

## Distribuciones discretas. Distribución binomial.

### Idea intuitiva de variable aleatoria.

Denominamos variable aleatoria a toda función que asocia a cada elemento del espacio muestral de un experimento aleatorio un número real.

# Ejemplo.- Si efectuamos el experimento de lanzar dos monedas y observar lo que aparece en su cara superior, si denominamos  $C = \text{“salir cara”}$  y  $X = \text{“salir cruz”}$ , podremos asociar al experimento el espacio muestral

$$E = \{(C, C), (C, X), (X, C), (X, X)\}$$

Que podemos asociarle una variable aleatoria  $X = \text{“número de caras”}$ , obteniendo un nuevo espacio muestral

$$E_X = \{0, 1, 2\}$$

- Una **variable aleatoria es discreta** cuando solo puede tomar valores enteros
- Una **variable aleatoria es continua** cuando puede tomar cualquier valor de un intervalo real

### Función de probabilidad

Se denomina función de probabilidad de una variable aleatoria discreta  $X$  a la aplicación que asocia a cada valor  $x_i$  de la variable  $X$  su probabilidad  $p_i = P_x(X=i)$

# Ejemplo.- Si consideramos el experimento del lanzamiento de un dado y asociamos la variable aleatoria  $X = \text{“resultado obtenido en la cara superior”}$ , si suponemos que el dado está equilibrado, la función de probabilidad para cada valor de  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  se cumplirá

$$p_i = P_x(X=i) = \frac{i}{6}; i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

### Media y varianza de una variable aleatoria discreta

Si  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  es una variable aleatoria discreta, cuyas probabilidades asociadas son  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ , denominamos

**Media o esperanza matemática:**  $\mu = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$

**Varianza:**  $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \dots + x_n^2 \cdot p_n - \mu^2$

La raíz cuadrada de la varianza, la denominamos desviación típica  $\sigma$ .

# Ejemplo.- Si consideramos el experimento del lanzamiento de un dado y asociamos la variable aleatoria  $X = \text{“resultado obtenido en la cara superior”}$ , si suponemos que el dado está equilibrado, la función de probabilidad para cada valor de  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  se cumplirá

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{2}{6} + 5 \cdot \frac{2}{6} + 6 \cdot \frac{2}{6} = \frac{21}{6}$$

$$\sigma^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{2}{6} + 3^2 \cdot \frac{2}{6} + 4^2 \cdot \frac{2}{6} + 5^2 \cdot \frac{2}{6} + 6^2 \cdot \frac{2}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{35}{12}$$

## Distribución binomial o de Bernoulli

Un experimento aleatorio o espacio de probabilidad se dice de **Bernoulli** si la población  $\Omega$  solo posee dos resultados o sucesos elementales posibles  $\{E, F\}$  (cuyos suceso solemos llamar éxito o fracaso).

Las probabilidades de ambos sucesos se denotan por  $p$  y  $q$ , respectivamente y obviamente satisfacen que  $0 \leq p$ ,  $q \leq 1$  y  $p + q = 1$ .

# Ejemplos de experimentos de Bernoulli.-

- El lanzamiento de una moneda. Cuyos sucesos elementales son cara y cruz.
- El control de calidad de fabricación de un producto. Cuyos sucesos elementales son aceptables y defectuosos.

Asociado al experimento de Bernoulli, podemos definir una variable aleatoria  $X = \{0, 1\}$ , asociando el 0 al fracaso y 1 al éxito. Además, las probabilidades respectivas serán

$$p_0 = q \quad \text{y} \quad p_1 = p$$

Sin embargo, a menudo, nos interesa conocer el número  $k$  de éxitos al realizar un experimento compuesto por  $n$  experimentos de Bernoulli, sin tener en cuenta el orden en el que aparecen dichos éxitos o fracasos. Y teniendo en cuenta, que el espacio muestral para un experimento de Bernoulli consta de dos sucesos elementales  $\{E, F\}$ , con probabilidades  $p$  y  $q$  para  $E$  y  $F$  respectivamente, y que dichos ensayos son independientes y para cualquier suceso en el

que aparezcan  $k$  éxitos, existen  $\binom{n}{k}$  formas posibles en las que pueden aparecer. Si denominamos en dicho experimento la variable aleatoria:

$X =$  El número de **éxitos** que aparecen en  $n$  experimentos.

Se cumplirá

$$p_k = P_X(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

La variable  $X$  obtenida decimos que se distribuye según una **Binomial de parámetros  $n$  y  $p$**  y representamos por  $B(n, p)$ .

# Ejemplo.- Si se sabe que la probabilidad de nacer varón es  $p = 0,4$ , El número de varones nacidos en una familia de 8 hijos es una distribución binomial  $B(8, ; 0,4)$ .

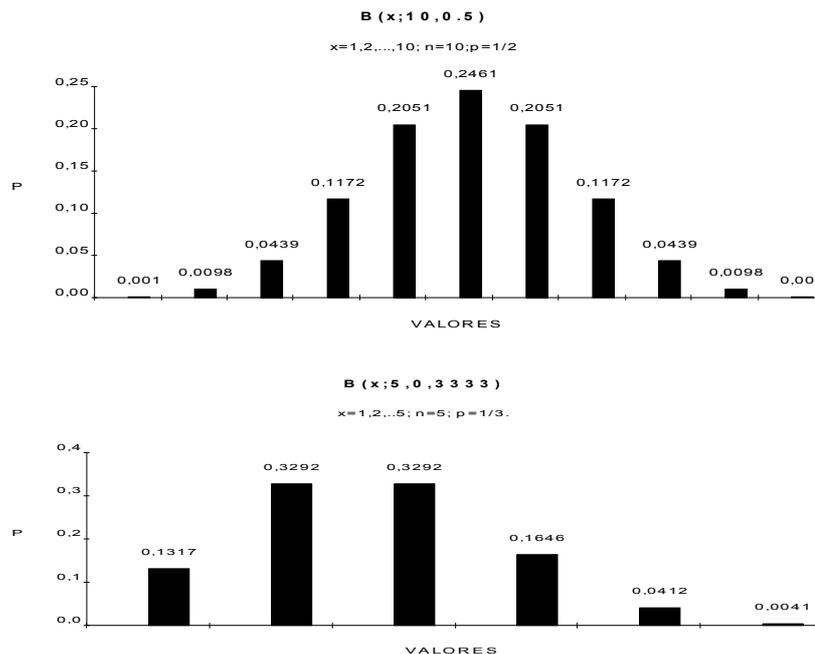
## Función de probabilidad

Si  $X$  es una variable aleatoria que se distribuye según una distribución  $B(n,p)$ , entonces para cada  $X = k$ , su probabilidad vendrá dada por

$$p_k = P_X(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Ejemplo.- La representación gráfica de las probabilidades de una variable aleatoria

$B\left(10, \frac{1}{2}\right)$  y  $B\left(5, \frac{1}{3}\right)$  será



### Media y varianza de la distribución binomial

A partir de una distribución de Bernoulli de parámetro  $p$  ( $q=1-p$ , es decir  $B(1, p)$ ), podemos calcular su media y su varianza

$$\mu = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

$$\sigma^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q - p^2 = p \cdot (1-p) = p \cdot q$$

Podemos calcular la media y varianza de una variable aleatoria binomial  $B(n, p)$ , teniendo en cuenta que consiste en  $n$  pruebas repetidas de la la distribución  $B(1, p)$ , por lo que únicamente tendremos que multiplicar por  $n$  los resultados anteriores, es decir

$$\mu = n \cdot p$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$$

La desviación típica será  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

# Ejemplo.- En un grupo de 10 alumnos de un centro educativo se ha comprobado que cada

uno de ellos falta a clase el 5% de los días. Calcular la probabilidad de que un día determina do: a) no se registre ninguna ausencia; b) falten a clase más de 5 alumnos; c) no asista a clase ningún alumno.

Si  $X$  es la variable aleatoria que expresa el número de alumnos que faltan a clase,  $X$  se distribuirá según una  $B(10; 0,05)$ , y por tanto se cumplirá:

$$a) \quad p_0 = \binom{10}{0} \cdot 0,95^{10} = 0,599$$

$$b) \quad P_X(X > 5) = p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} = \\ = \binom{10}{6} \cdot 0,05^6 \cdot 0,95^4 + \binom{10}{7} \cdot 0,05^7 \cdot 0,95^3 + \binom{10}{8} \cdot 0,05^8 \cdot 0,95^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,05^9 \cdot 0,95^1 + \binom{10}{10} \cdot 0,05^{10} = \\ = 2,75 \cdot 10^{-6}$$

$$c) \quad p_{10} = \binom{10}{10} \cdot 0,05^{10} = 9,8 \cdot 10^{-14}$$