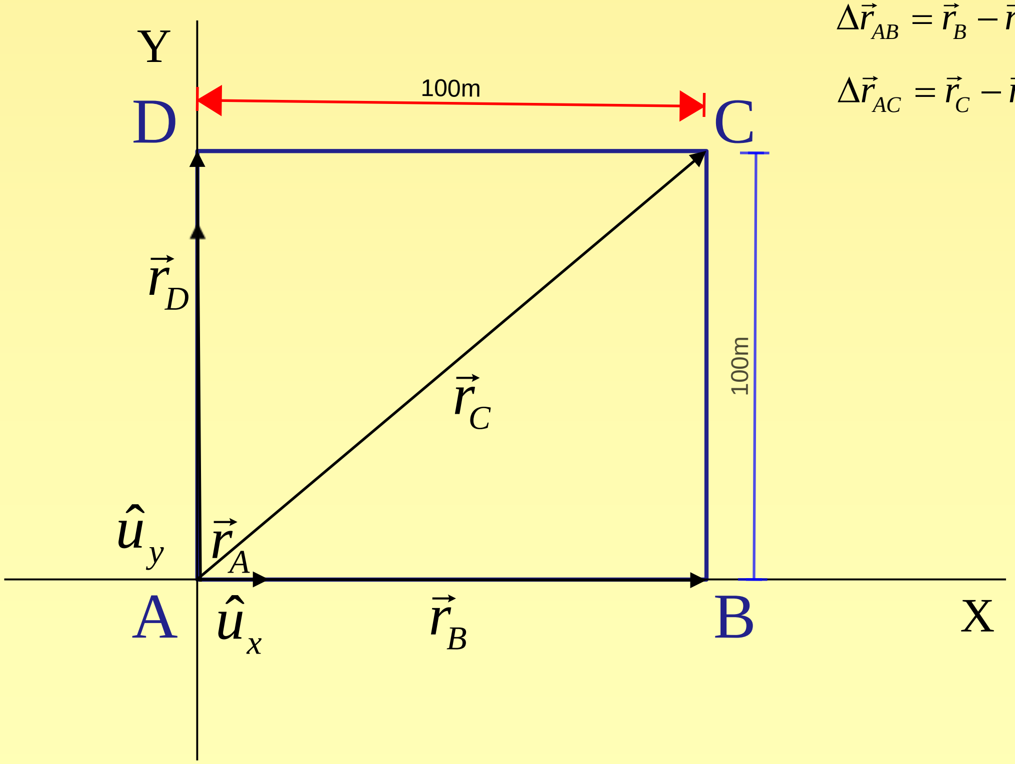
(b).- Calcule el vector desplazamiento respecto al vértice de partida.

(c).- ¿Cuál será el vector desplazamiento tras completar una vuelta a la pista.

4.- Calculamos los vectores desplazamiento en cada uno de los vértices

$$\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100, 0)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100, 100)\ \text{m}$$



$$\vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0, 0)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_B = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100, 0)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_C = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100, 100)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_D = (0\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0, 100)\ \text{m}$$

Ejercicio.- Un atleta da una vuelta a una pista cuadrada de lado igual a 100m comenzando por su vértice A (figura).

(a).- Calcule el vector posición en cada uno de los vértices.

(b).- Calcule el vector desplazamiento respecto al vértice de partida.

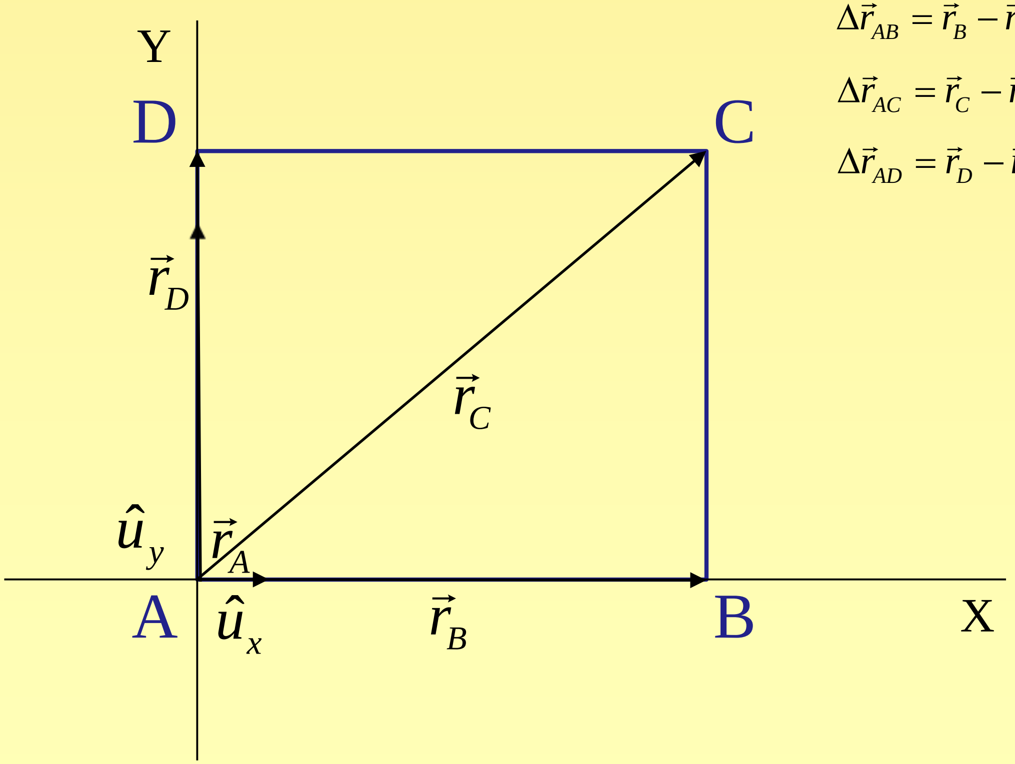
(c).- ¿Cuál será el vector desplazamiento tras completar una vuelta a la pista.

4.- Calculamos los vectores desplazamiento en cada uno de los vértices

$$\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100, 0)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,100)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AD} = \vec{r}_D - \vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,100)\ \text{m}$$



$$\vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0, 0)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_B = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100, 0)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_C = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,100)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_D = (0\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,100)\ \text{m}$$

Ejercicio.- Un atleta da una vuelta a una pista cuadrada de lado igual a 100m comenzando por su vértice A (figura).

(a).- Calcule el vector posición en cada uno de los vértices.

(b).- Calcule el vector desplazamiento respecto al vértice de partida.

(c).- ¿Cuál será el vector desplazamiento tras completar una vuelta a la pista.

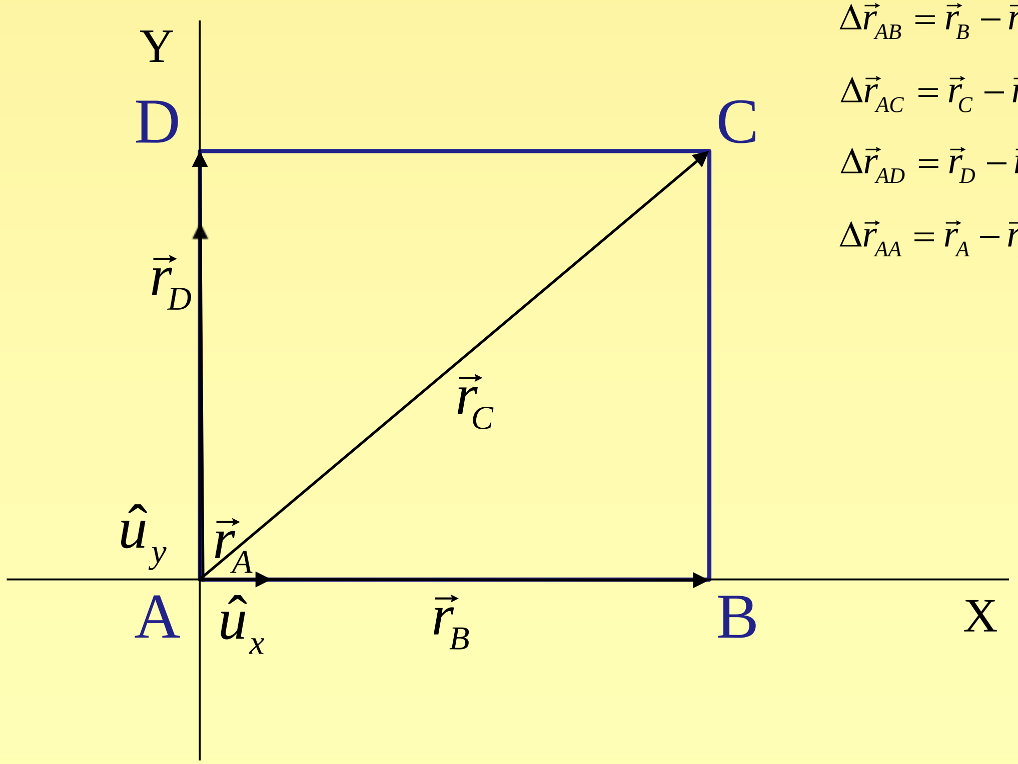
4.- Calculamos los vectores desplazamiento en cada uno de los vértices

$$\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,0)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,100)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AD} = \vec{r}_D - \vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,100)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AA} = \vec{r}_A - \vec{r}_A = (0,0)\ \text{m}$$



$$\vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,0)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_B = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,0)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_C = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,100)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_D = (0\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,100)\ \text{m}$$

Ejercicio.- Un atleta da una vuelta a una pista cuadrada de lado igual a 100m comenzando por su vértice A (figura).

(a).- Calcule el vector posición en cada uno de los vértices.

(b).- Calcule el vector desplazamiento respecto al vértice de partida.

(c).- ¿Cuál será el vector desplazamiento tras completar una vuelta a la pista.

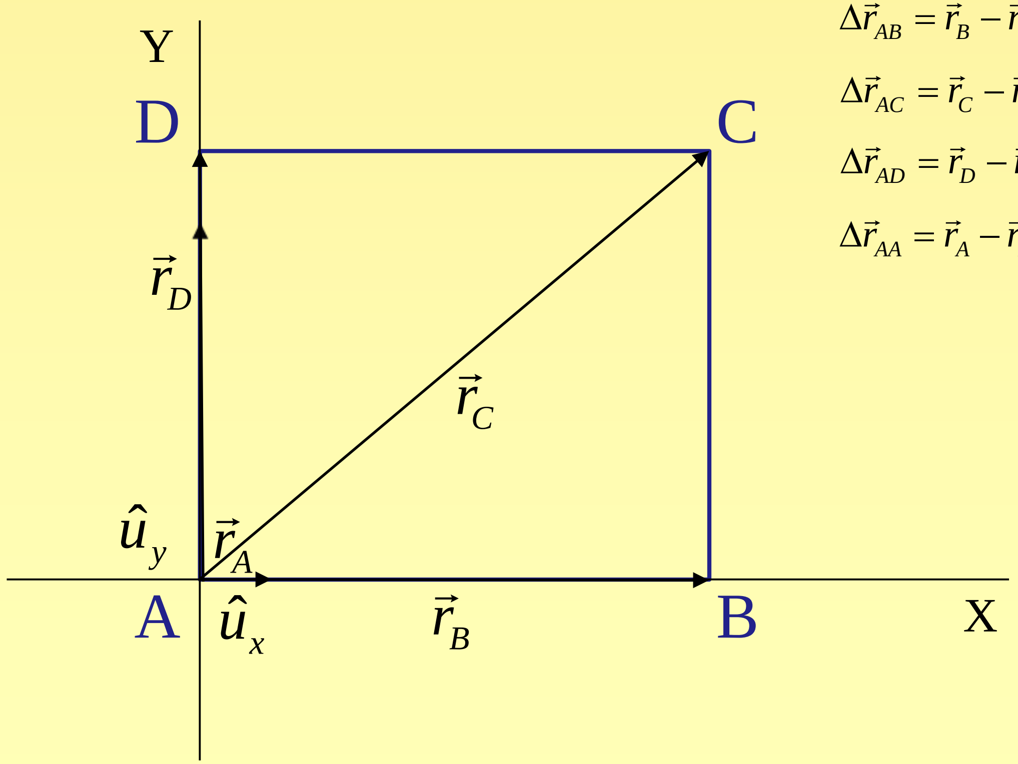
5.- El desplazamiento tras una vuela completa coincide con el desplazamiento en el vértice A, es decir (0,0)

$$\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100, 0)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,100)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AD} = \vec{r}_D - \vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,100)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AA} = \vec{r}_A - \vec{r}_A = (0,0)\ \text{m}$$



$$\vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,0)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_B = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,0)\ \text{m}$$

$$\vec{r}_C = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,100)\ \text{m}$$

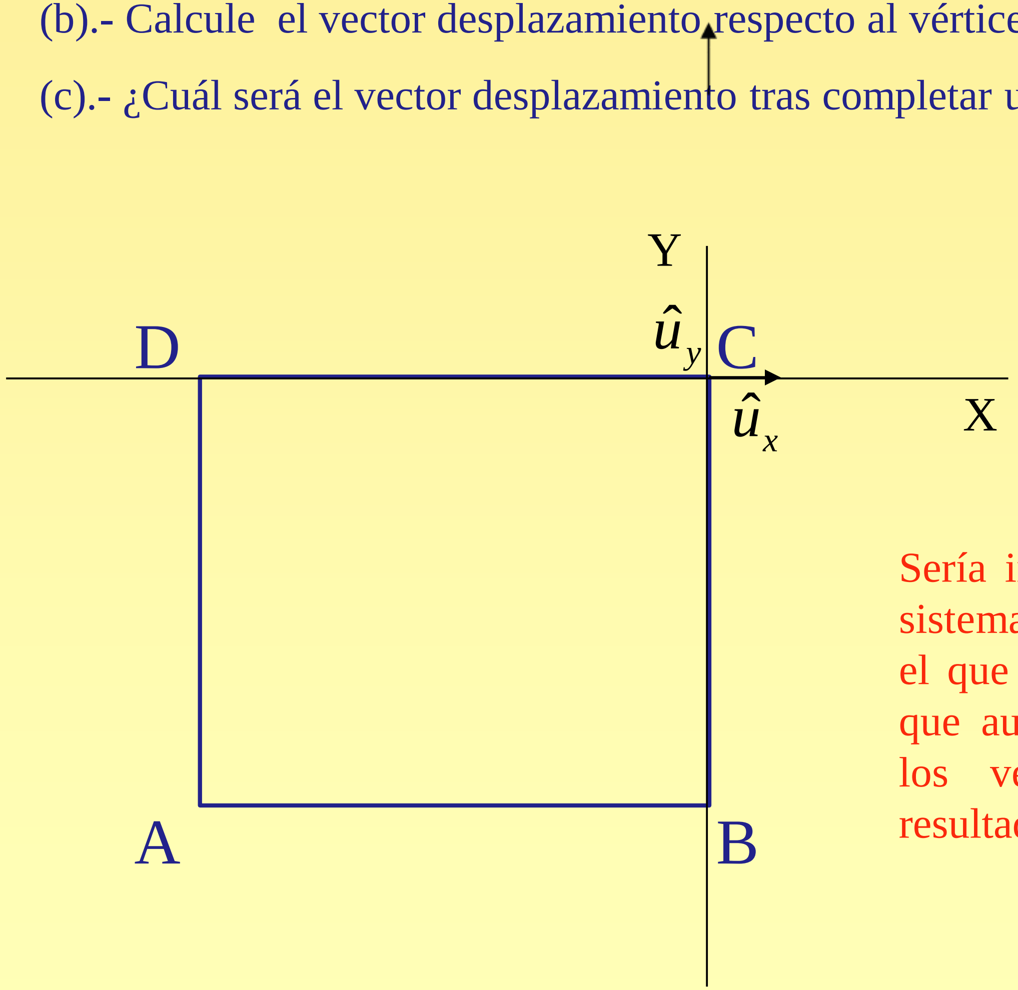
$$\vec{r}_D = (0\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,100)\ \text{m}$$

Ejercicio.- Un atleta da una vuelta a una pista cuadrada de lado igual a 100m comenzando por su vértice A (figura).

(a).- Calcule el vector posición en cada uno de los vértices.

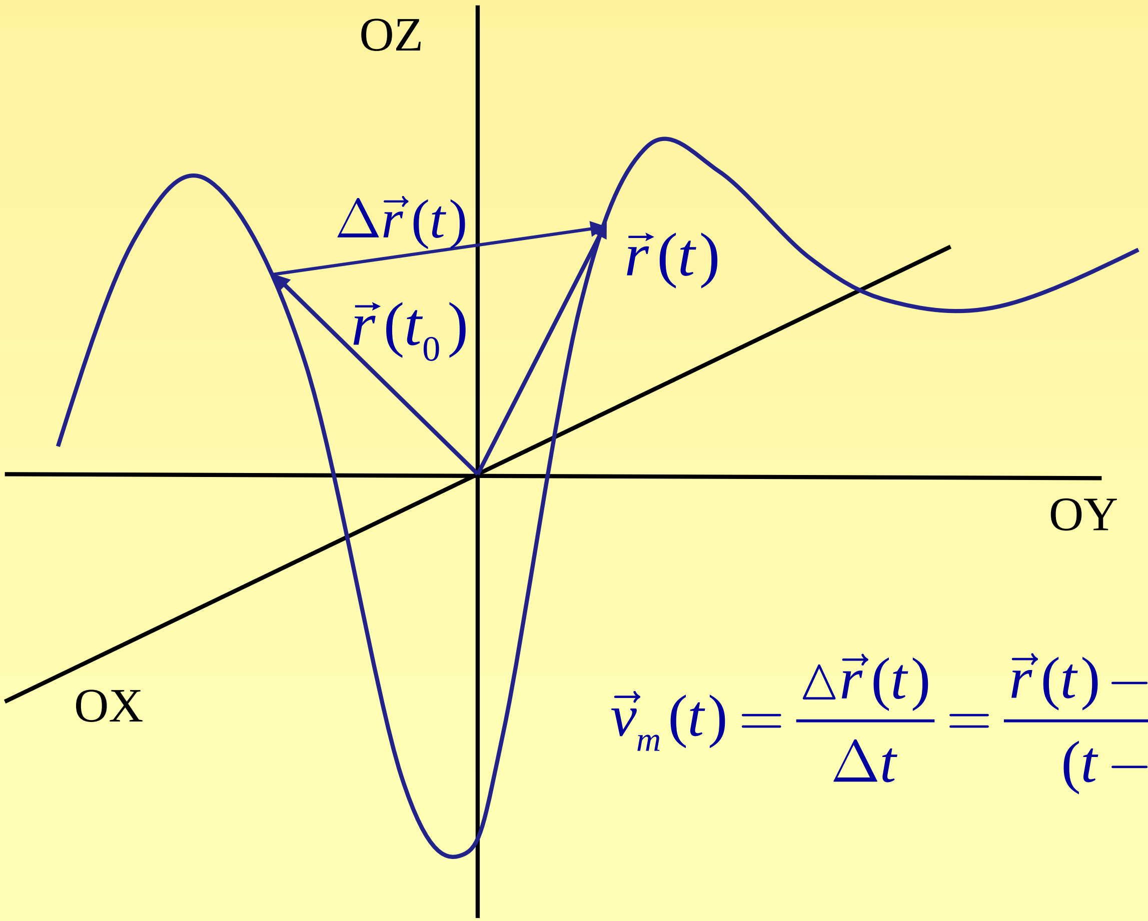
(b).- Calcule el vector desplazamiento respecto al vértice de partida.

(c).- ¿Cuál será el vector desplazamiento tras completar una vuelta a la pista.



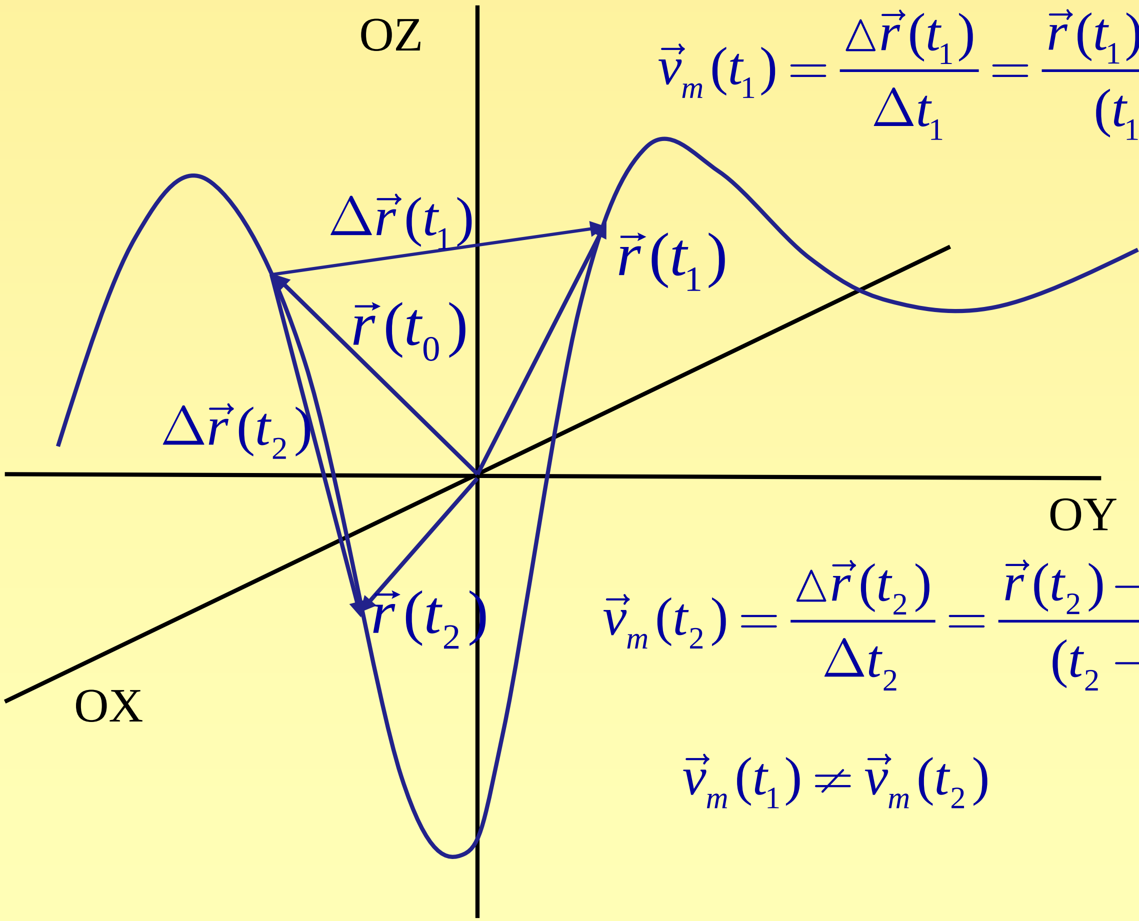
Sería interesante repetir el ejercicio eligiendo un sistema de referencia diferente, como por ejemplo el que se considera en la figura, y comprobando que aunque los vectores posición son diferentes los vectores desplazamiento dan el mismo resultado.

Vector velocidad media o velocidad promedio.- Dados dos puntos de la trayectoria de un sistema se define la velocidad media entre ambos como el cociente entre el vector desplazamiento y el tiempo que invierte el sistema en realizar el desplazamiento indicado por dicho vector.



$$\vec{v}_m(t) = \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{(t - t_0)} = \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

El vector velocidad promedio depende de los dos puntos de la trayectoria que estemos considerando. Así, para un punto inicial dado tendremos diferentes velocidades promedio para diferentes puntos de la trayectoria.



$$\vec{v}_m(t_1) = \frac{\Delta\vec{r}(t_1)}{\Delta t_1} = \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)}{(t_1 - t_0)} = \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t_1) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t_1}$$

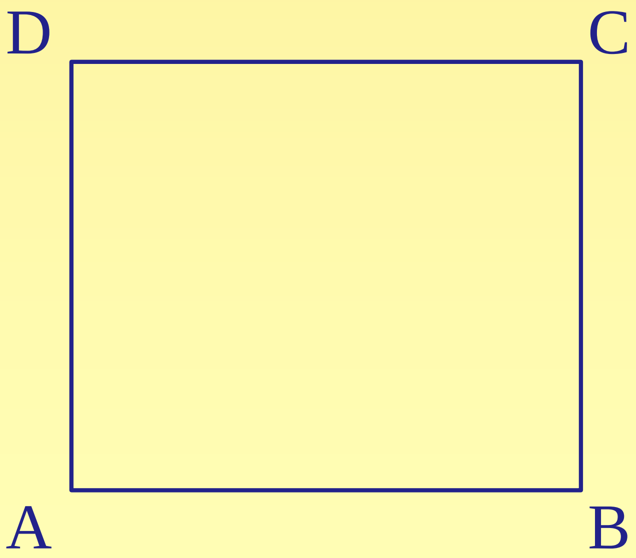
$$\vec{v}_m(t_2) = \frac{\Delta\vec{r}(t_2)}{\Delta t_2} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_0)}{(t_2 - t_0)} = \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t_2) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t_2}$$

$$\vec{v}_m(t_1) \neq \vec{v}_m(t_2)$$

Ejercicio.- Suponiendo que el atleta del problema anterior tarda en recorrer cada lado de la pista rectangular 20 s, calcule:

(a).- La velocidad media en cada uno de los vértices respecto al vértice inicial.

(b).- La velocidad media en toda la vuelta.

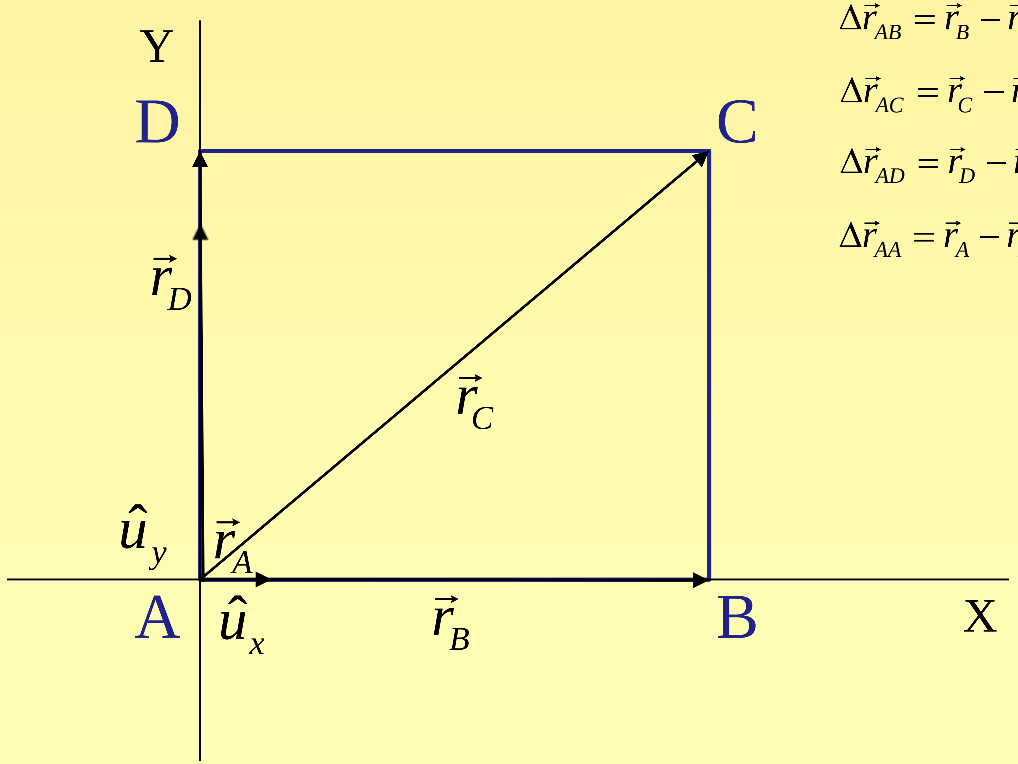


Ejercicio.- Suponiendo que el atleta del problema anterior tarda en recorrer cada lado de la pista rectangular 20 s, calcule:

(a).- La velocidad media en cada uno de los vértices respecto al vértice inicial.

(b).- La velocidad media en toda la vuelta.

1.- Ya habíamos calculado el desplazamiento entre el vértice inicial y el resto de los vértices.



$$\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100, 0)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,100)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AD} = \vec{r}_D - \vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,100)\ \text{m}$$

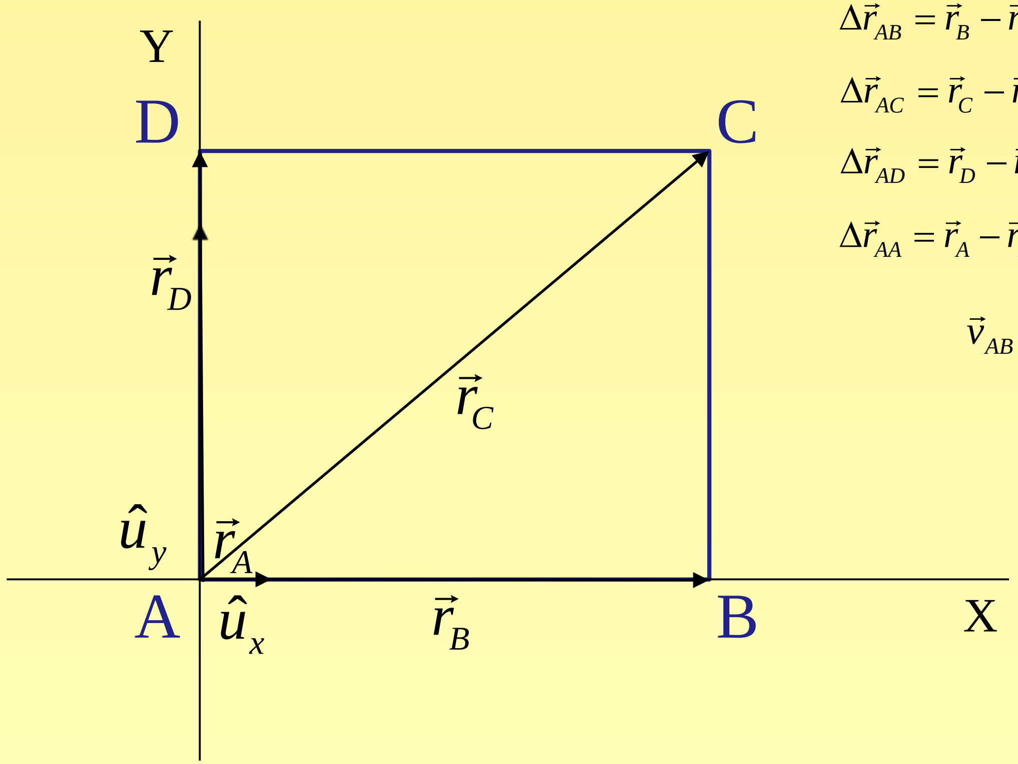
$$\Delta\vec{r}_{AA} = \vec{r}_A - \vec{r}_A = (0,0)\ \text{m}$$

Ejercicio.- Suponiendo que el atleta del problema anterior tarda en recorrer cada lado de la pista rectangular 20 s, calcule:

(a).- La velocidad media en cada uno de los vértices respecto al vértice inicial.

(b).- La velocidad media en toda la vuelta.

2.- A continuación aplicamos la definición de velocidad promedio.



$$\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100, 0)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,100)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AD} = \vec{r}_D - \vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,100)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AA} = \vec{r}_A - \vec{r}_A = (0, 0)\ \text{m}$$

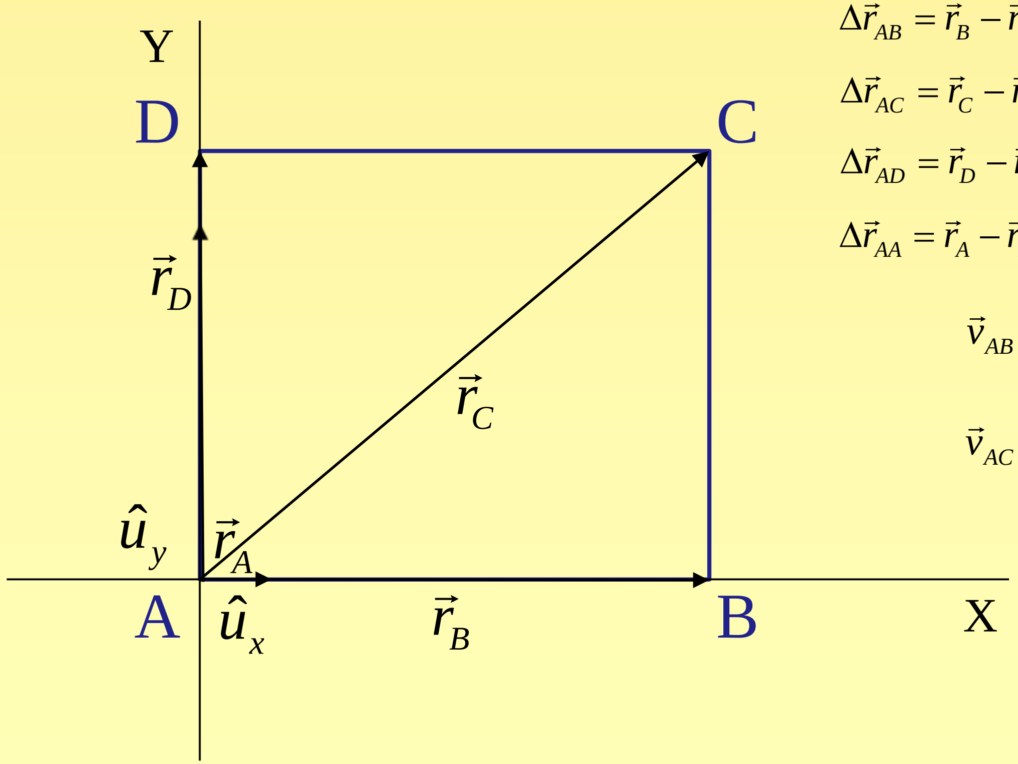
$$\vec{v}_{AB} = \frac{\Delta\vec{r}_{AB}}{\Delta t} = \frac{(100, 0)}{20}\ \text{m/s} = (5, 0)\ \text{m/s}$$

Ejercicio.- Suponiendo que el atleta del problema anterior tarda en recorrer cada lado de la pista rectangular 20 s, calcule:

(a).- La velocidad media en cada uno de los vértices respecto al vértice inicial.

(b).- La velocidad media en toda la vuelta.

2.- A continuación aplicamos la definición de velocidad promedio.



$$\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,0)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,100)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AD} = \vec{r}_D - \vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,100)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AA} = \vec{r}_A - \vec{r}_A = (0,0)\ \text{m}$$

$$\vec{v}_{AB} = \frac{\Delta\vec{r}_{AB}}{\Delta t} = \frac{(100,0)}{20}\ \text{m/s} = (5,0)\ \text{m/s}$$

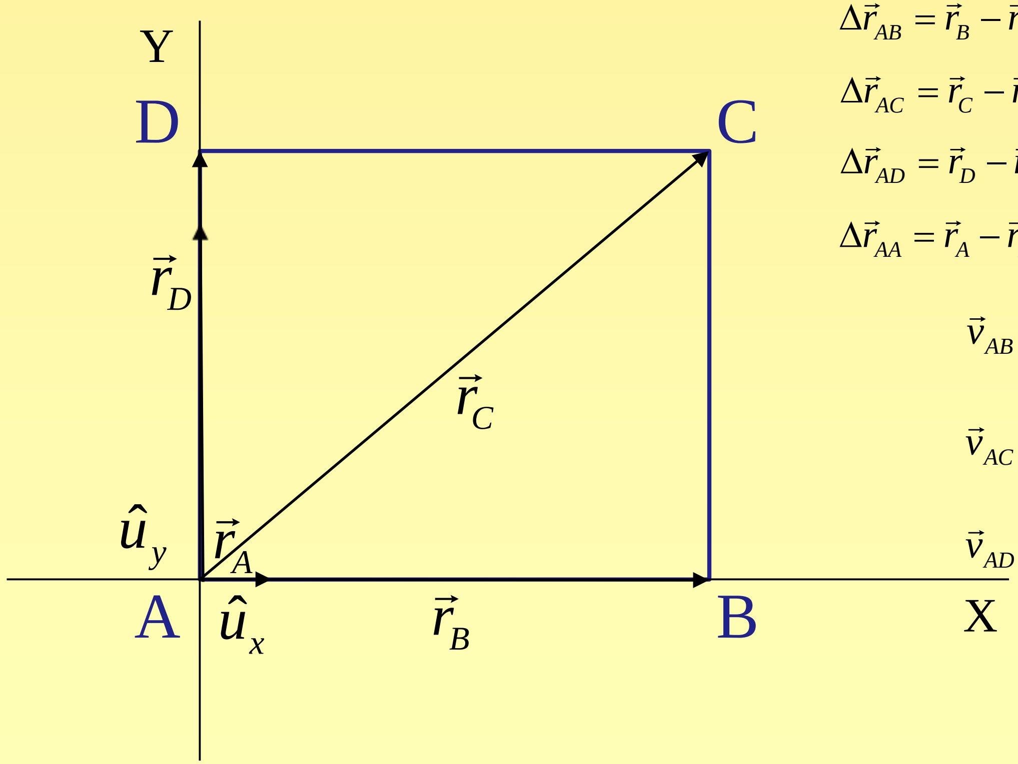
$$\vec{v}_{AC} = \frac{\Delta\vec{r}_{AC}}{\Delta t} = \frac{(100,100)}{40}\ \text{m/s} = (2.5,2.5)\ \text{m/s}$$

Ejercicio.- Suponiendo que el atleta del problema anterior tarda en recorrer cada lado de la pista rectangular 20 s, calcule:

(a).- La velocidad media en cada uno de los vértices respecto al vértice inicial.

(b).- La velocidad media en toda la vuelta.

2.- A continuación aplicamos la definición de velocidad promedio.



$$\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100, 0)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,100)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AD} = \vec{r}_D - \vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,100)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AA} = \vec{r}_A - \vec{r}_A = (0, 0)\ \text{m}$$

$$\vec{v}_{AB} = \frac{\Delta\vec{r}_{AB}}{\Delta t} = \frac{(100, 0)}{20}\ \text{m/s} = (5, 0)\ \text{m/s}$$

$$\vec{v}_{AC} = \frac{\Delta\vec{r}_{AC}}{\Delta t} = \frac{(100,100)}{40}\ \text{m/s} = (2.5, 2.5)\ \text{m/s}$$

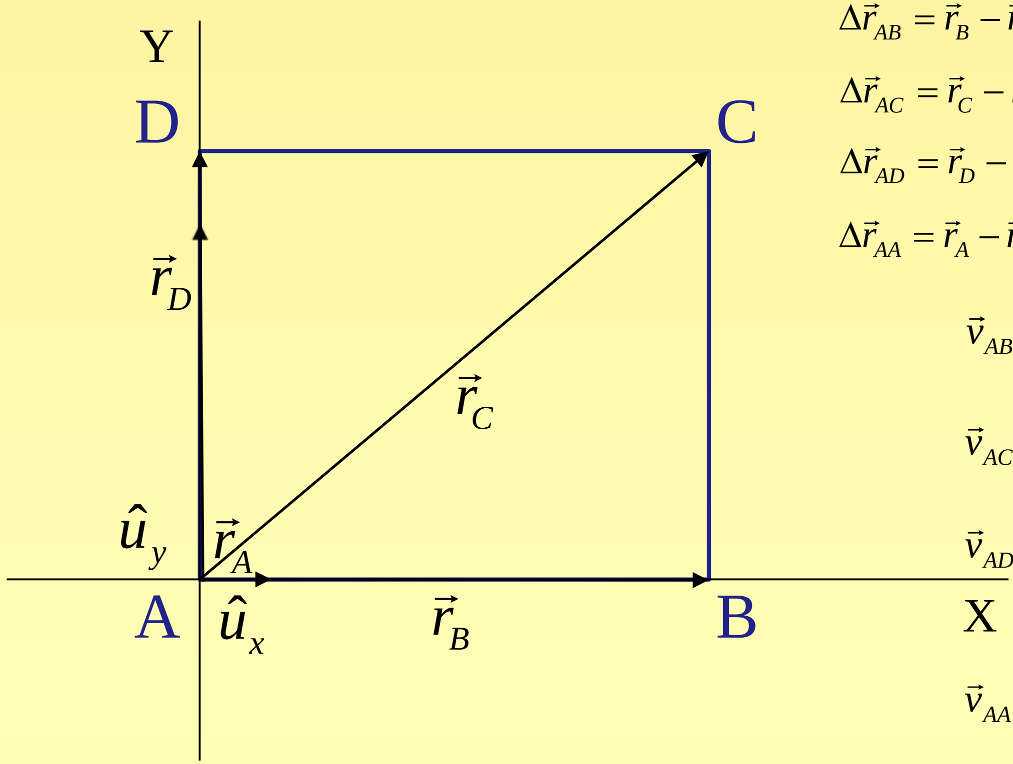
$$\vec{v}_{AD} = \frac{\Delta\vec{r}_{AD}}{\Delta t} = \frac{(0,100)}{60}\ \text{m/s} = (0, 5/3)\ \text{m/s} = (0,1.667)\ \text{m/s}$$

Ejercicio.- Suponiendo que el atleta del problema anterior tarda en recorrer cada lado de la pista rectangular 20 s, calcule:

(a).- La velocidad media en cada uno de los vértices respecto al vértice inicial.

(b).- La velocidad media en toda la vuelta.

2.- A continuación aplicamos la definición de velocidad promedio.



$$\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100, 0)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (100\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (100,100)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AD} = \vec{r}_D - \vec{r}_A = (0\ \hat{u}_x + 100\ \hat{u}_y)\ \text{m-}(0\ \hat{u}_x + 0\ \hat{u}_y)\ \text{m} = (0,100)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{AA} = \vec{r}_A - \vec{r}_A = (0, 0)\ \text{m}$$

$$\vec{v}_{AB} = \frac{\Delta\vec{r}_{AB}}{\Delta t} = \frac{(100, 0)}{20}\ \text{m/s} = (5, 0)\ \text{m/s}$$

$$\vec{v}_{AC} = \frac{\Delta\vec{r}_{AC}}{\Delta t} = \frac{(100,100)}{40}\ \text{m/s} = (2.5, 2.5)\ \text{m/s}$$

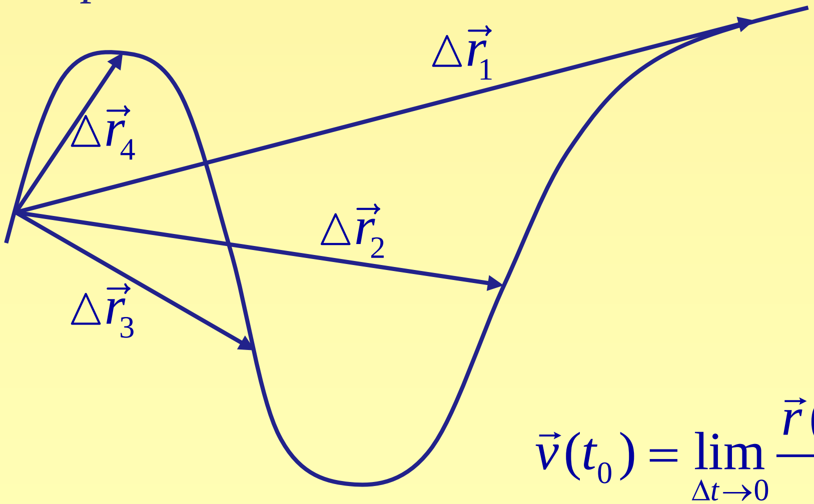
$$\vec{v}_{AD} = \frac{\Delta\vec{r}_{AD}}{\Delta t} = \frac{(0,100)}{60}\ \text{m/s} = (0, 5/3)\ \text{m/s} = (0,1.667)\ \text{m/s}$$

$$\vec{v}_{AA} = \frac{\Delta\vec{r}_{AA}}{\Delta t} = \frac{(0, 0)}{80}\ \text{m/s} = (0, 0)\ \text{m/s}$$

Es interesante remarcar que el vector velocidad promedio en una vuelta completa es cero

Si consideramos puntos cada vez más cercanos al punto de referencia t_0, el vector desplazamiento se hará cada vez más pequeño, es decir, tenderá a cero, pero también el tiempo que tarda el sistema en desplazarse tenderá a cero y tendríamos, desde el punto de vista matemático, una indeterminación. La solución de dicha indeterminación es, por definición, lo que se conoce con el nombre de la derivada. Por tanto podemos definir:

Vector velocidad instantánea.- Se define la velocidad instantánea de un sistema en un punto como el límite de la velocidad promedio en el punto cuando Δt tiende a cero que es matemáticamente equivalente a la derivada con respecto al tiempo del vector posición en dicho punto.



$$\left|\Delta\vec{r}_1\right| > \left|\Delta\vec{r}_2\right| > \left|\Delta\vec{r}_3\right| > \left|\Delta\vec{r}_4\right| > .....$$

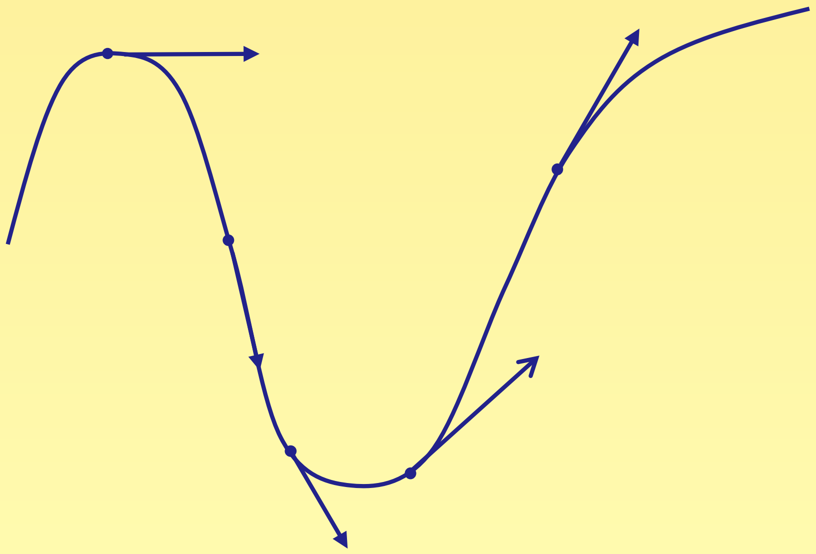
$$\Updownarrow$$

$$\left|\Delta t_1\right| > \left|\Delta t_2\right| > \left|\Delta t_3\right| > \left|\Delta t_4\right| > ...$$

$$\vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(\Delta t)}{\Delta t} = \left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{t_0}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}}$$

Dirección y sentido del vector velocidad instantánea.- De la definición se deduce que el vector velocidad instantánea tiene la misma dirección que el vector $d\vec{r}$ y, por lo tanto, es tangente en todos los puntos a la trayectoria que sigue el sistema.



Ejercicio.- Suponga que una partícula que se mueve en tres dimensiones tiene un vector de posición de la forma

$$\vec{r} = (4+2t)\hat{u}_x + \left(3+5t+4t^2\right)\hat{u}_y + \left(2-2t-3t^2\right)\hat{u}_z$$

donde la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos. Calcule el vector velocidad instantánea.

1). Como acabamos de ver, por definición, la velocidad instantánea es igual a la derivada respecto al tiempo del vector posición.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\left[(4+2t)\hat{u}_x + \left(3+5t+4t^2\right)\hat{u}_y + \left(2-2t-3t^2\right)\hat{u}_z\right]}{dt} =$$

$$= \frac{d(4+2t)}{dt}\hat{u}_x + \frac{d\left(3+5t+4t^2\right)}{dt}\hat{u}_y + \frac{d\left(2-2t-3t^2\right)}{dt}\hat{u}_z =$$

$$= 2\hat{u}_x + (5+8t)\hat{u}_y - (2+6t)\hat{u}_z$$

Ejercicio.- Suponga que una partícula se mueve en tres dimensiones con una velocidad

$$\vec{v}(t) = (4+2t)\hat{u}_x + 4t^3\hat{u}_y - 3t^2\hat{u}_z$$

donde la velocidad se mide en metros partidos por segundo y el tiempo en segundos. Sabiendo que en el instante t=0 s la partícula está en una posición espacial dada por $\vec{r}_0 = 4\hat{u}_x - 3\hat{u}_z$, calcule su posición en el instante t=4 s.

1). Como acabamos de ver, por definición, la velocidad instantánea es igual a la derivada respecto al tiempo del vector posición.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{v}(t)dt = d\vec{r}(t) \Rightarrow d\vec{r}(t) = \vec{v}(t)dt \Rightarrow \int d\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt + \overrightarrow{cte}$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \int\left[(4+2t)\hat{u}_x + 4t^3\hat{u}_y - 3t^2\hat{u}_z\right]dt + \overrightarrow{cte} = \left[\int(4+2t)\,dt\right]\hat{u}_x + \left(\int 4t^3dt\right)\hat{u}_y - \left(\int 3t^2dt\right)\hat{u}_z + \overrightarrow{cte} =$$

$$= (4t+t^2)\hat{u}_x + t^4\hat{u}_y - t^3\hat{u}_z + \overrightarrow{cte}$$

2). Para determinar la constante de integración, utilizamos que en el instante inicial la partícula se encuentra en $4\hat{u}_x - 3\hat{u}_z$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}(t=0) = (4\cdot 0 + 0^2)\hat{u}_x + 0^4\hat{u}_y - 0^3\hat{u}_z + \overrightarrow{cte} = \overrightarrow{cte} \\ \vec{r}(t=0) = 4\hat{u}_x - 3\hat{u}_z \end{array}\right| \Rightarrow \overrightarrow{cte} = 4\hat{u}_x - 3\hat{u}_z$$

3). Con el valor de la constante, escribimos el vector posición como función del tiempo.

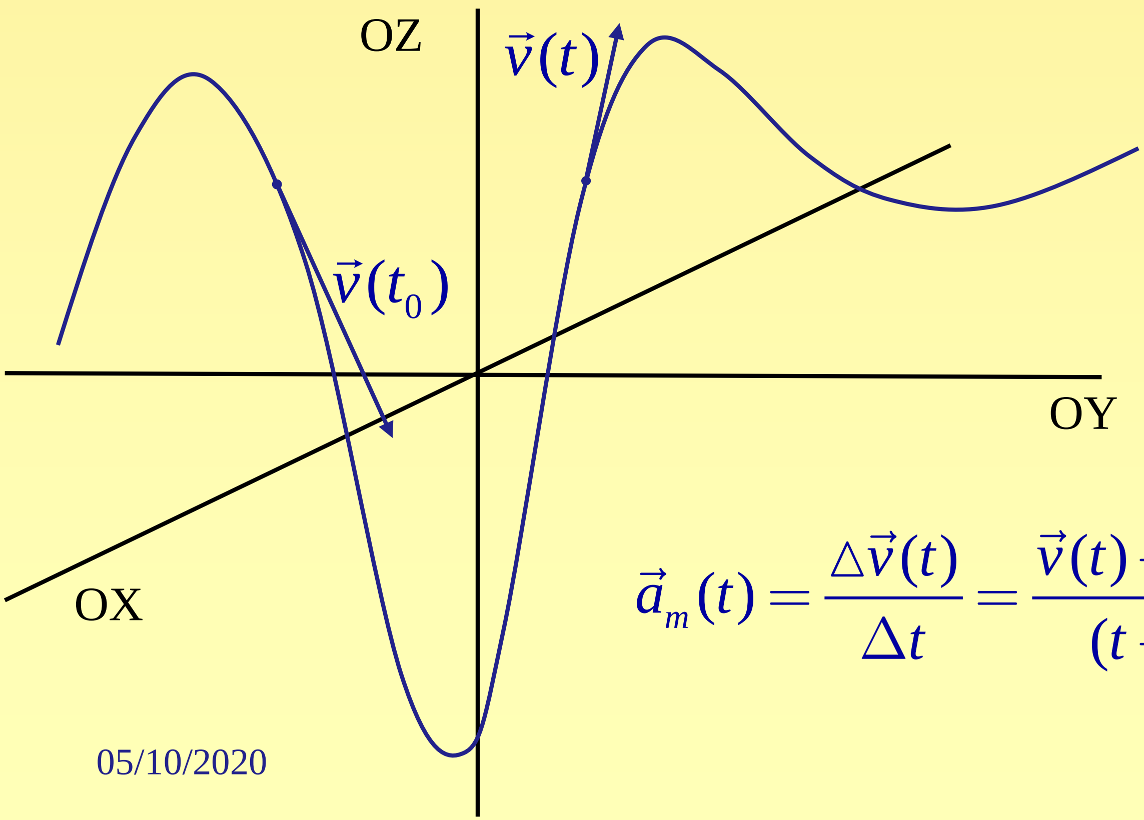
$$\vec{r}(t) = (4t+t^2)\hat{u}_x + t^4\hat{u}_y - t^3\hat{u}_z + \overrightarrow{cte} = (4t+t^2)\hat{u}_x + t^4\hat{u}_y - t^3\hat{u}_z + 4\hat{u}_x - 3\hat{u}_z = (4+4t+t^2)\hat{u}_x + t^4\hat{u}_y - (3+t^3)\hat{u}_z$$

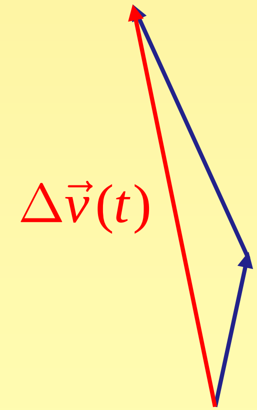
4). En la expresión hallada, sustituimos el tiempo por 4s.

$$\vec{r}(t=4) = (4+4\cdot 4+4^2)\hat{u}_x + 4^4\hat{u}_y - (3+4^3)\hat{u}_z = 36\hat{u}_x + 256\hat{u}_y - 67\hat{u}_z$$

Como hemos visto en los ejemplos, el vector velocidad instantánea varía en general en cada punto de la trayectoria o lo que es lo mismo en cada instante de tiempo. En este apartado vamos a definir el concepto de aceleración que va a tener en cuenta este hecho.

Vector aceleración media o aceleración promedio.- Dados dos puntos de la trayectoria de un sistema se define la aceleración media entre ambos como el cociente entre la diferencia de las velocidades instantáneas en ambos puntos y el tiempo que invierte el sistema en desplazarse entre los dos puntos.





$$\vec{a}_m(t) = \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{(t - t_0)} = \frac{\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)}{\Delta t}$$

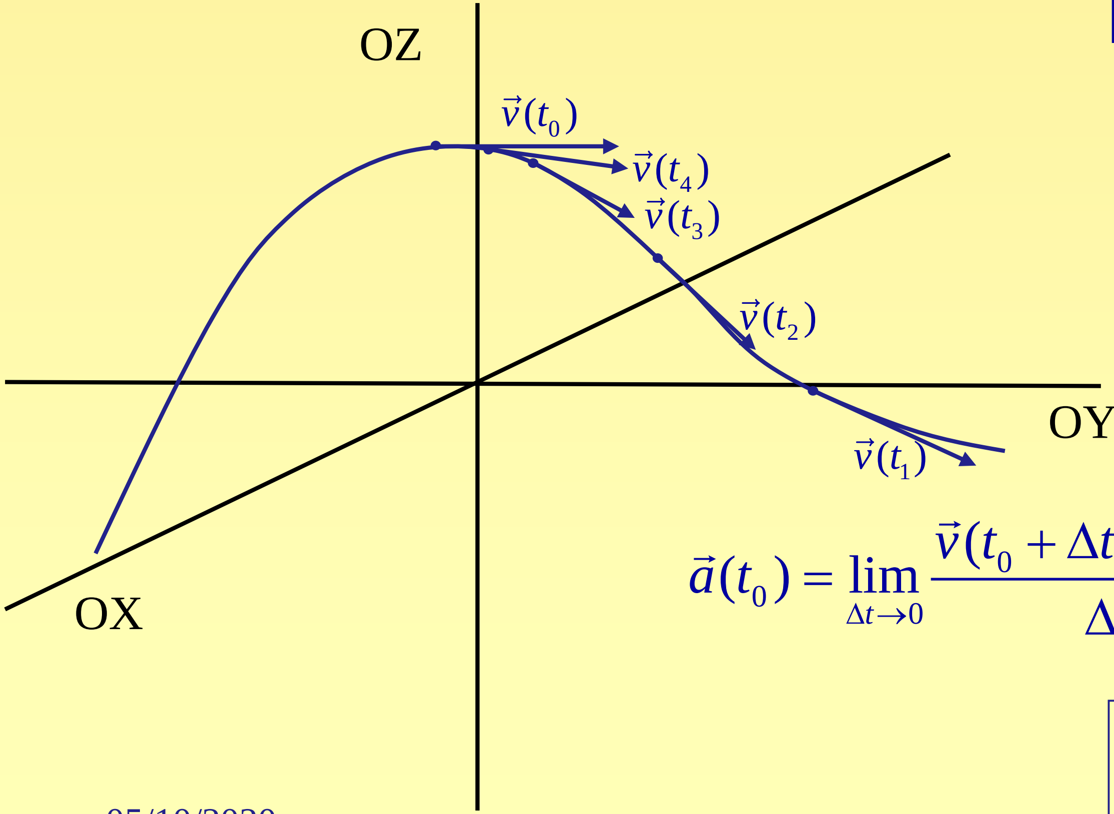
Al igual que hicimos con la velocidad, a partir del concepto de la aceleración promedio podemos definir la aceleración instantánea mediante un paso al límite.

Vector aceleración instantánea.- La aceleración instantánea en un punto se define como el límite de la aceleración promedio en el punto cuando Δt tiende a cero que es matemáticamente equivalente a la derivada de la velocidad (instantánea) en ese punto respecto al tiempo.

$$\left|\Delta\vec{v}_1\right| > \left|\Delta\vec{v}_2\right| > \left|\Delta\vec{v}_3\right| > \left|\Delta\vec{v}_4\right| > \ldots..$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\Delta t_1\right| > \left|\Delta t_2\right| > \left|\Delta t_3\right| > \left|\Delta t_4\right| > \ldots$$



$$\vec{a}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}(\Delta t)}{\Delta t} = \left.\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right|_{t_0}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}}$$

Ejercicio.- Suponga que una partícula que se mueve en tres dimensiones tiene un vector de posición de la forma

$$\vec{r} = (4+2t)\hat{u}_x + \left(3+5t+4t^2\right)\hat{u}_y + \left(2-2t-3t^2\right)\hat{u}_z$$

donde la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos. Calcule el vector aceleración instantánea.

1). En el problema anterior habíamos calculado el vector velocidad instantánea para el vector posición que propone el enunciado del ejercicio, habiendo obtenido.

$$\vec{v}(t) = 2\hat{u}_x + (5+8t)\hat{u}_y - (2+6t)\hat{u}_z$$

2). A continuación, utilizamos que, por definición, el vector aceleración instantánea es igual a la derivada del vector velocidad instantánea respecto al tiempo.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\,2\hat{u}_x + (5+8t)\hat{u}_y - (2+6t)\hat{u}_z}{dt} = \frac{d\,2}{dt}\hat{u}_x + \frac{d\,(5+8t)}{dt}\hat{u}_y - \frac{d\,(2+6t)}{dt}\hat{u}_z =$$

$$= 0\hat{u}_x + 8\hat{u}_y - 6\hat{u}_z = 8\hat{u}_y - 6\hat{u}_z = (0,8,-6)$$

Ejercicio.- Suponga que una partícula que se mueve en tres dimensiones tiene un vector aceleración instantánea de la forma:

$$\vec{a}(t) = t^2\hat{u}_x + 2t\hat{u}_y - \sin(t)\hat{u}_z$$

donde el tiempo se mide en segundos y la aceleración se mide en metros partido por segundo cuadrado. Calcule el vector posición en el instante t=5 s sabiendo que en el instante inicial la partícula está localizada en el punto (-1,-2,3) m y el vector velocidad en dicho instante de tiempo es:

$$\vec{v}(t=0) = \left(\hat{u}_x - 4\hat{u}_y + 3\hat{u}_z\right) \text{ m/s}$$

1). Utilizando que, por definición, el vector aceleración instantánea es igual a la derivada del vector velocidad instantánea respecto al tiempo obtenemos.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{a}(t)dt = d\vec{v}(t) \Rightarrow d\vec{v}(t) = \vec{a}(t)dt \Rightarrow \int d\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt + \overrightarrow{cte} \Rightarrow$$

$$\vec{v}(t) = \int\left(t^2\hat{u}_x + 2t\hat{u}_y - \sin(t)\hat{u}_z\right)dt + \overrightarrow{cte} = \left(\int t^2 dt\right)\hat{u}_x + \left(2\int t dt\right)\hat{u}_y - \left(\int \sin(t)dt\right)\hat{u}_z + \overrightarrow{cte} = \frac{t^3}{3}\hat{u}_x + t^2\hat{u}_y + \cos(t)\hat{u}_z + \overrightarrow{cte}$$

2). Hallamos la constante de integración utilizando que: $\vec{v}(t=0) = \left(\hat{u}_x - 4\hat{u}_y + 3\hat{u}_z\right)$ m/s

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}(t=0) &= \frac{0^3}{3}\hat{u}_x + 0^2\hat{u}_y + \cos(0)\hat{u}_z + \overrightarrow{cte} = \hat{u}_z + \overrightarrow{cte} \\ \vec{v}(t=0) &= \hat{u}_x - 4\hat{u}_y + 3\hat{u}_z \end{aligned}\right| \Rightarrow \hat{u}_z + \overrightarrow{cte} = \hat{u}_x - 4\hat{u}_y + 3\hat{u}_z \Rightarrow \overrightarrow{cte} = \hat{u}_x - 4\hat{u}_y + 2\hat{u}_z$$

3). Sustituimos el valor de la constante de integración en la expresión hallada para la velocidad.

$$\vec{v}(t) = \frac{t^3}{3}\hat{u}_x + t^2\hat{u}_y + \cos(t)\hat{u}_z + \hat{u}_x - 4\hat{u}_y + 2\hat{u}_z = \left(1 + \frac{t^3}{3}\right)\hat{u}_x + \left(t^2 - 4\right)\hat{u}_y + \left(2 + \cos(t)\right)\hat{u}_z$$

Ejercicio.- Suponga que una partícula que se mueve en tres dimensiones tiene un vector aceleración instantánea de la forma:

$$\vec{a}(t) = t^2\hat{u}_x + 2t\hat{u}_y - \sin(t)\hat{u}_z$$

donde el tiempo se mide en segundos y la aceleración se mide en metros partido por segundo cuadrado. Calcule el vector posición en el instante t=5 s sabiendo que en el instante inicial la partícula está localizada en el punto (-1,-2,3) m y el vector velocidad en dicho instante de tiempo es:

$$\vec{v}(t=0) = \left(\hat{u}_x - 4\hat{u}_y + 3\hat{u}_z\right) \text{ m/s}$$

4). Utilizando que, por definición, el vector velocidad instantánea es igual a la derivada del vector posición respecto al tiempo obtenemos.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{v}(t)dt = d\vec{r}(t) \Rightarrow d\vec{r}(t) = \vec{v}(t)dt \Rightarrow \int d\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt + \overrightarrow{cte2}$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \left[\int\left(1+\frac{t^3}{3}\right)dt\right]\hat{u}_x + \left[\int\left(t^2-4\right)dt\right]\hat{u}_y - \left[\int\left(2+\cos(t)\right)dt\right]\hat{u}_z + \overrightarrow{cte2} =$$

$$= \left(t+\frac{t^4}{12}\right)\hat{u}_x + \left(\frac{t^3}{3} - 4t\right)\hat{u}_y - \left(2t+\sin(t)\right)\hat{u}_z + \overrightarrow{cte2}$$

5). Hallamos la constante de integración utilizando que: $\vec{r}(t=0) = \left(-1\hat{u}_x - 2\hat{u}_y + 3\hat{u}_z\right)$ m

$$\vec{r}(t=5) = \left(0+\frac{0^4}{12}\right)\hat{u}_x + \left(\frac{0^3}{3} - 4\cdot 0\right)\hat{u}_y - \left(2\cdot 0+\sin(0)\right)\hat{u}_z + \overrightarrow{cte2} = \overrightarrow{cte2} \Bigg| \Rightarrow \overrightarrow{cte2} = -1\hat{u}_x - 2\hat{u}_y + 3\hat{u}_z$$

$$\vec{r}(t=5) = -1\hat{u}_x - 2\hat{u}_y + 3\hat{u}_z$$

Ejercicio.- Suponga que una partícula que se mueve en tres dimensiones tiene un vector aceleración instantánea de la forma:

$$\vec{a}(t) = t^2\hat{u}_x + 2t\hat{u}_y - \sin(t)\hat{u}_z$$

donde el tiempo se mide en segundos y la aceleración se mide en metros partido por segundo cuadrado. Calcule el vector posición en el instante *t*=5 s sabiendo que en el instante inicial la partícula está localizada en el punto (-1,-2,3) m y el vector velocidad en dicho instante de tiempo es:

$$\vec{v}(t=0) = \left(\hat{u}_x - 4\hat{u}_y + 3\hat{u}_z\right)\ \text{m/s}$$

6). Sustituimos el valor de la constante de integración en la expresión hallada para el vector posición.

$$\vec{r}(t) = \left(t + \frac{t^4}{12}\right)\hat{u}_x + \left(\frac{t^3}{3} - 4t\right)\hat{u}_y - \left(2t + \sin(t)\right)\hat{u}_z - 1\hat{u}_x - 2\hat{u}_y + 3\hat{u}_z =$$

$$= \left(-1 + t + \frac{t^4}{12}\right)\hat{u}_x + \left(-2 + \frac{t^3}{3} - 4t\right)\hat{u}_y - \left(-3 + 2t + \sin(t)\right)\hat{u}_z$$

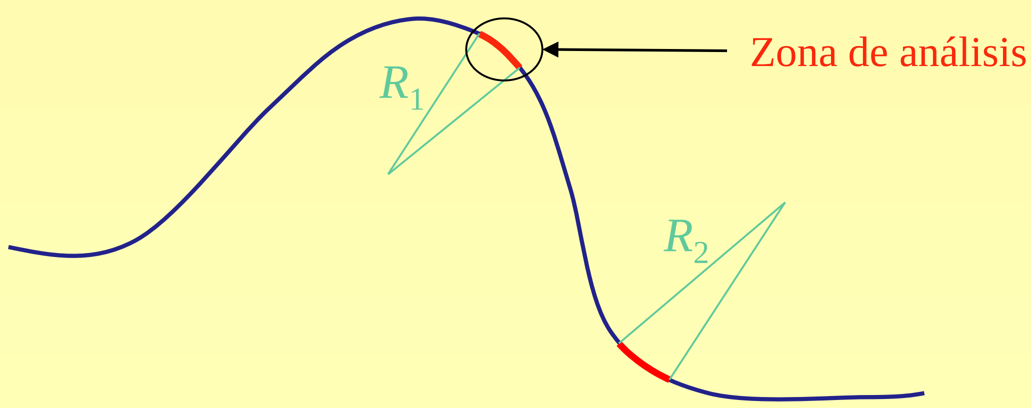
7). Sustituimos el instante de tiempo que se nos pide en el enunciado.

$$\vec{r}(t=5) = \left(-1 + 5 + \frac{5^4}{12}\right)\hat{u}_x + \left(-2 + \frac{5^3}{3} - 4\cdot 5\right)\hat{u}_y - \left(-3 + 2\cdot 5 + \sin(5)\right)\hat{u}_z$$

Componentes de la aceleración

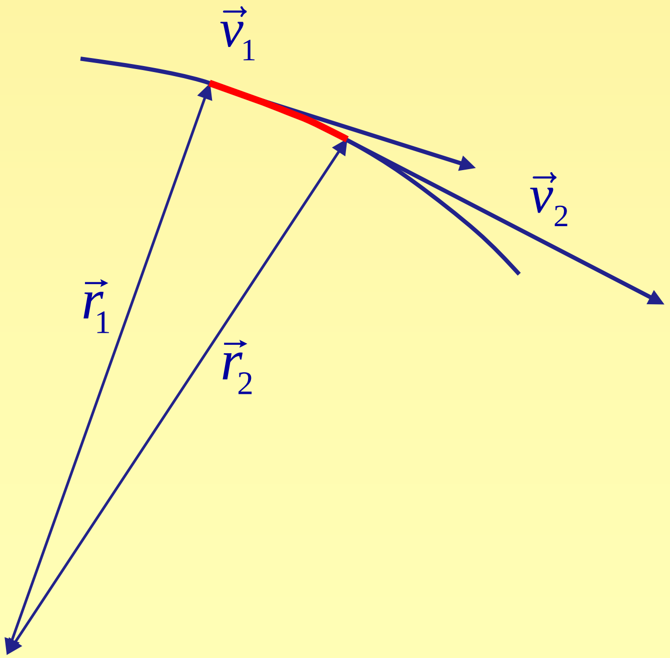
Al contrario de lo que ocurría con la velocidad, para la aceleración no es tan sencillo determinar cuál es su dirección y sentido. En general, la aceleración va a tener una componente tangente a la trayectoria y otra perpendicular. Vamos a calcular cada una de ellas y a obtener algunas propiedades interesantes.

Consideremos un sistema que se mueve siguiendo la trayectoria que se muestra en la figura. Cualquier trayectoria se puede dividir en tramos muy pequeños (diferenciales), de forma que cada uno de esos tramos puede considerarse como un arco sobre una circunferencia de radio *R*. Indudablemente ese radio cambia, de forma general, de una parte a otra de la trayectoria tal y como se muestra en la figura. Eso no nos va a importar puesto que estamos interesados en el cálculo de las componentes de la aceleración instantánea que se definía mediante derivadas que implicaban, a su vez, cambios infinitesimales (muy pequeños) de la velocidad.



Componentes de la aceleración

Vamos a partir de las velocidades que experimenta el sistema al principio y al final del arco considerado. Como vimos en el anterior apartado estas velocidades son tangentes en cada punto a la trayectoria y, por lo tanto, tendrán la dirección que se muestra en la figura.

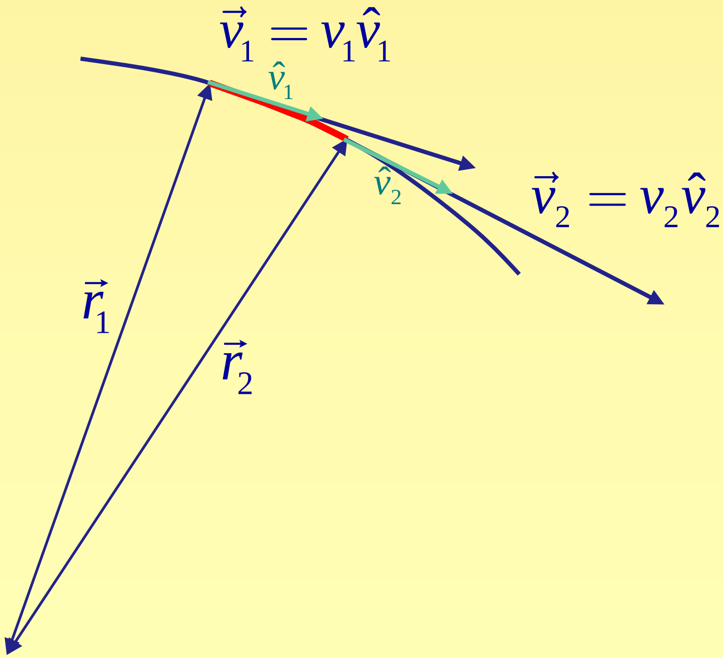


Componentes de la aceleración

Vamos a partir de las velocidades que experimenta el sistema al principio y al final del arco considerado. Como vimos en el anterior apartado estas velocidades son tangentes en cada punto a la trayectoria y, por lo tanto, tendrán la dirección que se muestra en la figura.

A continuación vamos a escribir dichas velocidades como el producto de su módulo por un vector unitario que nos indica la dirección de la velocidad en cada punto.

$$\vec{v}(t) = \left|\vec{v}(t)\right| \hat{v}(t) = v(t)\hat{v}(t)$$

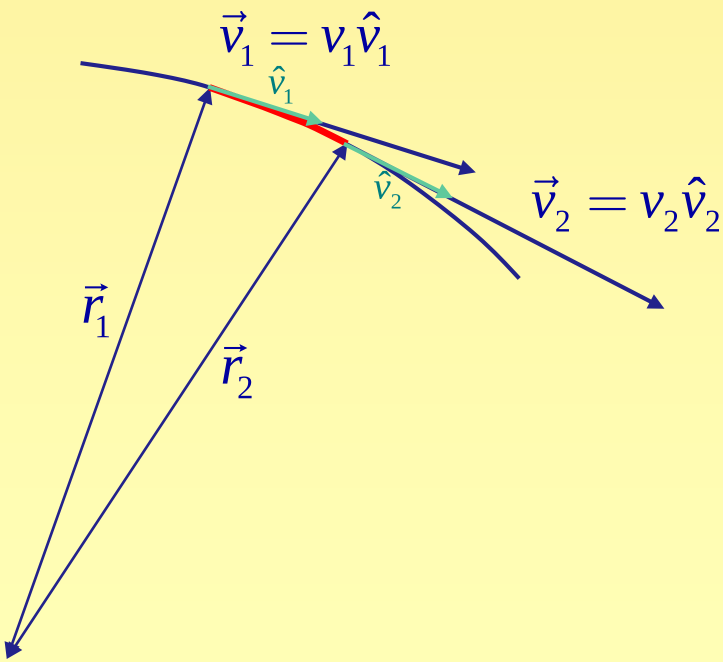


Componentes de la aceleración

Vamos a partir de las velocidades que experimenta el sistema al principio y al final del arco considerado. Como vimos en el anterior apartado estas velocidades son tangentes en cada punto a la trayectoria y, por lo tanto, tendrán la dirección que se muestra en la figura.

A continuación vamos a escribir dichas velocidades como el producto de su módulo por un vector unitario que nos indica la dirección de la velocidad en cada punto.

$$\vec{v}(t)=\left|\vec{v}(t)\right|\hat{v}(t)=v(t)\hat{v}(t)$$



Aplicando a continuación la definición de aceleración tenemos:

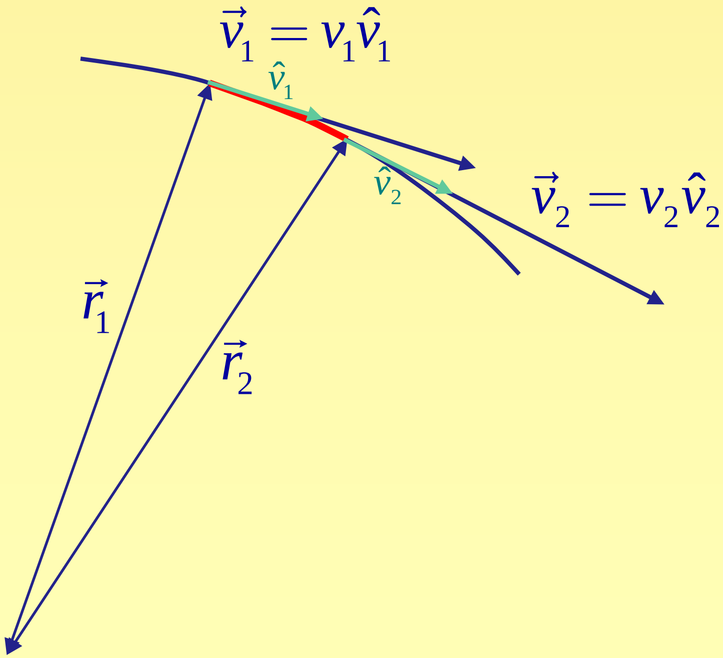
$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|\hat{v}(t)}{dt}=\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}\hat{v}(t)+\left|\vec{v}(t)\right|\frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$

Componentes de la aceleración

Vamos a partir de las velocidades que experimenta el sistema al principio y al final del arco considerado. Como vimos en el anterior apartado estas velocidades son tangentes en cada punto a la trayectoria y, por lo tanto, tendrán la dirección que se muestra en la figura.

A continuación vamos a escribir dichas velocidades como el producto de su módulo por un vector unitario que nos indica la dirección de la velocidad en cada punto.

$$\vec{v}(t) = \left|\vec{v}(t)\right| \hat{v}(t) = v(t)\hat{v}(t)$$



Aplicando a continuación la definición de aceleración tenemos:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\left|\vec{v}(t)\right|\hat{v}(t)}{dt} = \frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}\hat{v}(t) + \left|\vec{v}(t)\right|\frac{d\hat{v}(t)}{dt}$$

El primer término va en la misma dirección de la velocidad y, por tanto, será tangente a la trayectoria en todos los puntos y su módulo será igual a la derivada temporal del módulo de la velocidad:

$$\boxed{\vec{a}_{\parallel}(t) = \frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}\hat{v}(t) \Rightarrow a_{\parallel}(t) = \left|\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}\right|}$$

Componentes de la aceleración

Para calcular la dirección y sentido del otro término, vamos a escribirlo en forma de incrementos:

$$|\vec{v}(t)|\frac{d\hat{v}(t)}{dt} = v(t)\frac{\Delta\hat{v}(t)}{\Delta t} = v(t)\frac{\hat{v}_2 - \hat{v}_1}{\Delta t}$$

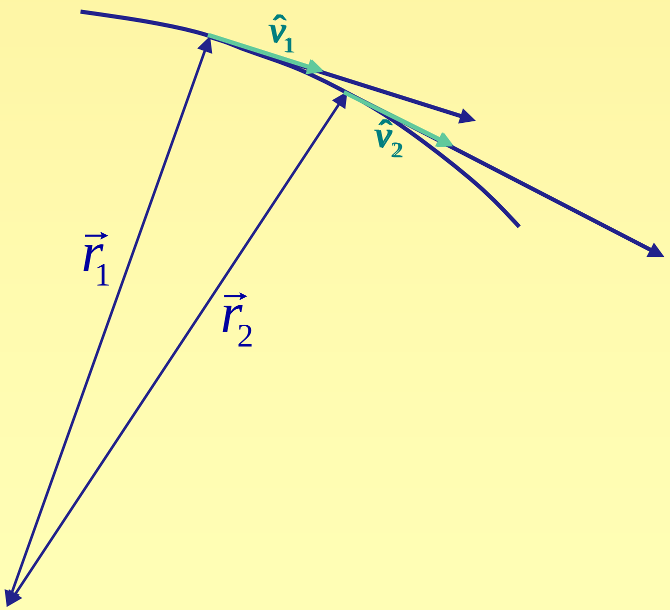
Vamos en primer lugar a calcular gráficamente $\hat{v}_2 - \hat{v}_1$

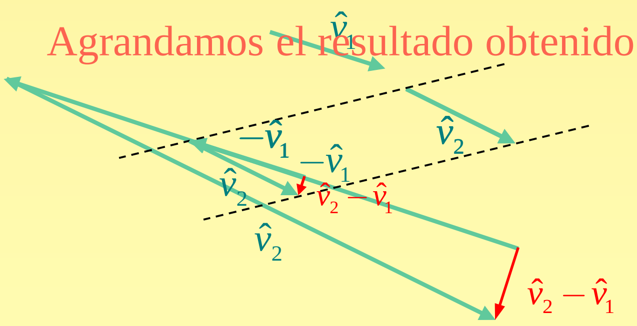
Desplazamos los dos vectores para que la operación sea más clara

Invertimos el vector v_1.

Desplazamos el inicio de v_2 sobre el principio de v_1 y hacemos la diferencia de los dos vectores.

Agrandamos el resultado obtenido.



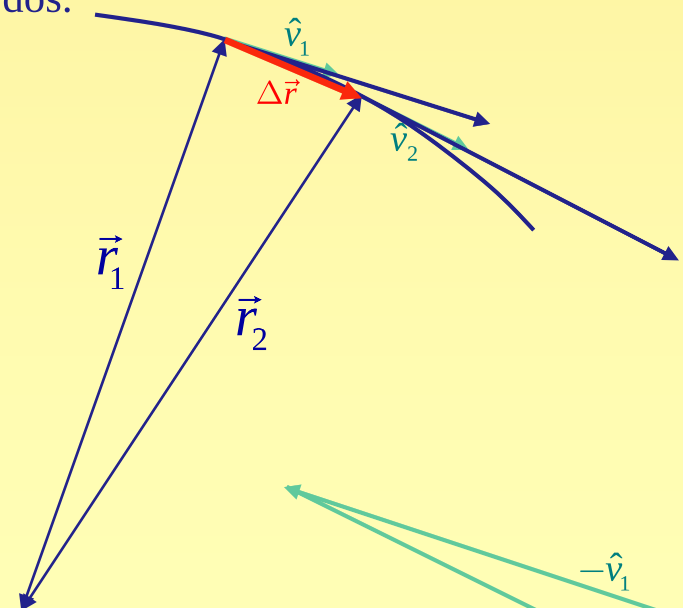


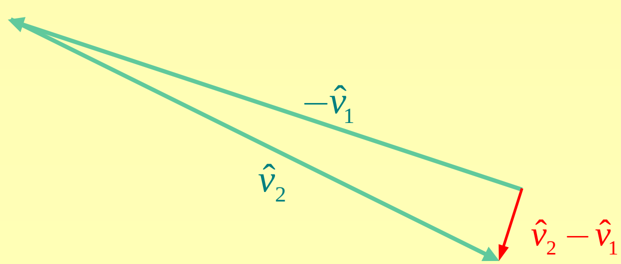
Componentes de la aceleración

Para calcular la dirección y sentido del otro término, vamos a escribirlo en forma de incrementos:

$$\left|\vec{v}(t)\right|\frac{d\hat{v}(t)}{dt}=v(t)\frac{\Delta\hat{v}(t)}{\Delta t}=v(t)\frac{\hat{v}_2-\hat{v}_1}{\Delta t}$$

A continuación nos fijamos en que el triángulo obtenido es equivalente al triángulo formado por los vectores posición y el desplazamiento. Esto es así porque sus lados son perpendiculares dos a dos.





Al ser $\Delta\vec{r}$ perpendicular a $\hat{v}_2-\hat{v}_1$, tenemos que el término que queremos calcular es perpendicular a la trayectoria con sentido hacia el centro de curvatura, es decir, conocemos la dirección y sentido del vector y, por lo tanto, sólo nos faltaría calcular su módulo.

$$\left|v(t)\frac{\hat{v}_2-\hat{v}_1}{\Delta t}\right|=\left|\frac{v(t)}{\Delta t}\right|\left|\hat{v}_2-\hat{v}_1\right|=\frac{v(t)}{\Delta t}\left|\hat{v}_2-\hat{v}_1\right|=\frac{v(t)}{\Delta t}\left|\Delta\hat{v}\right|$$

Para ello utilizamos que al ser equivalentes los triángulos la proporción dos a dos de sus lados tiene que ser una constante, es decir:

$$\frac{\left|\vec{r}_1\right|}{\left|\hat{v}_1\right|}=\frac{\left|\vec{r}_2\right|}{\left|\hat{v}_2\right|}=\frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\left|\Delta\hat{v}\right|}\Rightarrow\left|\Delta\hat{v}\right|=\frac{\left|\Delta\vec{r}\right|\left|\hat{v}_2\right|}{\left|\vec{r}_2\right|}=\frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{R}$$

Y, por lo tanto, finalmente tenemos que:

$$\left|v(t)\frac{\hat{v}_2-\hat{v}_1}{\Delta t}\right|=\frac{v(t)}{\Delta t}\left|\Delta\hat{v}\right|=\frac{v(t)}{\Delta t}\frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{R}=\frac{v(t)}{R}\frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\Delta t}=$$

$$=\frac{v(t)}{R}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|=\frac{v(t)}{R}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\frac{v(t)}{R}\left|\vec{v}(t)\right|=\frac{v^2(t)}{R}$$

Componentes de la aceleración

Resumiendo, la aceleración va a tener, en general, dos componentes una tangente a la trayectoria y otra normal. La forma de cada una de estas componentes se resume en las siguientes expresiones:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{\parallel}(t) + \vec{a}_{\perp}(t) = \frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt}\hat{a}_{\parallel}(t) + \frac{v^2(t)}{R(t)}\hat{a}_{\perp}(t) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a_{\parallel}(t) = \dfrac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt} \\ a_{\perp}(t) = \dfrac{v^2(t)}{R(t)} \end{array} \right.$$

La aceleración tangencial o paralela a la trayectoria implica un cambio en el módulo de la velocidad mientras que la componente normal implica un cambio de dirección del sistema. Por lo tanto:

$$1.- \quad a_{\perp}(t) = 0 \Rightarrow \text{Movimiento rectilíneo}$$

$$2.- \quad \left|\vec{v}(t)\right| = cte \Rightarrow a_{\parallel}(t) = 0$$

Ejercicio.- Suponga que una partícula que se mueve en tres dimensiones tiene un vector aceleración instantánea de la forma:

$$\vec{a}(t) = -\left[\left(80t^2+120t+45\right)\cos\left(2t^2+3t\right)+20\sin\left(2t^2+3t\right)\right]\hat{u}_x -$$
$$-\left[\left(80t^2+120t+45\right)\sin\left(2t^2+3t\right)-20\cos\left(2t^2+3t\right)\right]\hat{u}_y$$

Si la velocidad instantánea es

$$\vec{v}(t=0) = (0\hat{u}_x + 15\hat{u}_y)\ \text{m/s}$$

en el instante t=0 s, calcule las componentes tangencial y normal de la aceleración.

1.- Primero reordenamos los términos de la aceleración como sigue:

$$\vec{a}(t) = -5\left[\left(16t^2+24t+9\right)\cos\left(2t^2+3t\right)+4\sin\left(2t^2+3t\right)\right]\hat{u}_x -$$
$$-5\left[\left(16t^2+24t+9\right)\sin\left(2t^2+3t\right)-4\cos\left(2t^2+3t\right)\right]\hat{u}_y =$$
$$= -5\left[\left(4t+3\right)^2\cos\left(2t^2+3t\right)+4\sin\left(2t^2+3t\right)\right]\hat{u}_x -$$
$$-5\left[\left(4t+3\right)^2\sin\left(2t^2+3t\right)-4\cos\left(2t^2+3t\right)\right]\hat{u}_y$$

2.- Calculamos la velocidad a partir de la definición de la aceleración.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}dt \Rightarrow \vec{v} = \int \vec{a}dt + \vec{K} = -5\left\{\int\left[\left(4t+3\right)^2\cos\left(2t^2+3t\right)+4\sin\left(2t^2+3t\right)\right]dt\right\}\hat{u}_x -$$
$$-5\left\{\int\left[\left(4t+3\right)^2\sin\left(2t^2+3t\right)-4\cos\left(2t^2+3t\right)\right]dt\right\}\hat{u}_y + \vec{K}$$

Ejercicio.- Suponga que una partícula que se mueve en tres dimensiones tiene un vector aceleración instantánea de la forma:

$$\vec{a}(t) = -\left[\left(80t^2 + 120t + 45\right)\cos\left(2t^2 + 3t\right) + 20\sin\left(2t^2 + 3t\right)\right]\hat{u}_x -$$
$$-\left[\left(80t^2 + 120t + 45\right)\sin\left(2t^2 + 3t\right) - 20\cos\left(2t^2 + 3t\right)\right]\hat{u}_y$$

Si la velocidad instantánea es

$$\vec{v}(t = 0) = (0\hat{u}_x + 15\hat{u}_y) \text{ m/s}$$

en el instante t=0 s, calcule las componentes tangencial y normal de la aceleración.

3.- Podemos realizar las integrales dándonos cuenta de que:

$$\frac{d\cos\left(2t^2 + 3t\right)}{dt} = -\left(4t + 3\right)\sin\left(2t^2 + 3t\right); \quad \frac{d\sin\left(2t^2 + 3t\right)}{dt} = \left(4t + 3\right)\cos\left(2t^2 + 3t\right);$$

$$\vec{v}(t) = -5\left\{\int\left[\left(4t + 3\right)^2\cos\left(2t^2 + 3t\right) + 4\sin\left(2t^2 + 3t\right)\right]dt\right\}\hat{u}_x - 5\left\{\int\left[\left(4t + 3\right)^2\sin\left(2t^2 + 3t\right) - 4\cos\left(2t^2 + 3t\right)\right]dt\right\}\hat{u}_y + \vec{K} =$$

$$= -5\left\{\int\left[\left(4t + 3\right)\frac{d\sin\left(2t^2 + 3t\right)}{dt} + 4\sin\left(2t^2 + 3t\right)\right]dt\right\}\hat{u}_x + 5\left\{\int\left[\left(4t + 3\right)\frac{d\cos\left(2t^2 + 3t\right)}{dt} + 4\cos\left(2t^2 + 3t\right)\right]dt\right\}\hat{u}_y + \vec{K} =$$

$$= -5\left[\int\frac{d\left(4t + 3\right)\sin\left(2t^2 + 3t\right)}{dt}dt\right]\hat{u}_x + 5\left[\int\frac{d\left(4t + 3\right)\cos\left(2t^2 + 3t\right)}{dt}dt\right]\hat{u}_y + \vec{K} =$$

$$= -5\left(4t + 3\right)\sin\left(2t^2 + 3t\right)\hat{u}_x + 5\left(4t + 3\right)\cos\left(2t^2 + 3t\right)\hat{u}_y + \vec{K}$$

Ejercicio.- Suponga que una partícula que se mueve en tres dimensiones tiene un vector aceleración instantánea de la forma:

$$\vec{a}(t) = -\left[\left(80t^2 + 120t + 45\right)\cos\left(2t^2 + 3t\right) + 20\sin\left(2t^2 + 3t\right)\right]\hat{u}_x -$$
$$-\left[\left(80t^2 + 120t + 45\right)\sin\left(2t^2 + 3t\right) - 20\cos\left(2t^2 + 3t\right)\right]\hat{u}_y$$

Si la velocidad instantánea es

$$\vec{v}(t=0) = (0\hat{u}_x + 15\hat{u}_y)\ \text{m/s}$$

en el instante t=0 s, calcule las componentes tangencial y normal de la aceleración.

4.- La constante de integración la obtenemos de la condición de contorno: $\vec{v}(t=0) = (0\hat{u}_x + 15\hat{u}_y)$ m/s

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}(t=0) = 0\hat{u}_x + 15\hat{u}_y + \vec{K} \\ \vec{v}(t=0) = 0\hat{u}_x + 15\hat{u}_y\end{array}\right| \Rightarrow \vec{K} = 0$$

5.- Y, por tanto, nos queda finalmente para la velocidad:

$$\vec{v}(t) = -5(4t+3)\sin\left(2t^2 + 3t\right)\hat{u}_x + 5(4t+3)\cos\left(2t^2 + 3t\right)\hat{u}_y$$

6.- El módulo de v será igual a:

$$v(t) = \sqrt{25(4t+3)^2\sin^2\left(2t^2+3t\right) + 25(4t+3)^2\cos^2\left(2t^2+3t\right)} = 5(4t+3)\sqrt{\sin^2\left(2t^2+3t\right) + \cos^2\left(2t^2+3t\right)} = 5(4t+3)$$

7.- Y la componente tangencial de la aceleración será:

$$\vec{a}_{\parallel} = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}\hat{v} = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}\frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{d\ln\left|\vec{v}\right|}{dt}\vec{v} = \frac{d\ln\left[5(4t+3)\right]}{dt}\vec{v} = \frac{4}{4t+3}\vec{v}$$

Ejercicio.- Suponga que una partícula que se mueve en tres dimensiones tiene un vector aceleración instantánea de la forma:

$$\vec{a}(t) = -\left[\left(80t^2+120t+45\right)\cos\left(2t^2+3t\right)+20\sin\left(2t^2+3t\right)\right]\hat{u}_x -$$
$$-\left[\left(80t^2+120t+45\right)\sin\left(2t^2+3t\right)-20\cos\left(2t^2+3t\right)\right]\hat{u}_y$$

Si la velocidad instantánea es

$$\vec{v}(t=0) = (0\hat{u}_x + 15\hat{u}_y)\ \text{m/s}$$

en el instante t=0 s, calcule las componentes tangencial y normal de la aceleración.

8.- Por otro lado, la componente normal de la aceleración la podemos hallar a partir de:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} \Rightarrow \vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}$$

$$\vec{a}_{\perp} = -5\left[(4t+3)^2\cos\left(2t^2+3t\right)+4\sin\left(2t^2+3t\right)\right]\hat{u}_x - 5\left[(4t+3)^2\sin\left(2t^2+3t\right)-4\cos\left(2t^2+3t\right)\right]\hat{u}_y +$$
$$+\frac{4}{4t+3}\left[5(4t+3)\sin\left(2t^2+3t\right)\hat{u}_x - 5(4t+3)\cos\left(2t^2+3t\right)\hat{u}_y\right] = -5(4t+3)^2\cos\left(2t^2+3t\right)\hat{u}_x - 5(4t+3)^2\sin\left(2t^2+3t\right)\hat{u}_y$$

$$a_{\perp} = 5\left(4t+3\right)^2$$

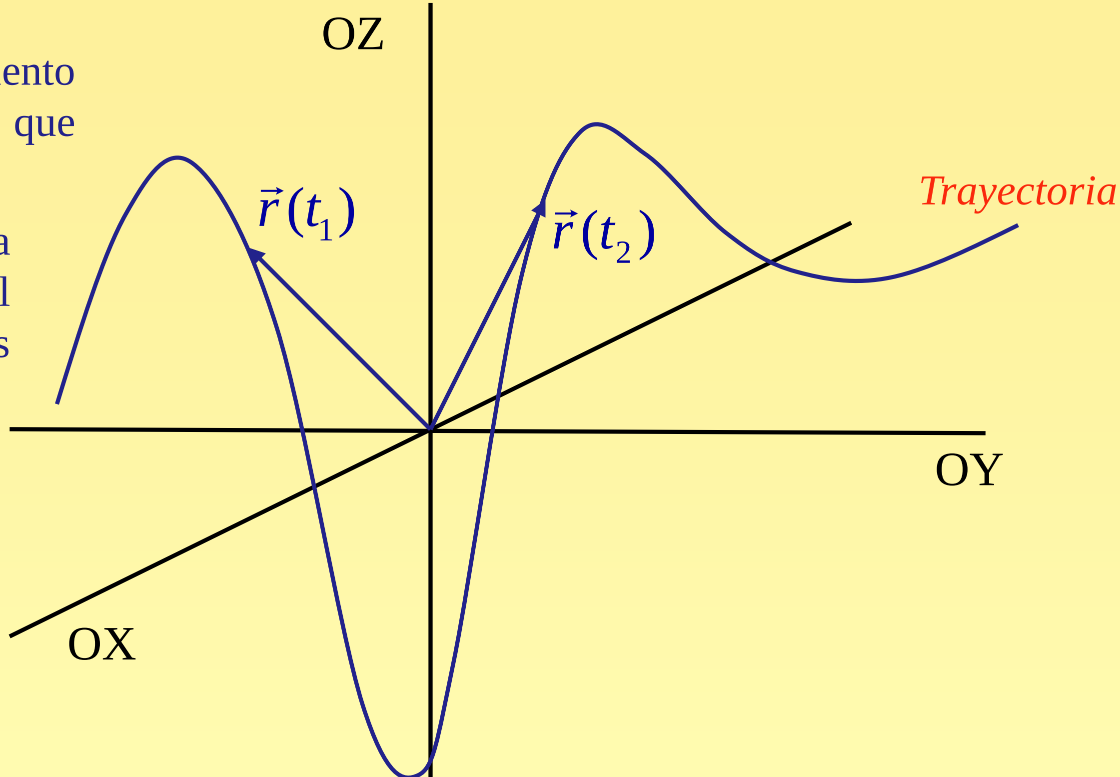
9.- En este caso podemos calcular, aunque no lo pide el enunciado del problema, el radio de curvatura.

$$R(t) = \frac{v^2(t)}{a_{\perp}(t)} = \frac{25\left(4t+3\right)^2}{5\left(4t+3\right)^2} = 5\ \text{m}$$

RESUMEN DE LO VISTO HASTA EL MOMENTO

Para describir analíticamente el movimiento de los sistemas en el espacio tenemos que elegir un sistema de referencia

Una vez elegido el sistema de referencia las magnitudes que van a caracteriza el movimiento del mismo son las siguientes.



Vector posición.- Es el vector que une el origen del sistema de referencia con todos y cada uno de los puntos de la trayectoria que sigue el sistema. Lógicamente depende del sistema de referencia elegido.

Vector velocidad instantánea.- Se define la velocidad instantánea de un sistema en un punto como la derivada con respecto al tiempo del vector posición en dicho punto.

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}}$$

No depende del sistema de referencia elegido y es tangente a la trayectoria en todos los puntos.

Vector aceleración instantánea.- Derivada de la velocidad (instantánea) en ese punto respecto al tiempo.

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}}$$

No depende del sistema de referencia elegido y tiene una componente tangencial y otra normal a la trayectoria

$$a_{\parallel}(t) = \frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt};\ a_{\perp}(t) = \frac{v^2(t)}{R(t)}$$

El objetivo en cualquier problema de cinemática va a ser determinar la trayectoria que sigue el sistema que se está estudiando. Esto se consigue si conocemos el vector posición del sistema en cualquier instante de tiempo. A partir de él podemos obtener derivando la velocidad y aceleración del sistema en cualquier punto de la trayectoria.

El problema aparece cuando lo que conocemos es algún tipo de datos sobre la velocidad o la aceleración a lo largo de la trayectoria. En dicho caso hay que resolver un sistema de ecuaciones diferenciales basadas en las definiciones de aceleración y velocidad. En este apartado vamos a analizar como son los movimientos de los sistemas en caso de que tengamos alguna información sobre su velocidad y sobre su aceleración. Esto da lugar a la clasificación de los mismos que vamos a introducir.

Movimiento uniforme

Se dice que un sistema o partícula experimenta un movimiento uniforme cuando su vector velocidad instantánea es constante y, por tanto, independiente del tiempo.

$$\vec{v}(t) = \vec{v} = cte \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 0 \\ \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow d\vec{r}(t) = \vec{v}dt \Rightarrow \int d\vec{r}(t) = \int \vec{v}dt + \vec{K} = \vec{v}\int dt + \vec{K} = \vec{v}t + \vec{K} \end{array} \right.$$

Como vimos en el apartado anterior para determinar la constante de integración tenemos que conocer la posición de la partícula en algún instante de tiempo. Supongamos que sabemos que en el instante t_0 la posición de la partícula es $\vec{r}_0$.

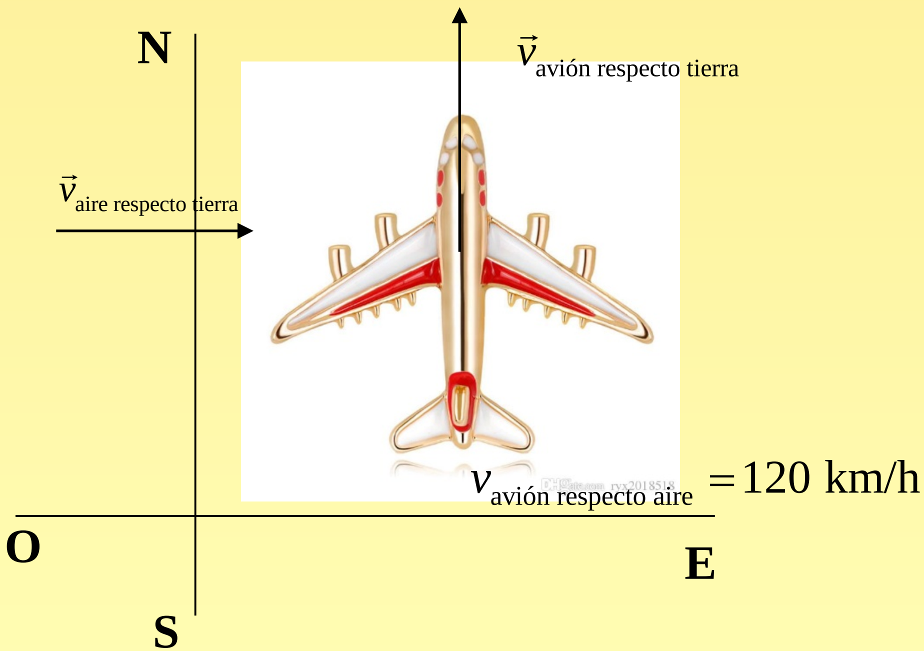
$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}(t=t_0)=\vec{r}_0 \\ \vec{r}(t=t_0)=\vec{v}t_0+\vec{K} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{K}=\vec{r}_0-\vec{v}t_0 \Rightarrow \vec{r}(t)=\vec{v}t+\vec{r}_0-\vec{v}t_0 \Rightarrow \vec{r}(t)-\vec{r}_0=\vec{v}\left(t-t_0\right)$$

De donde deducimos que en este caso la velocidad instantánea además de ser constante en cualquier punto de la trayectoria es igual a la velocidad media entre cualesquiera dos puntos de la trayectoria.

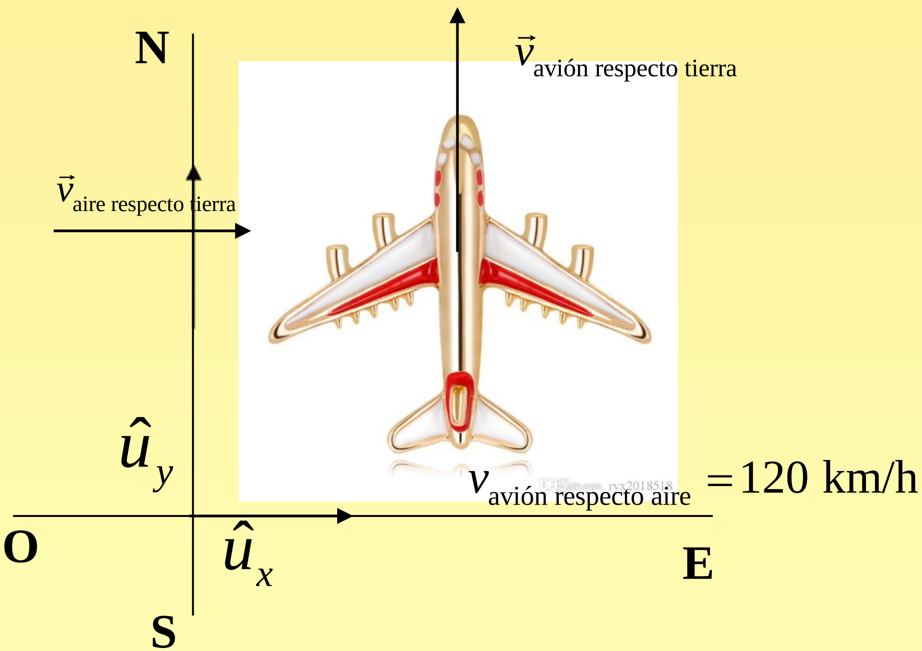
Si consideramos que el origen de tiempos lo tomamos en t_0, es decir, t_0=0 nos queda.

$$\vec{r}(t)=\vec{v}t+\vec{r}_0$$

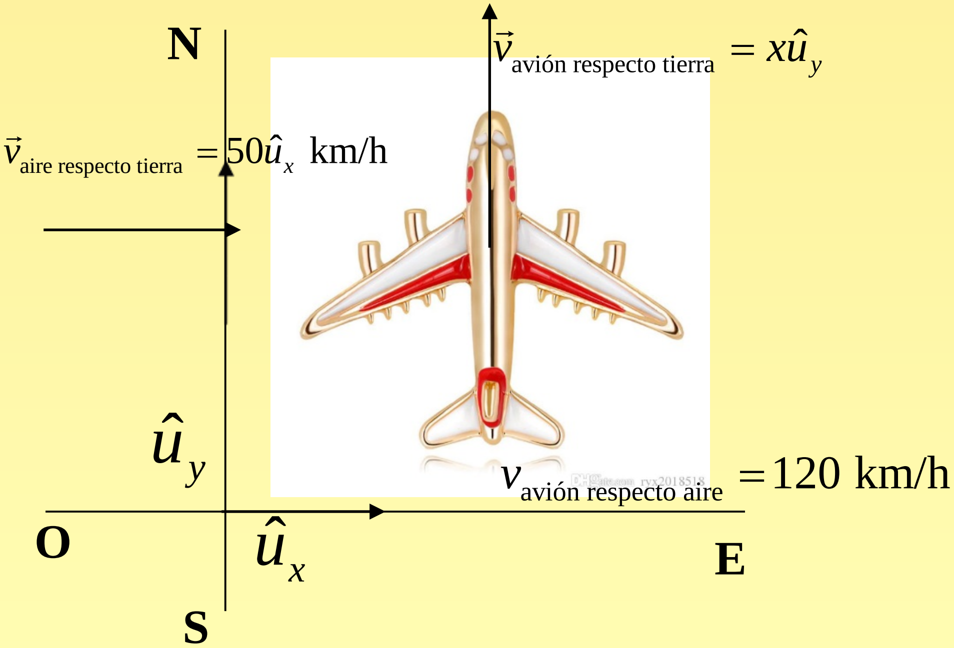
Ejercicio.- La brújula de un avión indica que su proa está orientada hacia el norte y su indicador de velocidad señala que se mueve respecto al aire con una velocidad de 120 km/h. Si hay un viento de 50 km/h que sopla de oeste a este, calcular: a) la velocidad del avión respecto de la tierra; b) en qué dirección debe mantener el piloto la proa para dirigirse en la dirección norte?¿Cuál será entonces su velocidad con respecto a tierra?



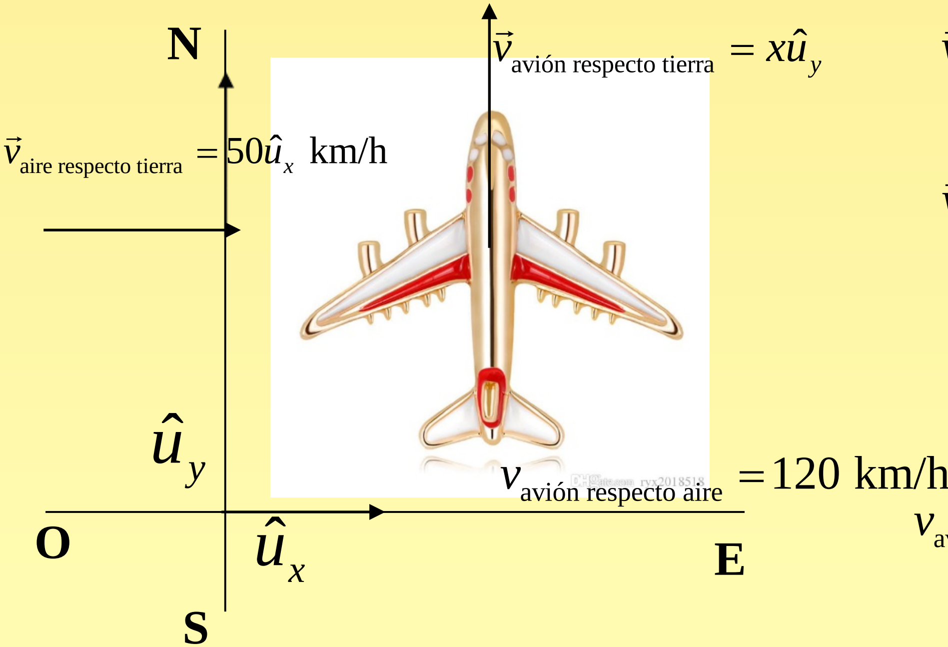
Ejercicio.- La brújula de un avión indica que su proa está orientada hacia el norte y su indicador de velocidad señala que se mueve respecto al aire con una velocidad de 120 km/h. Si hay un viento de 50 km/h que sopla de oeste a este, calcular: a) la velocidad del avión respecto de la tierra; b) en qué dirección debe mantener el piloto la proa para dirigirse en la dirección norte?¿Cuál será entonces su velocidad con respecto a tierra?



Ejercicio.- La brújula de un avión indica que su proa está orientada hacia el norte y su indicador de velocidad señala que se mueve respecto al aire con una velocidad de 120 km/h. Si hay un viento de 50 km/h que sopla de oeste a este, calcular: a) la velocidad del avión respecto de la tierra; b) en qué dirección debe mantener el piloto la proa para dirigirse en la dirección norte?¿Cuál será entonces su velocidad con respecto a tierra?



Ejercicio.- La brújula de un avión indica que su proa está orientada hacia el norte y su indicador de velocidad señala que se mueve respecto al aire con una velocidad de 120 km/h. Si hay un viento de 50 km/h que sopla de oeste a este, calcular: a) la velocidad del avión respecto de la tierra; b) en qué dirección debe mantener el piloto la proa para dirigirse en la dirección norte?¿Cuál será entonces su velocidad con respecto a tierra?



$$\vec{v}_{\text{avión respecto tierra}} = \vec{v}_{\text{aire respecto tierra}} + \vec{v}_{\text{avión respecto aire}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_{\text{avión respecto aire}} = \vec{v}_{\text{avión respecto tierra}} - \vec{v}_{\text{aire respecto tierra}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_{\text{avión respecto aire}} = x\hat{u}_y - 50\hat{u}_x \text{ km/h}$$

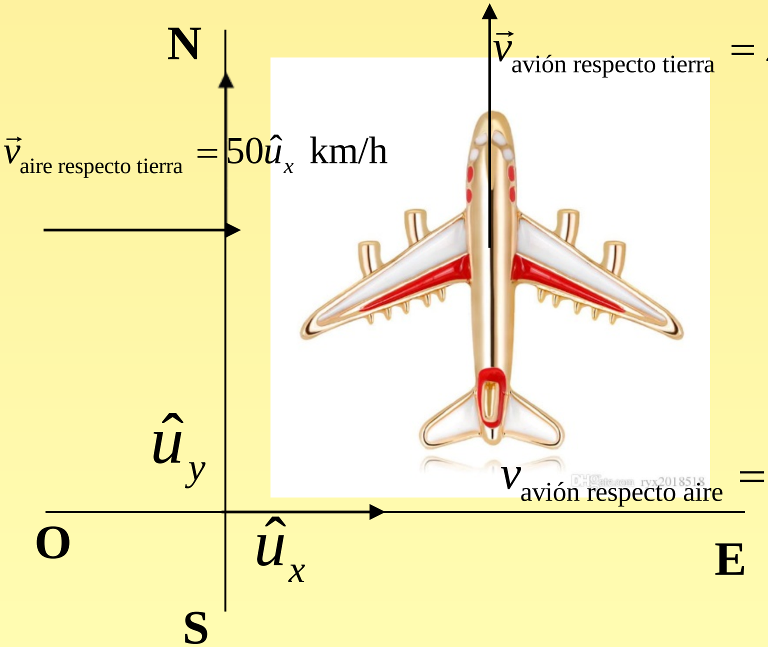
$$\Downarrow$$

$$v_{\text{avión respecto aire}} = \sqrt{50^2 \text{ km}^2/\text{h}^2 + x^2} = 120 \text{ km/h}$$

$$\Downarrow$$

$$2500 \text{ km}^2/\text{h}^2 + x^2 = 14400 \text{ km}^2/\text{h}^2 \Rightarrow x = 109.09 \text{ km/h}$$

Ejercicio.- La brújula de un avión indica que su proa está orientada hacia el norte y su indicador de velocidad señala que se mueve respecto al aire con una velocidad de 120 km/h. Si hay un viento de 50 km/h que sopla de oeste a este, calcular: a) la velocidad del avión respecto de la tierra; b) en qué dirección debe mantener el piloto la proa para dirigirse en la dirección norte?¿Cuál será entonces su velocidad con respecto a tierra?



$$\vec{v}_{\text{avión respecto tierra}} = \vec{v}_{\text{aire respecto tierra}} + \vec{v}_{\text{avión respecto aire}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_{\text{avión respecto aire}} = \vec{v}_{\text{avión respecto tierra}} - \vec{v}_{\text{aire respecto tierra}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_{\text{avión respecto aire}} = x\hat{u}_y - 50\hat{u}_x \text{ km/h}$$

$$\Downarrow$$

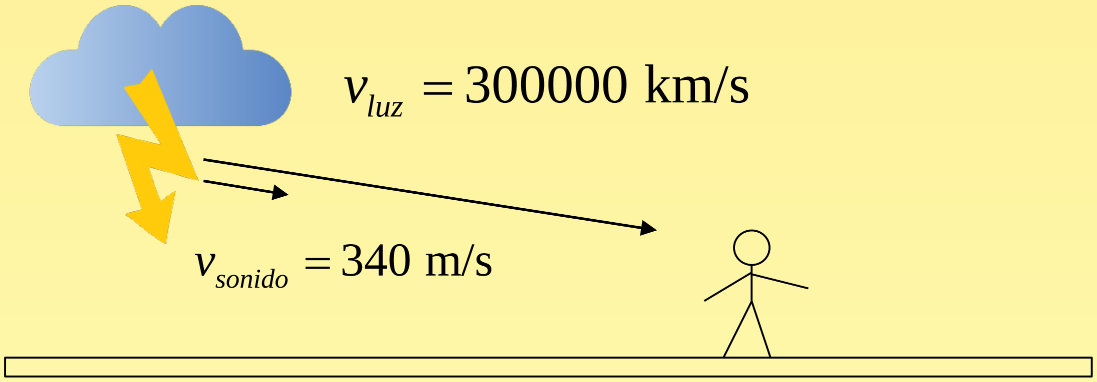
$$v_{\text{avión respecto aire}} = \sqrt{50^2 \text{ km}^2/\text{h}^2 + x^2} = 120 \text{ km/h}$$

$$\Downarrow$$

$$2500 \text{ km}^2/\text{h}^2 + x^2 = 14400 \text{ km}^2/\text{h}^2 \Rightarrow x = 109.09 \text{ km/h}$$

$$\vec{v}_{\text{avión respecto tierra}} = 109.09\hat{u}_y \Rightarrow \vec{v}_{\text{avión respecto aire}} = \left(-50\hat{u}_x + 109.09\hat{u}_y\right) \text{ km/h} = \left(-50, 109.09\right) \text{ km/h}$$

Ejercicio.- En un día de tormenta se observa un relámpago y tres segundos después se oye su correspondiente trueno. Sabiendo que la velocidad del sonido es 340 m/s y la de la luz es $3{\cdot}10^8$ m/s calcular la distancia a la que se produjeron ambos.



$$x = vt \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = v_{luz} t_{luz} \\ x = v_{sonido} t_{sonido} \end{array} \right. \Rightarrow v_{luz} t_{luz} = v_{sonido} t_{sonido} \Rightarrow t_{sonido} = \frac{v_{luz} t_{luz}}{v_{sonido}}$$

$$\left| \begin{array}{l} t_{sonido} - t_{luz} = 3 \text{ s} \\ t_{sonido} = \dfrac{v_{luz} t_{luz}}{v_{sonido}} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{v_{luz} t_{luz}}{v_{sonido}} - t_{luz} = 3 \text{ s} \Rightarrow t_{luz} = 3 \frac{v_{sonido}}{v_{luz} - v_{sonido}} \text{ s} = 3.4 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 3.4\ \mu\text{s}$$

$$x = v_{luz} t_{luz} \Rightarrow x = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 3.4 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 1020 \text{ m}$$

Movimiento uniformemente acelerado

Se dice que un sistema o partícula experimenta un movimiento uniformemente acelerado cuando su vector aceleración instantánea es constante y, por tanto, independiente del tiempo.

$$\vec{a}(t) = \vec{a} = cte \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \Rightarrow d\vec{v}(t) = \vec{a}dt \Rightarrow \int d\vec{v}(t) = \int \vec{a}dt + \vec{K}_1 = \vec{a}\int dt + \vec{K}_1 = \vec{a}t + \vec{K}_1$$

Supongamos que sabemos que en el instante t_0 la velocidad instantánea de la partícula es $\vec{v}_0$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}(t = t_0) = \vec{v}_0 \\ \vec{v}(t = t_0) = \vec{a}t_0 + \vec{K}_1 \end{array}\right| \Rightarrow \vec{K}_1 = \vec{v}_0 - \vec{a}t_0 \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{v}_0 - \vec{a}t_0 \Rightarrow \vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \vec{a}\left(t - t_0\right)$$

Ejercicio.- Demostrar que un movimiento uniformemente acelerado es rectilíneo si y solo si la velocidad inicial tiene la misma dirección que la aceleración.

1.- Por ser un movimiento con aceleración uniforme hemos visto que:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\left(t - t_0\right)$$

2.- Por lo tanto, la componente tangencial de la aceleración será en este caso:

$$\vec{a}_{\parallel}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\hat{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \frac{d\ln\left(v(t)\right)}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d\ln\left(v(t)\right)}{dt}\left[\vec{v}_0 + \vec{a}\left(t - t_0\right)\right]$$

3.- Y la componente normal la podemos calcular a partir de la expresión:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel}(t) + \vec{a}_{\perp}(t) \Rightarrow \vec{a}_{\perp}(t) = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}(t) = \left[1 - \frac{d\ln\left(v(t)\right)}{dt}\left(t - t_0\right)\right]\vec{a} - \frac{d\ln\left(v(t)\right)}{dt}\vec{v}_0 = \lambda_1(t)\vec{a} - \lambda_2(t)\vec{v}_0$$

donde $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$ son escalares dependientes en general del tiempo.

4.- Como queremos exigir que el movimiento sea rectilíneo la componente normal de la aceleración tiene que ser cero. Introduciendo esta condición en la anterior expresión llegamos a:

$$\vec{a}_{\perp}(t) = \lambda_1(t)\vec{a} - \lambda_2(t)\vec{v}_0 = 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{\lambda_2(t)}{\lambda_1(t)}\vec{v}_0 = \lambda_3(t)\vec{v}_0$$

Esta expresión nos dice que para que el movimiento sea rectilíneo la aceleración tiene que ser igual al producto de un escalar por el vector velocidad inicial. Dado que el producto de un escalar por un vector es igual a otro vector con igual dirección que el primero deducimos que la aceleración tiene que tener la misma dirección que la velocidad inicial o lo que es lo mismo ambas son paralelas.

Movimiento uniformemente acelerado

A partir de la velocidad que hemos calculado y utilizando su definición podemos calcular el vector posición.

$$\vec{v}(t)=\vec{a}\left(t-t_0\right)+\vec{v}_0=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\Rightarrow d\vec{r}(t)=\left[\vec{a}\left(t-t_0\right)+\vec{v}_0\right]dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int d\vec{r}(t)=\int\left[\vec{a}\left(t-t_0\right)+\vec{v}_0\right]dt+\vec{K}_2=\int\left[\vec{a}t-\vec{a}t_0+\vec{v}_0\right]dt+\vec{K}_2=\vec{a}\int tdt+\left(\vec{v}_0-\vec{a}t_0\right)\int dt+\vec{K}_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{r}(t)=\vec{a}\frac{t^2}{2}+\left(\vec{v}_0-\vec{a}t_0\right)t+\vec{K}_2$$

Supongamos que sabemos que en el instante t_0 la posición de la partícula es $\vec{r}_0$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}(t=t_0)=\vec{r}_0\\ \vec{r}(t=t_0)=\vec{a}\dfrac{t_0^2}{2}+\left(\vec{v}_0-\vec{a}t_0\right)\mathrm{t}_0+\vec{K}_2\end{array}\right|\Rightarrow\vec{K}_2=\vec{r}_0-\vec{a}\frac{t_0^2}{2}-\left(\vec{v}_0-\vec{a}t_0\right)\mathrm{t}_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0\left(t-t_0\right)+\frac{\vec{a}}{2}\left(t-t_0\right)^2$$

Movimiento uniformemente acelerado

Si consideramos que el origen de tiempos lo tomamos en t_0, es decir, $t_0=0$ nos queda.

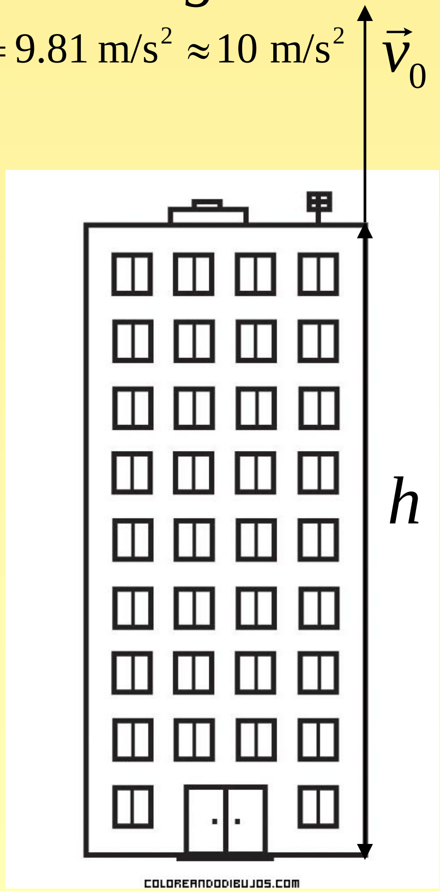
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

Ejercicio.- Se tira una pelota desde un edificio de 30m de altura hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/s de manera que al bajar cae hasta la calle. Calcular el tiempo que la pelota tarda en llegar al suelo.

$$\vec{a} = \vec{g}$$

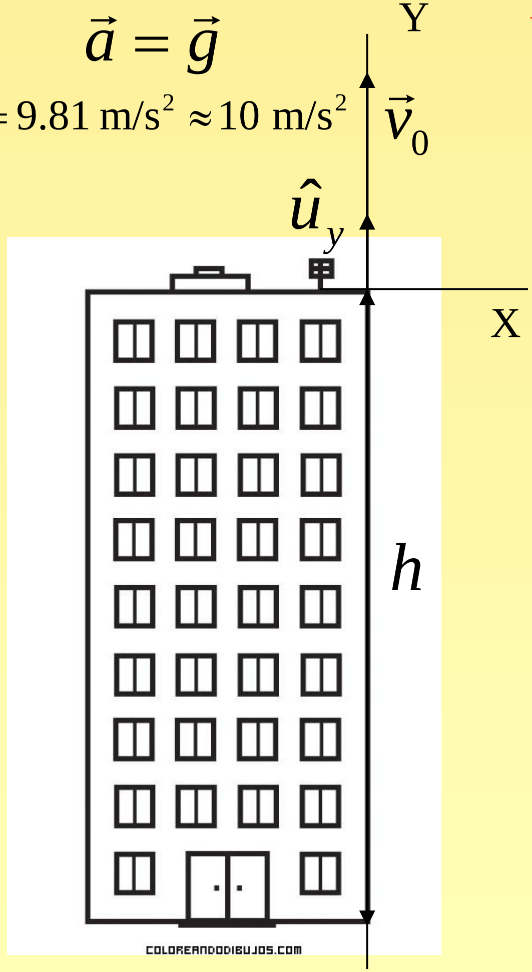
$$g = 9.81\ \mathrm{m/s^2} \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$$



Ejercicio.- Se tira una pelota desde un edificio de 30m de altura hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/s de manera que al bajar cae hasta la calle. Calcular el tiempo que la pelota tarda en llegar al suelo.

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2 \approx 10 \text{ m/s}^2$$

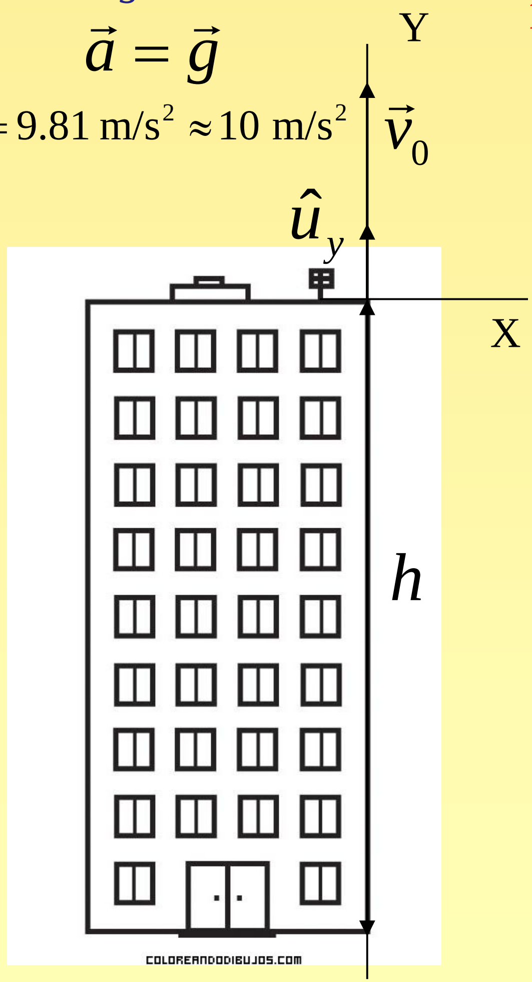


1. Elegimos nuestro sistema de referencia

Ejercicio.- Se tira una pelota desde un edificio de 30m de altura hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/s de manera que al bajar cae hasta la calle. Calcular el tiempo que la pelota tarda en llegar al suelo.

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$g = 9.81\ \mathrm{m/s^2} \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$$



1. Elegimos nuestro sistema de referencia

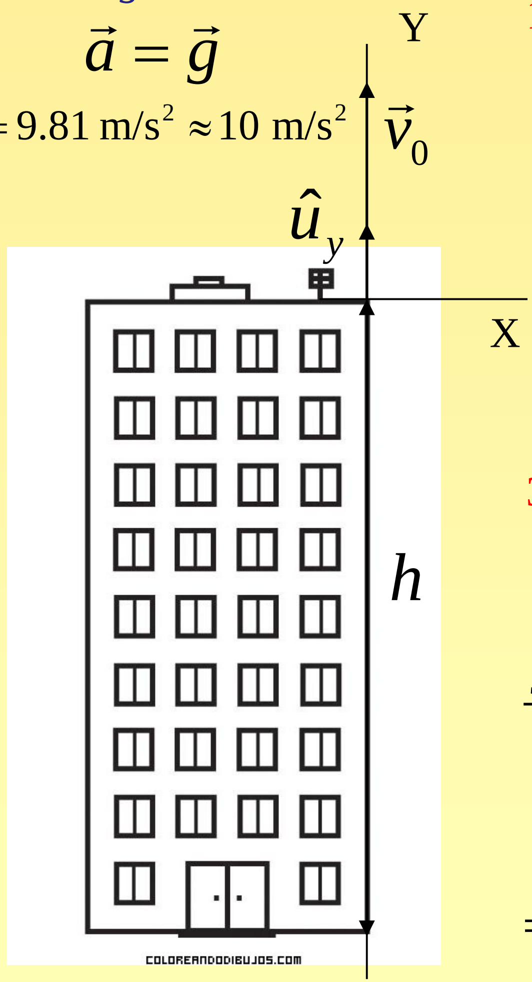
2. Escribimos las ecuaciones que dominan el comportamiento mecánico del sistema y las particularizamos para nuestro caso:

$$\left| \begin{array}{l} \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \\ \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{\vec{a}t^2}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} v_y(t) = v_0 - gt \\ y(t) = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2} \end{array} \right. \Rightarrow -h = v_0 t_c - \frac{g t_c^2}{2}$$

Ejercicio.- Se tira una pelota desde un edificio de 30m de altura hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/s de manera que al bajar cae hasta la calle. Calcular el tiempo que la pelota tarda en llegar al suelo.

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$g = 9.81\ \text{m/s}^2 \approx 10\ \text{m/s}^2$$



1. Elegimos nuestro sistema de referencia

2. Escribimos las ecuaciones que dominan el comportamiento mecánico del sistema y las particularizamos para nuestro caso:

$$\left|\begin{array}{l}\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \\ \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{\vec{a}t^2}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}v_y(t) = v_0 - gt \\ y(t) = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}\end{array}\right. \Rightarrow -h = v_0 t_c - \frac{gt_c^2}{2}$$

3. Resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\frac{g}{2}t_c^2 - v_0 t_c - h = 0 \Rightarrow t_c = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 4\frac{g}{2}h}}{2\frac{g}{2}} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} =$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 600}}{10}\,\text{s} = \frac{10 \pm 26.458}{10}\,\text{s} \Rightarrow \begin{array}{l} t_c = 3.646\ \text{s} \\ t_c = -1.646\ \text{s}\end{array}$$

Ejercicio.- El record mundial de los 100 m lisos es 9,8 s y el de 60 m lisos 6,3 s. Supóngase que el corredor se desplaza con una aceleración constante hasta una velocidad máxima que mantiene durante el resto de la carrera. (a) Calcular la aceleración. (b) ¿Cuánto dura el periodo de aceleración? (c) ¿Cuál es la velocidad máxima? (d) El record de 200 m lisos es de 19,5 s, mientras que para el 1500 es de 205 s ¿Estos tiempos son consistentes con las hipótesis anteriores? ¿Por qué?

Planteamiento

Carrera de 60 m $\xleftrightarrow{x_1 \quad t_1}\xleftrightarrow{x_2 \quad t_2}$

Carrera de 100 m $\xleftrightarrow{x_1 \quad t_1}\xleftrightarrow{\qquad x_3 \quad t_3 \qquad}$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & x_1 + x_2 = 60 \text{ m} \\ & x_1 + x_3 = 100 \text{ m} \\ (2) & t_1 + t_2 = 6.3 \text{ s} \\ & t_1 + t_3 = 9.8 \text{ s} \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 - x_2 = 40 \text{ m} \\ t_3 - t_2 = 3.5 \text{ s} \end{array}\right| \begin{array}{l} (3) \\ (4) \end{array}$$

La primera parte tenemos un movimiento uniformemente acelerado que es común a las dos carreras.

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2} \Rightarrow x = \dfrac{at^2}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{at_1^2}{2} \\ v = v_0 + at \Rightarrow v = at \Rightarrow v_1 = at_1 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{v_1 t_1}{2} \\ v_1 = at_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} (5) \\ (6) \end{array}$$

La segunda parte es un movimiento con velocidad uniforme diferente para las dos carreras.

$$x = x_0 + v_1 t \Rightarrow x = v_1 t \Rightarrow \left| \begin{array}{ll} x_2 = v_1 t_2 & (7) \\ x_3 = v_1 t_3 & (8) \end{array}\right.$$

Restando 7 de 8 y utilizando 3 y 4 nos lleva a:

$$v_1 = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{40}{3.5} \text{ m/s} = 11.43 \text{ m/s} \quad (9)$$

Sumando 5 y 7 y usando 1 y 2 llegamos a:

$$x_1 + x_2 = \frac{v_1 t_1}{2} + v_1 t_2 = \frac{v_1(t_1 + t_2)}{2} + \frac{v_1 t_2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{2(x_1 + x_2) - v_1(t_1 + t_2)}{v_1} = 4.2 \text{ s}$$

Despejando el resto de variables
Obtenemos finalmente:

$$t_1 = 2.1 \text{ s} \qquad x_2 = 48 \text{ m}$$
$$x_1 = 12 \text{ m} \qquad t_3 = 7.7 \text{ s}$$
$$a = 5.44 \text{ m/s}^2 \qquad x_3 = 88 \text{ m}$$

Proyección del modelo a las carreras de 200 m y 1500 m

$$\frac{x - x_1}{t - t_1} = v_1 \Rightarrow t = t_1 + \frac{x - x_1}{v_1}$$

$$t_{200} = 2.1 + \frac{200 - 12}{11.43} = 18.6 \text{ s;}$$

$$t_{1500} = 2.1 + \frac{1500 - 12}{11.43} = 132.3 \text{ s=2m 12.3 s}$$

Movimiento circular

En el movimiento circular la trayectoria seguida por el sistema es circular, es decir, todos los puntos de la trayectoria se encuentran situados a una misma distancia *R*, que se denomina radio de la trayectoria circular, de un punto que se denomina centro de giro.

De esta definición podemos deducir dos propiedades del movimiento circular:

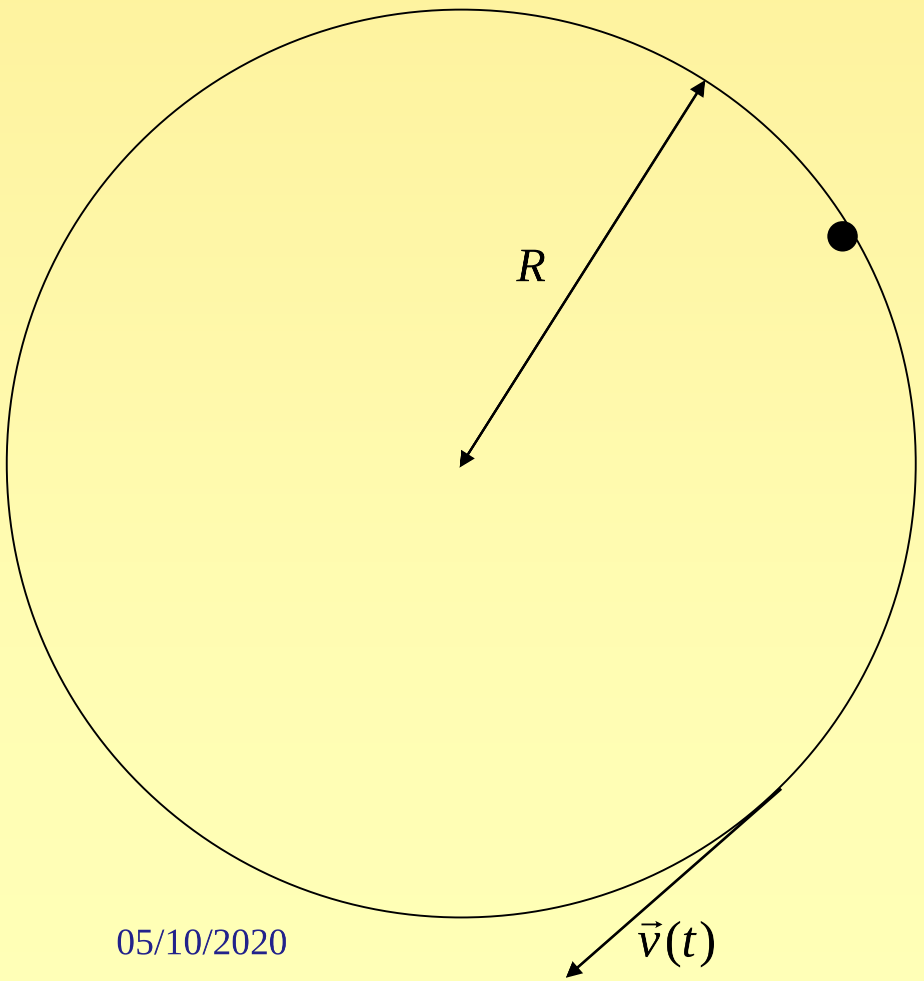
1.- Es un movimiento bi-dimensional, es decir, tiene lugar en dos dimensiones.
2.- Se trata de un movimiento acelerado puesto que la velocidad cambia de dirección y, por tanto, va a existir como mínimo una aceleración normal al movimiento cuya intensidad va a ser, tal y como vimos más arriba:

$$\left|\vec{a}_{\perp}(t)\right| = \frac{v^2(t)}{R}$$

En lugar de utilizar coordenadas cartesianas, para analizar este tipo de movimiento se utiliza lo que se conoce con el nombre de coordenadas polares en las cuales cada punto del plano se determina por un ángulo y una distancia.

Movimiento circular

En el movimiento circular la trayectoria seguida por el sistema es circular, es decir, todos los puntos de la trayectoria se encuentran situados a una misma distancia *R*, que se denomina radio de la trayectoria circular, de un punto que se denomina centro de giro.



De esta definición podemos deducir dos propiedades del movimiento circular:

1.- Es un movimiento bi-dimensional, es decir, tiene lugar en dos dimensiones.

2.- Se trata de un movimiento acelerado puesto que la velocidad cambia de dirección y, por tanto, va a existir como mínimo una aceleración normal al movimiento cuya intensidad va a ser, tal y como vimos más arriba:

$$\left|\vec{a}_{\perp}(t)\right| = \frac{v^2(t)}{R}$$

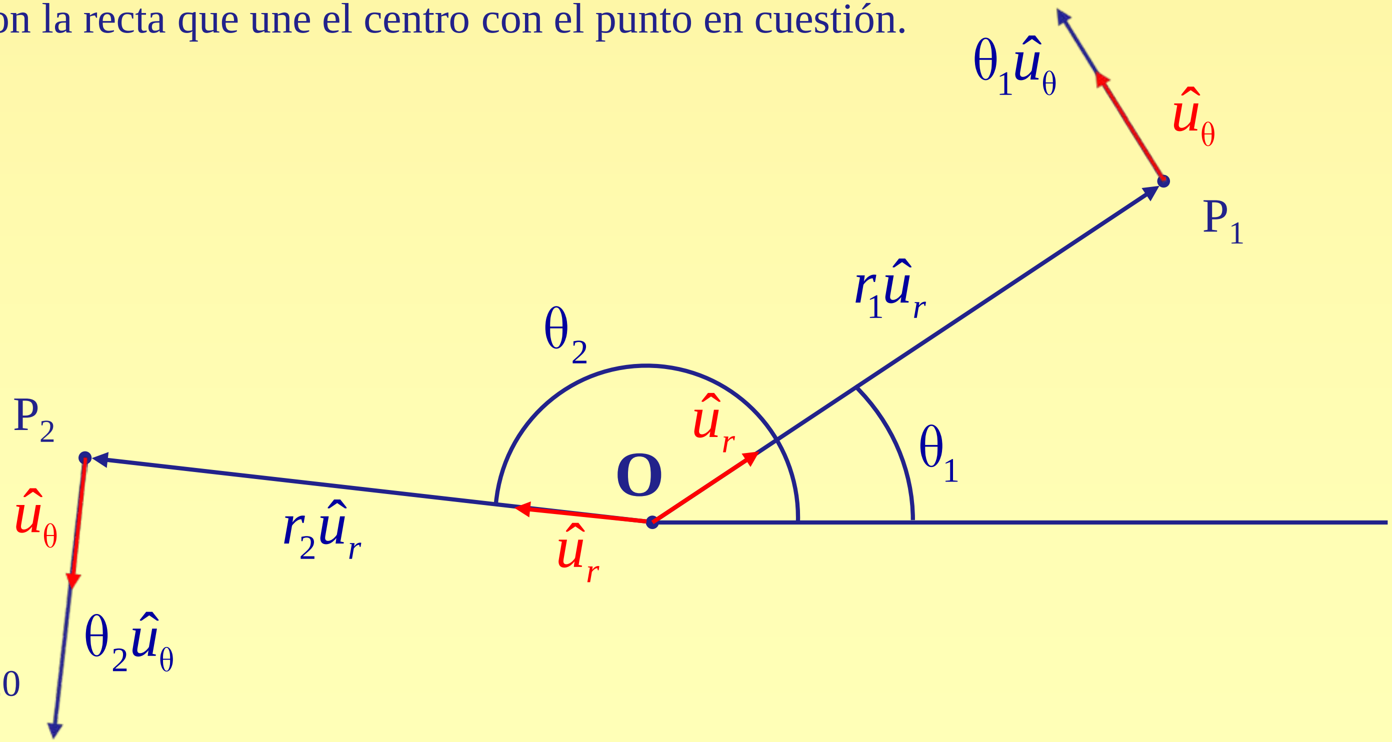
En lugar de utilizar coordenadas cartesianas, para analizar este tipo de movimiento se utiliza lo que se conoce con el nombre de coordenadas polares en las cuales cada punto del plano se determina por un ángulo y una distancia.

Sistema de coordenadas polares.

Para definir este sistema de coordenadas basta con tomar un punto como origen del sistema y una semi-recta con origen en dicho centro. Cualquier punto del plano se representa mediante las siguientes componentes:

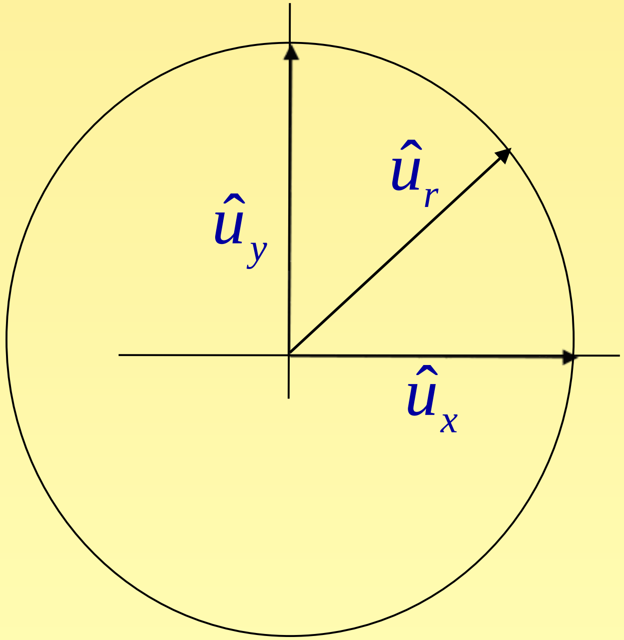
1.- Una componente en dirección radial representada mediante un vector unitario $\hat{u}_r$ que une el origen del sistema de referencia con el punto que se quiere representar, y con módulo igual a la distancia desde dicho centro hasta el punto en cuestión.

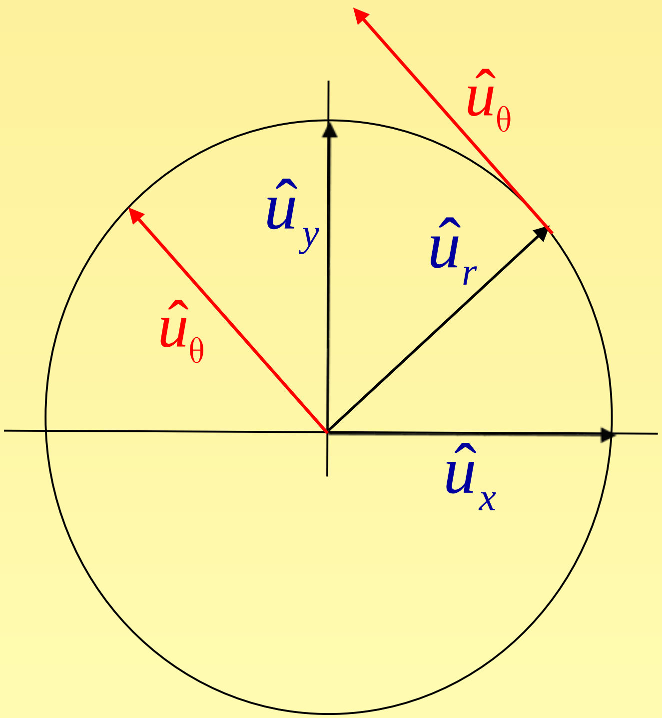
2.- Otra componente perpendicular a la anterior representada por un vector unitario $\hat{u}_\theta$ y con módulo igual al ángulo que forma la semi-recta que define el sistema de referencia con la recta que une el centro con el punto en cuestión.



Sistema de coordenadas polares.

La relación existente entre los vectores unitarios en coordenadas cartesianas y coordenadas polares será





$$\hat{u}_r = \cos(\theta)\hat{u}_x + \sin(\theta)\hat{u}_y$$

$$\hat{u}_\theta = -\sin(\theta)\hat{u}_x + \cos(\theta)\hat{u}_y$$

Sistema de coordenadas polares.

La ventaja fundamental de utilizar en el plano coordenadas polares frente a coordenadas cartesianas es que el vector posición puede escribirse en función únicamente del vector unitario $\hat{u}_r$

$$\vec{r}(t) = R(t)\hat{u}_r$$

De esta forma las magnitudes cinemáticas pueden escribirse de forma general en este sistema de coordenadas como:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dR(t)\hat{u}_r}{dt} = \frac{dR(t)}{dt}\hat{u}_r + R(t)\frac{d\hat{u}_r}{dt} =$$

$$= \frac{dR(t)}{dt}\hat{u}_r + R(t)\left[-\sin(\theta)\hat{u}_x + \cos(\theta)\hat{u}_y\right]\frac{d\theta}{dt} = \frac{dR(t)}{dt}\hat{u}_r + R(t)\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dR(t)}{dt}\hat{u}_r + R(t)\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta\right] =$$

$$= \frac{d^2R(t)}{dt^2}\hat{u}_r + 2\frac{dR(t)}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta + R(t)\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{u}_\theta - R(t)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{u}_r =$$

$$= \left[\frac{d^2R(t)}{dt^2} - R(t)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r + \left[2\frac{dR(t)}{dt}\frac{d\theta}{dt} + R(t)\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\hat{u}_\theta$$

Sistema de coordenadas polares.

Obviamente en el caso general no hay diferencia, a nivel de cálculo, entre utilizar coordenadas cartesianas o coordenadas polares. Sin embargo, cuando el movimiento es circular $R(t)$=cte las expresiones anteriores se simplifican muchísimo

$$\vec{r}(t) = R\hat{u}_r$$

$$\vec{v}(t) = R\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{u}_r + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{u}_\theta$$

Sistema de coordenadas polares.

A la derivada del ángulo con respecto al tiempo se le conoce con el nombre de velocidad angular y a su segunda derivada con el nombre de aceleración angular.

$$\left.\begin{array}{l} \omega(t) = \dfrac{d\theta}{dt} \\ \alpha(t) = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{r}(t) = R\hat{u}_r \\ \vec{v}(t) = R\omega\hat{u}_\theta \\ \vec{a}(t) = -R\omega^2(t)\hat{u}_r + R\alpha(t)\hat{u}_\theta \end{array}$$

Sistema de coordenadas polares.

Por otro lado,

$$\vec{v}(t) = R\omega(t)\hat{u}_\theta \Rightarrow v(t) = R\omega(t) \Rightarrow \omega(t) = \frac{v(t)}{R}$$

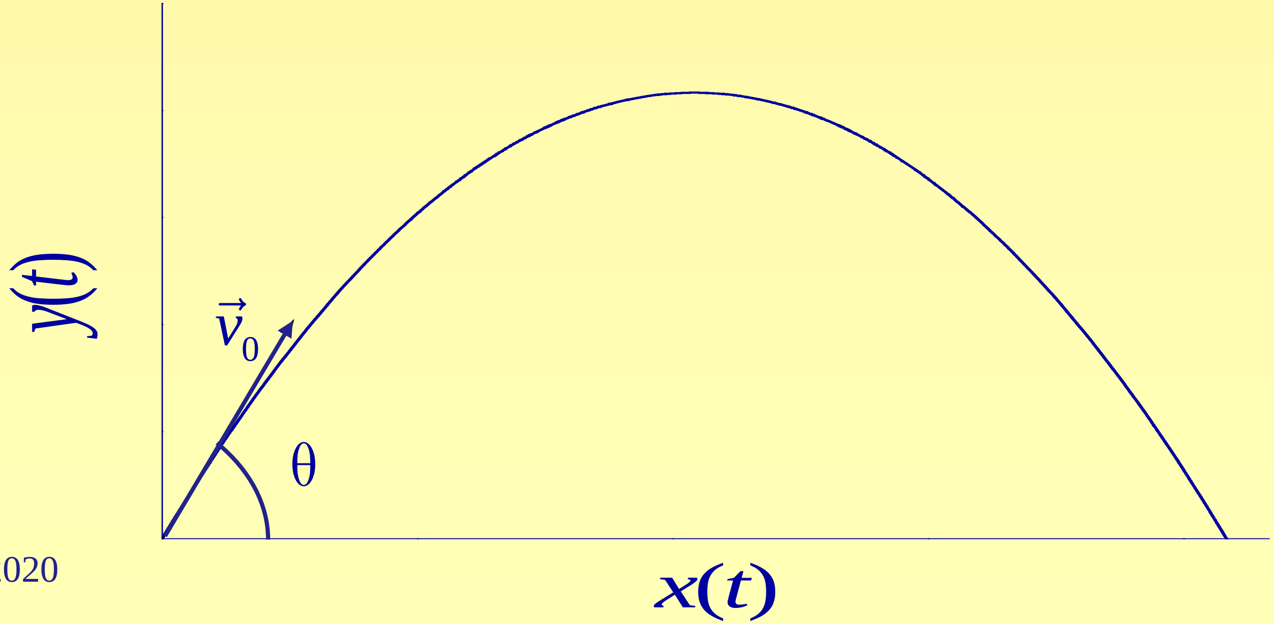
$$\vec{a}(t) = \vec{a}_\perp(t) + \vec{a}_\parallel(t) = -R\omega^2(t)\hat{u}_r + R\alpha(t)\hat{u}_\theta \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{a}_\perp(t) = -R\omega^2(t)\hat{u}_r \Rightarrow a_\perp = R\omega^2 = \dfrac{v^2}{R} \\ \\ \vec{a}_\parallel(t) = R\alpha(t)\hat{u}_\theta \Rightarrow a_\parallel = R\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{a_\parallel}{R} \end{array} \right.$$

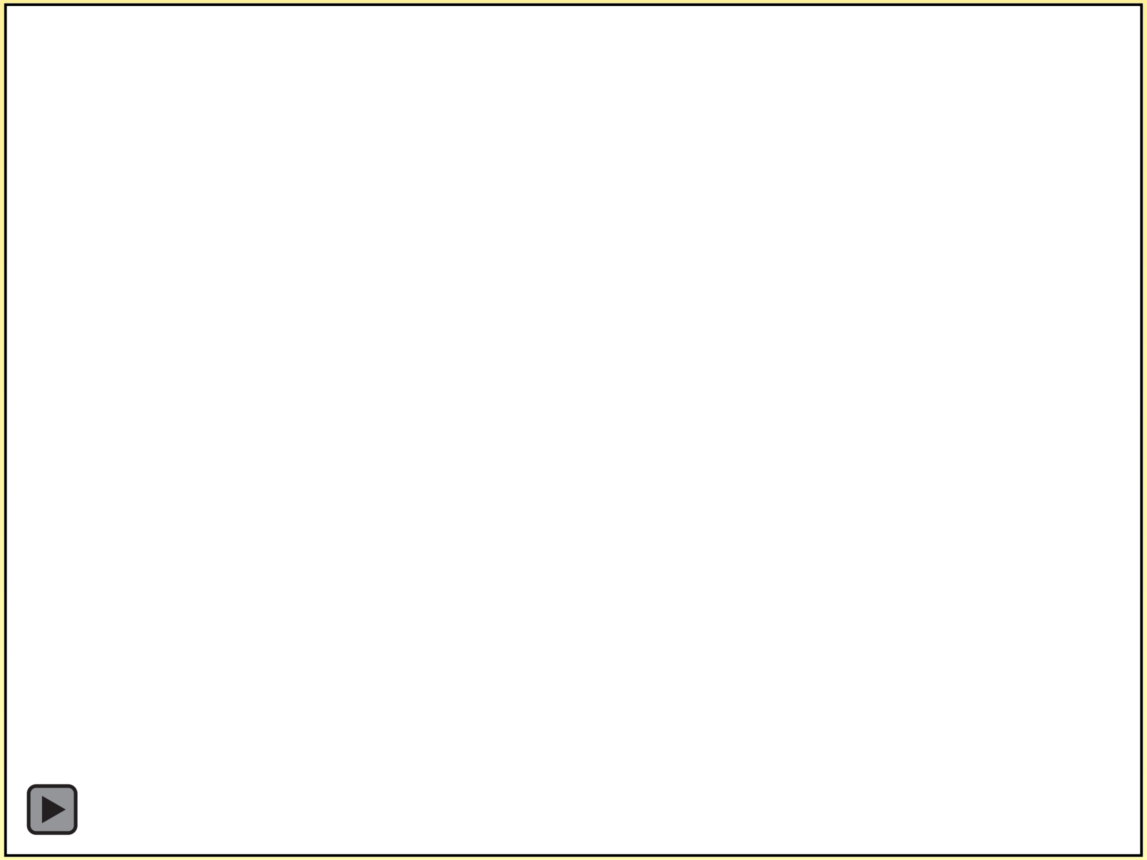
Cuando la velocidad angular, ω, es constante se dice que estamos ante un movimiento con velocidad angular uniforme, mientras que cuando la aceleración angular es constante se dice que estamos ante un movimiento circular de aceleración constante.

Ejercicio.- Hallar las ecuaciones para ambos tipos de movimiento.

Composición de movimientos. Tiro parabólico.

En la definición de las diferentes magnitudes vectoriales está implícito que el movimiento en cada una de las tres dimensiones es, en principio, independiente de las otras dos, es decir, el movimiento en el eje x es independiente de la cinemática en los ejes y y z. Esto nos permite tratar por separado el movimiento en cada uno de los ejes. Así, si sabemos que el sistema sufre una aceleración constante, en general debemos tomar uno de los ejes de nuestro sistema de referencia en esa dirección. El movimiento en ese eje será un movimiento uniformemente acelerado, mientras que en los otros dos ejes, no existirá movimiento o estaremos ante un movimiento con velocidad constante. Un ejemplo que ilustra esta situación es el conocido como tiro parabólico. En dicho movimiento un proyectil comienza el movimiento con una velocidad inicial v_0 y un ángulo de inclinación θ respecto a la horizontal.





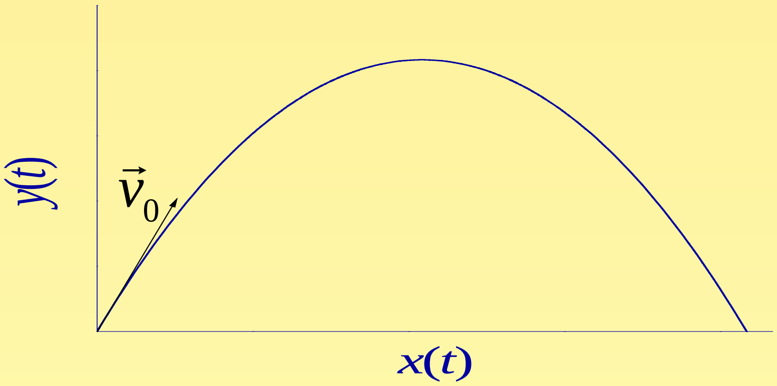
Ejercicio: Estimar un valor máximo para el record de longitud.

Record del mundo de Mike Powell: 8.95 m

Ejercicio: Estimar un valor máximo para el record de longitud. Record del mundo de Mike Powell: 8.95 m

Planteamiento

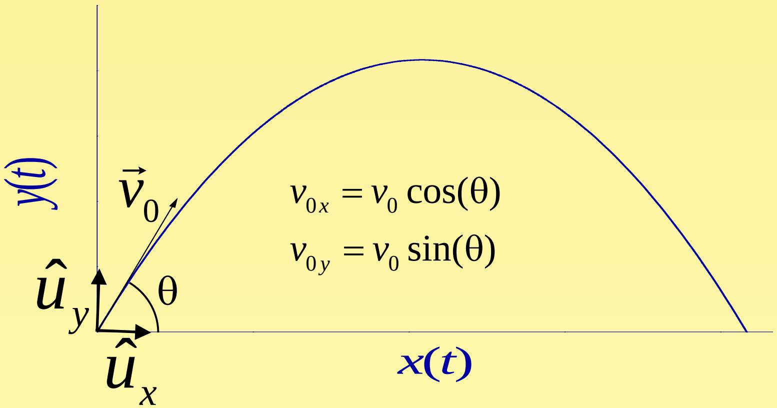
En el salto de longitud es en realidad responde a un tiro parabólico en el que la velocidad inicial es la velocidad con la que llega el corredor al salto.



Ejercicio: Estimar un valor máximo para el record de longitud. Record del mundo de Mike Powell: 8.95 m

Planteamiento

En el salto de longitud es en realidad responde a un tiro parabólico en el que la velocidad inicial es la velocidad con la que llega el corredor al salto.

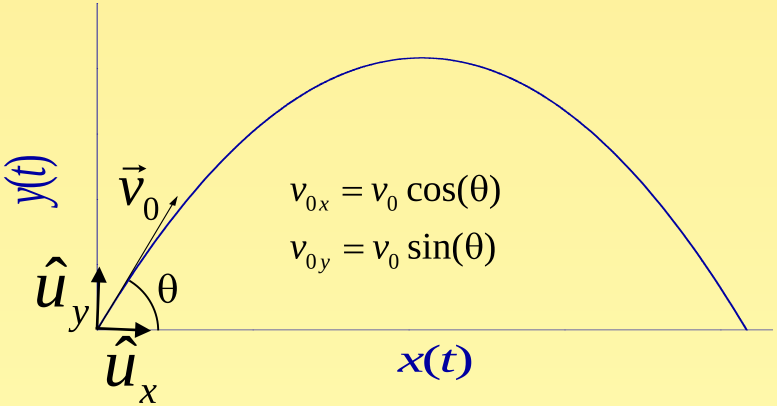


Ejercicio: Estimar un valor máximo para el record de longitud.

Record del mundo de Mike Powell: 8.95 m

Planteamiento

En el salto de longitud es en realidad responde a un tiro parabólico en el que la velocidad inicial es la velocidad con la que llega el corredor al salto.

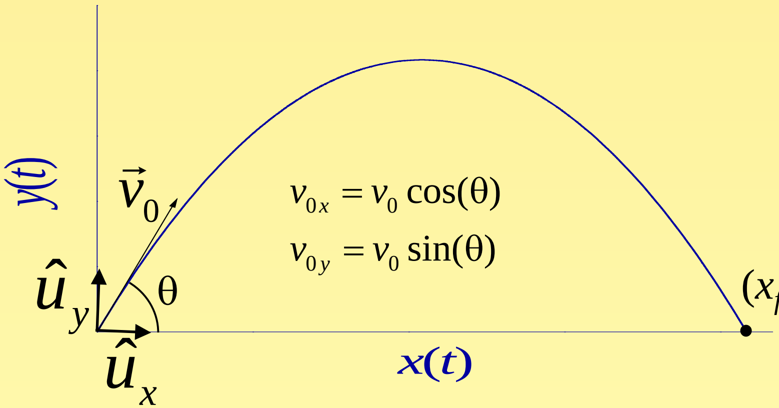


$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Eje x: } x = v_{0x}t = v_0 \cos(\theta)t \\ \text{Eje y: } y = v_0 \sin(\theta)t - \dfrac{gt^2}{2} \end{array} \right.$$

Ejercicio: Estimar un valor máximo para el record de longitud. Record del mundo de Mike Powell: 8.95 m

Planteamiento

En el salto de longitud es en realidad responde a un tiro parabólico en el que la velocidad inicial es la velocidad con la que llega el corredor al salto.



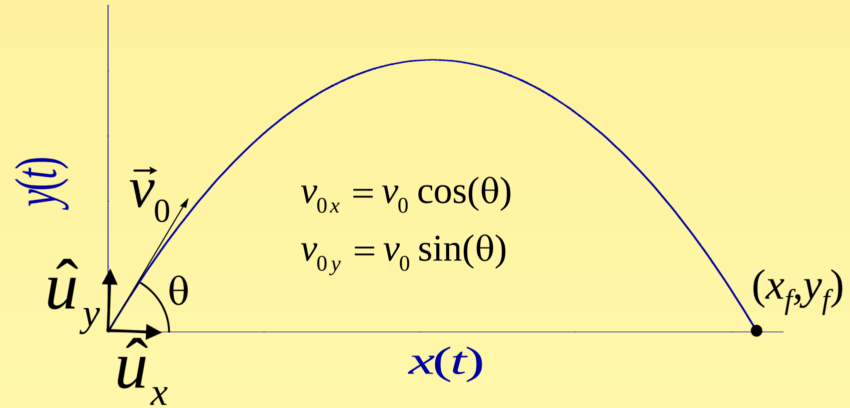
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Eje x: } x = v_{0x} t = v_0 \cos(\theta) t \\ \text{Eje y: } y = v_0 \sin(\theta) t - \dfrac{gt^2}{2} \end{array} \right.$$

Ejercicio: Estimar un valor máximo para el record de longitud.

Record del mundo de Mike Powell: 8.95 m

Planteamiento

En el salto de longitud es en realidad responde a un tiro parabólico en el que la velocidad inicial es la velocidad con la que llega el corredor al salto.



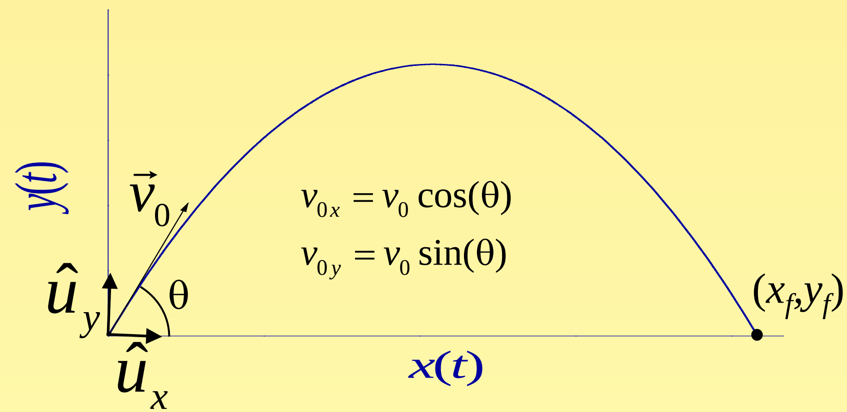
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Eje x: } x = v_{0x} t = v_0 \cos(\theta) t \\ \text{Eje y: } y = v_0 \sin(\theta) t - \dfrac{gt^2}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Eje y: } y_f = v_0 \sin(\theta) t_f - \frac{g t_f^2}{2} = 0 \Rightarrow \left(v_0 \sin(\theta) - \frac{g t_f}{2} \right) t_f = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} v_0 \sin(\theta) - \dfrac{g t_f}{2} = 0 \Rightarrow t_f = \dfrac{2 v_0 \sin(\theta)}{g} \\ t_f = 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio: Estimar un valor máximo para el record de longitud. Record del mundo de Mike Powell: 8.95 m

Planteamiento

En el salto de longitud es en realidad responde a un tiro parabólico en el que la velocidad inicial es la velocidad con la que llega el corredor al salto.



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Eje x: } x = v_{0x}t = v_0\cos(\theta)t \\ \text{Eje y: } y = v_0\sin(\theta)t - \dfrac{gt^2}{2} \end{array} \right.$$

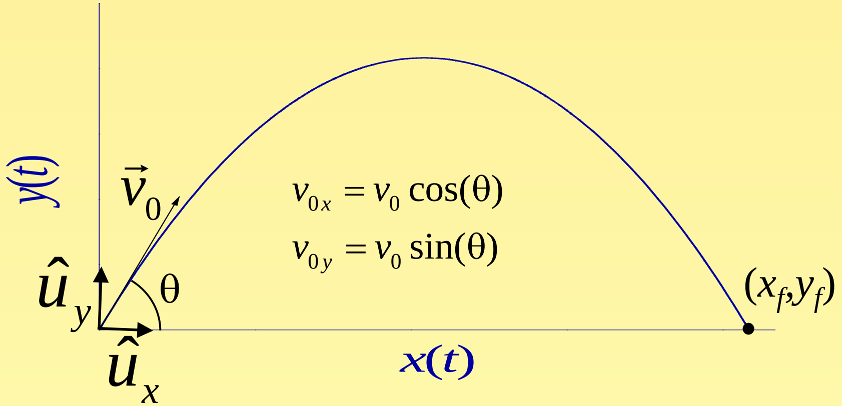
$$\text{Eje x: } x_f = v_0\cos(\theta)t_f = \frac{2v_0^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{g} = \frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}$$

$$\text{Eje y: } y_f = v_0\sin(\theta)t_f - \frac{gt_f^2}{2} = 0 \Rightarrow \left(v_0\sin(\theta) - \frac{gt_f}{2}\right)t_f = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} v_0\sin(\theta) - \dfrac{gt_f}{2} = 0 \Rightarrow t_f = \dfrac{2v_0\sin(\theta)}{g} \\ t_f = 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio: Estimar un valor máximo para el record de longitud. Record del mundo de Mike Powell: 8.95 m

Planteamiento

En el salto de longitud es en realidad responde a un tiro parabólico en el que la velocidad inicial es la velocidad con la que llega el corredor al salto.



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Eje x: } x = v_{0x} t = v_0 \cos(\theta) t \\ \text{Eje y: } y = v_0 \sin(\theta) t - \dfrac{gt^2}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Eje x: } x_f = v_0 \cos(\theta) t_f = \frac{2v_0^2 \sin(\theta)\cos(\theta)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

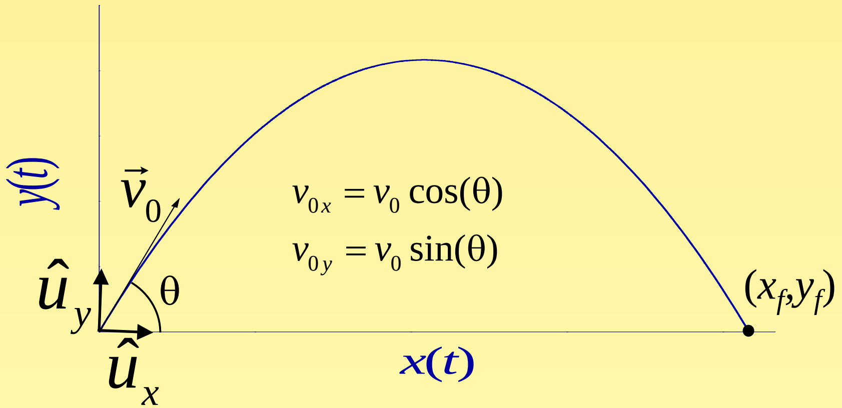
$$\text{Eje y: } y_f = v_0 \sin(\theta) t_f - \frac{gt_f^2}{2} = 0 \Rightarrow \left(v_0 \sin(\theta) - \frac{gt_f}{2} \right) t_f = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} v_0 \sin(\theta) - \dfrac{gt_f}{2} = 0 \Rightarrow t_f = \dfrac{2v_0 \sin(\theta)}{g} \\ t_f = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{dx_f}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \right) = \frac{2v_0^2 \cos(2\theta)}{g} = 0 \Leftrightarrow \theta = 45^{\circ} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Ejercicio: Estimar un valor máximo para el record de longitud. Record del mundo de Mike Powell: 8.95 m

Planteamiento

En el salto de longitud es en realidad responde a un tiro parabólico en el que la velocidad inicial es la velocidad con la que llega el corredor al salto.



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{Eje x: } x = v_{0x}t = v_0\cos(\theta)t \\ \text{Eje y: } y = v_0\sin(\theta)t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Eje x: } x_f = v_0\cos(\theta)t_f = \frac{2v_0^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{g} = \frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}$$

$$\text{Eje y: } y_f = v_0\sin(\theta)t_f - \frac{gt_f^2}{2} = 0 \Rightarrow \left(v_0\sin(\theta) - \frac{gt_f}{2}\right)t_f = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_0\sin(\theta) - \frac{gt_f}{2} = 0 \Rightarrow t_f = \frac{2v_0\sin(\theta)}{g} \\ t_f = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dx_f}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}\right) = \frac{2v_0^2\cos(2\theta)}{g} = 0 \Leftrightarrow \theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}\ \text{rad}$$

$$\max(x_f) = \frac{v_0^2}{g} = \frac{100\ \text{m}^2/\text{s}^2}{9.8\ \text{m/s}^2} = 10.2\ \text{m}$$