Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Funções e Equações Polinomiais Comportamento da Função do 3º Grau

CLEBER DA COSTA QUEIROZ

Goiânia
2013

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Cleber da Costa Queiroz				
E-mail:	cleber10dez@hotmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Secretaria de Educação do Estado de Goiás				
Agência de fomento:	Coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior			Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:		CNPJ:	00.889.834/0001-08
Título:	Funções e Equações Polinomiais Comportamento da Função do 3º Grau				
Palavras-chave:	Equações polinomiais, polinômios, números complexos				
Título em outra língua:	Polynomial Functions and Equations Functions Behavior of 3rd Grade				
Palavras-chave em outra língua:	Polynomial equations, polynomial, complexes numbers				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	22/03/2013				
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional				
Orientador (a):	Maurílio Márcio Melo				
E-mail:	mauriliomelo3@gmail.com				
Co-orientador(a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Assinatura do (a) autor (a) — Data: 11 / 04 / 2013

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

CLEBER DA COSTA QUEIROZ

Funções e Equações Polinomiais Comportamento da Função do 3º Grau

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em matemática

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Maurílio Márcio Melo

Goiânia
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

Queiroz, Cleber da Costa.
Q384f Funções e equações polinomiais comportamento da função de 3º grau [manuscrito] / Cleber da Costa Queiroz. - 2013.
52 f. : figs.

Orientador: Prof. Dr. Maurílio Márcio Melo.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Equações polinomiais. 2. Polinômios. 3. Números complexos. I. Título.

CDU: 512.622

Cleber da Costa Queiroz

Funções e Equações Polinomiais, Comportamento da Função do 3º Grau

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 22 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Maurílio Márcio Melo
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Rui Seimetz
Universidade de Brasília-UnB

Prof. Dr.Marcelo Almeida de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Cleber da Costa Queiroz

Licenciado em Matemática e Especialista em Ensino de Matemática pela UEG. Professor da Secretaria de Educação do Estado de Goiás e Secretaria de Educação do Município de Anápolis, atuando no ensino desde 2005.

Dedico este trabalho a minha família, aos meus filhos, Sophia Lanna e Enzo Henrique, e a todos os professores que procuram caminhos diferentes para ensinar aos alunos.

Agradecimentos

Aos meus pais, por sempre incentivarem os meus estudos.

Aos meus filhos, Sophia Lanna e Enzo Henrique, que são o que tenho de mais valioso.

Aos professores, tutores e coordenadores do IME-UFG pela dedicação e empenho durante o curso.

Aos meus colegas de mestrado do PROFMAT pelo companheirismo, amizade e incentivo.

A CAPES pelo suporte financeiro.

Ao professor orientador Dr. Maurilio Márcio Melo, pela paciência, dedicação e sugestões para realização deste trabalho.

Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que a outra estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura.

Hermann Hankel .

Resumo

Queiroz, Cleber da Costa . **Funções e Equações Polinomiais Comportamento da Função do 3º Grau** . Goiânia, 2013. 52p. Trabalho de conclusão de curso. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Este trabalho tem por objetivo estudar os métodos algébricos para resolução das equações polinomiais onde destinamos um estudo mais aprofundado para as equações polinomiais do 3^o grau. Inicialmente fazemos uma abordagem dos aspectos históricos relacionados às funções polinomiais citando alguns dos matemáticos que colaboraram para obtenção desses métodos resolutivos. Destinamos um capítulo ao estudo dos números complexos e polinômios, os quais são de fundamental importância para o desenvolvimento do tema. Nosso objetivo não foi de aprofundar o estudo de números complexos e polinômios, mas sim destacar as definições, propriedades e teoremas mais relevantes para a fundamentação do trabalho, visto que uma equação polinomial possui pelo menos uma raiz complexa (Teorema Fundamental da Álgebra) e que sempre utilizamos os conhecimentos a respeito das equações polinomiais. Por fim, mostramos métodos resolutivos para equações polinomiais até o grau 4, destacando a Fórmula de Cardano e o método algébrico para equação do 4^o grau, além de fazer um estudo sobre a relação entre os coeficientes e as raízes da equação do 3^o grau, análise das raízes da equação do 3^o grau e estudo sobre o gráfico da função do 3^o grau.

Palavras–chave

Equações polinomiais, polinômios e números complexos.

Abstract

Queiroz, Cleber da Costa . **Polynomial Functions and Equations Functions Behavior of 3rd Grade**. Goiânia, 2013. 52p. Completion of course work. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

This paper aims to study the algebric methods to solve polynomial equations, with a deeper study about 3^{rd} grade polynomial equations. It firstly broaches the historical aspects about polynomial functions by mentioning some mathematicians who collaborated to the obtainment of these resolutive methods. One chapter is designated to the study of complexes numbers and polynomial that have a great importance to theme development. The objective was not to deepen in the study of complexes numbers and polynomial, but to put in relief the definitions, properties and theorems that are considerable to the paper base, once that a polynomial equation has at least a complex root (Fundamental Theorem of Algebra) and that we always use the knowledge about the polynomial equations. By the end, resolutive methods for polynomial equations until 4^{rd} grade are presented, emphasizing Cardano's Formule and the algebric method for the 4^{rd} grade equation, besides making a study about the relation between the coefficient and the roots of the 3^{rd} grade equation, analysis of 3^{rd} grade equation roots and the study of the 3^{rd} grade function's graphic.

Keywords

Polynomial equations, polynomial and complexes numbers.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Aspectos Históricos

Este trabalho tem por objetivo o estudo analítico das equações polinomiais, resgatando os métodos de resolução das equações do 1º ao 4º grau. Além disso, visa contribuir para o aprimoramento dos conhecimentos dos interessados nesta área, acerca das equações polinomiais. Entretanto, para uma melhor compreensão do trabalho produzido aqui foi fundamental destinar um capítulo para abordar conhecimentos sobre números complexos e polinômios.

Sabemos que as equações algébricas existem a aproximadamente 4000 anos graças a registros muitos antigos, os papiros, onde encontramos várias maneiras usadas para obter suas soluções [2]. A partir dos axiomas publicados em Os Elementos de Euclides que se chegou ao método de resolução da equação polinomial do 1º grau que se utiliza até hoje, dando um grande passo para obtenção do método para resolver as equações do 2º grau [2]. A fórmula resolutiva de Bháskara (1114-1185) na verdade não foi desenvolvida por ele e sim um século antes pelo matemático hindu Sridhara que fundamentou na ideia de reduzir a equação do 2º grau para uma equivalente do 1º grau, necessitando para sua resolução a extração de raízes quadradas. Para tal feito os hindus se basearam na técnica de completar quadrados sendo que as operações usadas obedeciam aos axiomas de Euclides [2]. O fato que tanto números positivos como números negativos quando elevados ao quadrado resultam sempre em um número positivo levou a assumir a raiz quadrada hora positiva hora negativa onde para cada uma das possibilidades encontra-se uma raiz. Deve-se levar em conta que, neste período, quando encontravam a raiz quadrada de um número negativo eles concluíam que a equação não tinha solução. Um problema clássico que envolve equações do 2º grau é encontrar dois números conhecendo sua soma e seu produto. Uma vez resolvido o problema das equações do 2º grau, os matemáticos buscavam agora resolver as equações do 3º grau.

Por volta de 1510, Scipione Del Ferro, encontrou uma fórmula resolutiva para equações do 3º grau do tipo $x^3 + px + q = 0$ não publicando sua obra até sua morte. Um de seus discípulos, Antonio Maria Fior, que conhecia o método tenta se apropriar do mérito de seu mestre. Como na época eram bem comuns desafios entre os sábios, então

Antonio Maria Fior decide desafiar Nicollo Tartaglia (1499-1557), que era conhecido pelo seu talento. Tartaglia por ter uma infância muito pobre sem poder estudar, mas com muita vontade de aprender destinou a estudar por conta própria com os poucos livros que conseguia ganhando mais tarde seu sustento como professor. Publicou várias obras sendo marcada sua história a partir do desafio proposto por Antonio Fior [2].

O desafio era resolver problemas propostos um ao outro, assim Antonio Fior conhecendo a solução de equações do 3º grau da forma $x^3 + px + q = 0$ apresentaria questões relacionadas a ela. Tartaglia aceitando o desafio e mais tarde sabendo que Antonio Fior conhecia o método para resolver tais equações dedicou-se ao estudo dessas equações, mas além de resolver equações da forma $x^3 + px + q = 0$, encontrou uma fórmula geral para resolver equações da forma $x^3 + px^2 + q = 0$. Como Antonio Fior não conhecia esse método de resolução não conseguiu resolver as questões propostas por Tartaglia, que consistia em resolver equações da forma $x^3 + px^2 + q = 0$, saindo derrotado [2]. Na verdade Tartaglia encontrou um método para resolver qualquer equação do 3º grau, pois qualquer equação do 3º grau pode ser escrita na forma $x^3 + px + q = 0$, bastando fazer uma substituição de variável que elimine o termo de grau 2.

Neste mesmo período, Gerolamo Cardano (1501-1576) dedicava-se a escrever um livro sobre Álgebra, Aritmética e Geometria. Quando ficou sabendo que Tartaglia havia encontrado a solução para equações do 3º grau foi procurá-lo e pedir para que revelasse seu método para que pudesse publicá-lo. Mas Tartaglia não aceitou, pois ele mesmo pretendia publicar sua obra. Cardano não desistiu e após várias tentativas e juras conseguiu que Tartaglia revelasse seu método. Cardano trai os juramentos feitos a Tartaglia e em 1545 publica Ars Magna onde, em sua obra, consta a fórmula de Tartaglia, vários elogios e o fato que anos antes Scipione Del Ferro já havia chegado aos mesmos resultados. Esta fórmula gerou denuncias e ofensas entre eles ficando mesmo assim conhecida como Fórmula de Cardano. O que não imaginaram é que a fórmula trouxesse mais perguntas do que respostas, entre elas, pode-se destacar que ao utilizá-la encontramos raiz quadrada de um número negativo, que na época ainda não estava definida, mesmo a equação tendo apenas raízes reais. Somente à aproximadamente duzentos anos depois foi que Euler propôs representar a raiz quadrada de menos um por i ($i = \sqrt{-1}$). Ao aplicar o método de Cardano, Rafael Bombelli (1526-1572) percebeu que sua resolução sempre revelava raízes estranhas além das raízes reais. Cardano também tinha deparado com essa situação, não fazendo nenhum aprofundamento sobre o tema. Bombelli ao contrário de Cardano estudou formas de operações com esse tipo de raízes estranhas dando origem aos primeiros esboços para criação do conjunto dos números complexos [2].

Cardano, quando desafiado por Zuanne de Tonini da Ci, foi lhe proposto que resolvesse uma questão que envolvia a equação $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$, após inúmeras tentativas Cardano, não obtendo êxito, acaba passando a questão para seu aluno Ludovico Ferrari (1522-1560) que acabou encontrando a fórmula para a solução da equação geral do 4º grau. Esta fórmula também foi publicada por Cardano em seu livro Ars Magna [2].

Com essa fórmula surge a dúvida como uma equação do 2º grau possui duas raízes e a do 4º grau possui quatro raízes, então uma equação de grau n possuiria n raízes? Foi apenas em 1.799 que o brilhante matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) apresentou como sua tese de doutorado o famoso Teorema Fundamental da Álgebra. Este teorema dizia que toda equação polinomial tem ao menos uma solução no campo dos números complexos, seja a esta solução, e fazendo as sucessivas divisões do polinômio pelo binômio $(x-a)$, obtemos uma decomposição em n fatores, sendo que n é o grau do polinômio. Ficou assim provado que todo polinômio de grau n, possui exatamente n raízes, contando com as suas multiplicidades [2].

Após a descoberta da solução das equações do 4º grau por Ferrari, o desafio agora para os matemáticos passou a ser encontrar um método para equações do 5º grau. Muitas tentativas foram realizadas, mas nenhuma com êxito. Niels Henrik Abel (1802-1829) acreditou que havia encontrado tal método, porém ele mesmo percebeu que sua solução estava errada. E, após muito trabalho, por volta de 1823, demonstrou que de um modo geral é impossível resolver equações do 5º grau utilizando apenas operações algébricas, a não ser os casos particulares. Foi Abel quem demonstrou o teorema *O polinômio geral de grau n não é solúvel por radicais se n for maior ou igual a 5*, que hoje é conhecido como Teorema de Abel-Ruffini. Évariste Galois (1811-1832), assim como Abel, acreditava que conseguira encontrar uma solução geral para as equações do 5º grau chegando as mesmas conclusões de Abel, com um diferencial enquanto Abel usou apenas operações algébricas para demonstrar a impossibilidade de uma solução geral para tais equações, Galois criou a Teoria dos Grupos para fazer tal demonstração. Além disso, a Teoria de Grupos de Galois, não prova apenas que as equações de grau superior a 4 não podem ser resolvidas em geral por métodos algébricos, mas também porque as de grau inferior a 5 podem ser resolvidas usando estes métodos [2].

Em um curso a nível de Mestrado Acadêmico em Matemática, os alunos cursam a disciplina de Álgebra Abstrata ou Álgebra Moderna onde estudam sobre a Teoria de Grupos. Para aqueles que se interessaram pelo tema indicamos [3] como referência.

CAPÍTULO 1

Números Complexos e Polinômios

Nas seções seguintes faremos um estudo não muito aprofundado sobre os números complexos. Para maiores informações indicamos as referências [1], [5], [6], [7] e [12].

1.1 Os Números Complexos

Existem várias maneiras de construir o conjunto dos números complexos, mas sempre conduzem para uma extensão do conjunto dos números reais com a intenção de inserir um elemento i, tal que:

$$i = \sqrt{-1}.$$

O fato da equação polinomial $x^2 + 1 = 0$ não ter solução em $\mathbb{R}$, foi um motivo para a criação do conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$).

1.1.1 Definição de Números Complexos

Definição 1.1 - *Um número complexo z é escrito na forma de um par ordenado (a,b), onde $a, b \in \mathbb{R}$, ou na forma $z = a + bi$. Em termos de notação de conjunto usa-se a letra $\mathbb{C}$ para designar o conjunto dos números complexos e a notação é:*

$$\mathbb{C} = \{z = (a,b) | a \in \mathbb{R} \ e \ b \in \mathbb{R}\} \ ou \ \mathbb{C} = \{z = a + bi | a \in \mathbb{R} \ e \ b \in \mathbb{R}\}.$$

Observações:

(1) A parte real de z é representada por $Re(z) = a$ e a parte imaginária de z é representada por $Im(z) = b$,

(2) Quando $b = 0$ implicará em $z = a$, dizemos que z é um número complexo real,

(3) Quando $a = 0$ implicará em $z = bi$, dizemos que z é um número imaginário puro,

(4) Quando $a = 0$ e $b = 1$ implicará em $z = i$, dizemos que z é a unidade imaginária do conjunto dos números complexos.

1.1.2 O Plano Complexo

Podemos representar os números complexos no plano cartesiano, pois pela Definição 1.1 todo número complexo pode ser escrito na forma de um par ordenado. A esse plano cartesiano damos o nome de plano complexo ou plano de Argand-Gauss. Então podemos olhar os pontos do plano cartesiano como o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$.

Com este olhar os eixos x e y do plano cartesiano são denominados, respectivamente, por eixo real e eixo imaginário do plano complexo. O eixo real é composto por números complexos da forma $z = a$ (número complexo real), e o eixo imaginário é composto por números complexos da forma $z = bi$ (número imaginário puro).

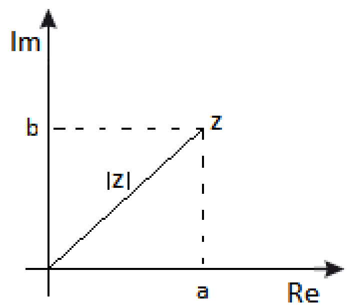

Figura 1.1: *Representação de um número complexo z no Plano Complexo.*

Definição 1.2 *Seja um número complexo z representado por $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Seu conjugado é dado por $\overline{z}$ sendo representado por $\overline{z} = a - bi$. No plano complexo z e $\overline{z}$ são simétricos em relação ao eixo real.*

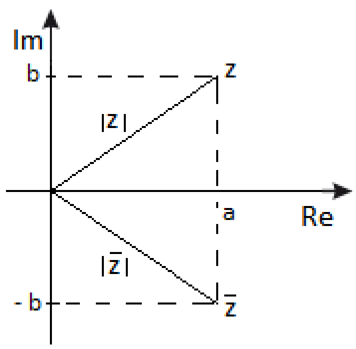

Figura 1.2: *Representação de um número complexo z e seu conjugado $\overline{z}$ no Plano Complexo.*

Definição 1.3 *O número real $|z|$ é o módulo do número complexo z, ou seja, a distância de z até a origem, portanto*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Definição 1.4 *Dizemos que dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ são iguais, ou seja, $z_1 = z_2$ se suas respectivas partes real e imaginária são iguais, isto é, $a = c$ e $b = d$.*

1.1.3 Operações com Números Complexos

Considere os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. Temos as seguintes operações:

(O_1) ADIÇÃO
A adição de z_1 e z_2 se obtém pelas somas de suas respectivas partes real e imaginária, ou seja,

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i.$$

(O_2) SUBTRAÇÃO
A subtração de z_1 e z_2 se obtém pelas subtrações de suas respectivas partes real e imaginária, ou seja,

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i.$$

(O_3) MULTIPLICAÇÃO
A multiplicação de z_1 e z_2 é obtida aplicando a distributividade e agrupando as partes real e imaginária. (Lembre-se que $i^2 = -1$)

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

(O_4) DIVISÃO
A razão entre z_1 e z_2 é obtida multiplicando-se o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, isto é, (lembre-se que $z_2 = c + di$ seu conjugado é dado por $\overline{z_2} = c - di$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Exemplo 1.1 *Dados $z_1 = 4 + 5i, z_2 = 5 - 2i$ e $z_3 = -1 - i$, determine:*

(a) $z_1 + z_2 + z_3$
Desenvolvendo as operações com números complexos chegamos a igualdade
$z_1 + z_2 + z_3 = (4 + 5i) + (5 - 2i) + (-1 - i) = (4 + 5 - 1) + (5 - 2 - 1)i = 8 + 2i.$

(b) $z_1 - z_2 - z_3$

Desenvolvendo as operações com números complexos chegamos a igualdade

$z_1 - z_2 - z_3 = (4+5i) - (5-2i) - (-1-i) = (4-5+1) + (5+2+1)i = 8i.$

(c) $z_1 \cdot z_2$

Desenvolvendo as operações com números complexos chegamos a igualdade

$z_1 \cdot z_2 = (4+5i)\cdot(5-2i) = (4\cdot 5 - 5(-2)) + (4(-2) + 5\cdot 5)i$

$z_1 \cdot z_2 = (20+10) + (-8+25)i = 30+17i.$

(d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

Desenvolvendo as operações com números complexos chegamos a igualdade

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{4+5i}{5-2i} = \dfrac{4\cdot 5 + 5\cdot(-2)}{5^2+(-2)^2} + \dfrac{5\cdot 5 - 4(-2)}{5^2+(-2)^2}i = \dfrac{10}{29} + \dfrac{33}{29}i.$

1.1.4 Propriedades das Operações com Números Complexos

Considere os números complexos $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ e $z_3 = e+fi$. Temos:

(1) O conjunto dos números complexos em relação a adição, possui as seguintes propriedades:

- (A_1) COMUTATIVA: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$,
- (A_2) ASSOCIATIVA: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$,
- (A_3) ELEMENTO NEUTRO: Existe um elemento $z_e = 0$ de $\mathbb{C}$, denominado elemento neutro, tal que, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $z + z_e = z_e + z = z$,
- (A_4) ELEMENTO INVERSO: Todo elemento de $\mathbb{C}$ é simetrizável em relação a adição, ou seja, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\exists\, z' \in \mathbb{C} : z + z' = z' + z = z_e$.

(2) O conjunto dos números complexos em relação a multiplicação, possui as seguintes propriedades:

- (M_1) COMUTATIVA: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$,
- (M_2) ASSOCIATIVA: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$,
- (M_3) ELEMENTO NEUTRO: Existe um elemento z_n de $\mathbb{C}$, denominado elemento neutro, tal que, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $z \cdot z_n = z_n \cdot z = z$,
- (M_4) ELEMENTO INVERSO: Todo elemento de $\mathbb{C}$ é simetrizável em relação a multiplicação, ou seja, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\exists\, z^{-1} \in \mathbb{C} : z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = z_n$, com $z \neq 0 + 0i$,
- (M_5) DISTRIBUTIVIDADE: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Com as operações usuais da adição e multiplicação definidas, temos que o conjunto dos números complexos é um Corpo, sendo representado por $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

1.1.5 Forma Trigonométrica ou Polar dos Números Complexos

Além da forma cartesiana (a,b) e a forma algébrica $(a+bi)$ podemos escrever um número complexo em sua forma trigonométrica ou polar. Para isso, dado $z = a+bi$ tendo módulo $|z|$, com $|z| \neq 0$, e argumento θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$, valem as relações:

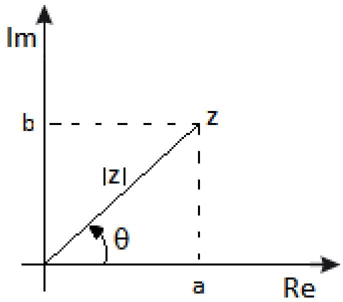

Figura 1.3: *Módulo e argumento de um número complexo.*

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \theta = \arctan\frac{b}{a}, \quad sen\theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z|\,sen\theta \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z|\cos\theta.$$

Das igualdades acima, temos

$z = a+bi \Rightarrow z = |z|\cos\theta + (|z|\,sen\theta)i \Rightarrow z = |z|\,(\cos\theta + isen\theta)$.

Portanto a forma trigonométrica ou polar de z é dada por

$$z = |z|\,(\cos\theta + isen\theta).$$

Observações:

(i) Se $a = 0$ e $b > 0$, então $\theta = \frac{\pi}{2}$,

(ii) Se $a = 0$ e $b < 0$, então $\theta = \frac{3\pi}{2}$,

(iii) Se $b = 0$ e $a > 0$, então $\theta = 0$,

(iv) Se $b = 0$ e $a < 0$, então $\theta = \pi$.

Exemplo 1.2 *Determine a forma trigonométrica ou polar dos números complexos abaixo.*

(a) $z = 2+2i$

Para determinar a forma trigonométrica ou polar procedemos da seguinte maneira.

$|z| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ *e* $\theta = \arctan\frac{2}{2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, *então*

$z = |z|\,(\cos\theta + isen\theta) \Rightarrow z = 2\sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4})]$.

(b) $z = 1+\sqrt{3}i$

Para determinar a forma trigonométrica ou polar procedemos da seguinte maneira.

$|z| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ *e* $\theta = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, *então*

$z = |z|\,(\cos\theta + isen\theta) \Rightarrow z = 2[\cos(\frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3})]$.

(c) $z=\sqrt{3}+i$

Para determinar a forma trigonométrica ou polar procedemos da seguinte maneira.
$|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$ *e* $\theta=\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$, *então*
$z=|z|(\cos\theta+isen\theta)\Rightarrow z=2[\cos(\frac{\pi}{6})+isen(\frac{\pi}{6})]$.

1.1.6 Fórmula de Moivre

A seguir vamos estabelecer a Fórmula de Moivre a qual tem importância quando se deseja calcular raiz n-ésima de um número complexo, a serem calculadas posteriormente.

Teorema 1.1 *Dado um número complexo* $z=|z|(\cos\theta+isen\theta)$, *não nulo, e* $n\in\mathbb{N}$, *então*

$$z^n=|z|^n[\cos(n\theta)+isen(n\theta)]. \tag{1-1}$$

Prova.

Provaremos o resultado usando o princípio da indução.

(a) Para $n=0$, temos

(i) $z^0=1$,

(ii) $|z|^0[\cos(0\cdot\theta)+isen(0\cdot\theta)]=1(1+0i)=1$.

De (i) e (ii), temos que a expressão 1-1 é válida para $n=0$.

(b) Admitamos que a expressão 1-1 seja válida para $n=k$, ou seja,
$z^k=|z|^k[\cos(k\theta)+isen(k\theta)]$.

(c) Provaremos que a expressão 1-1 é válida para $n=k+1$, assim,
$z^{k+1}=z^kz=[|z|^k[\cos(k\theta)+isen(k\theta)][|z|(\cos\theta+isen\theta)]$
$z^{k+1}=(|z|^k|z|)[\cos(k\theta+\theta)+isen(k\theta+\theta)]$
$z^{k+1}=|z|^{k+1}[\cos(k+1)\theta+isen(k+1)\theta]$.

□

Exemplo 1.3 *Dado* $z=2[\cos(\frac{\pi}{6})+isen(\frac{\pi}{6})]$, *determine o valor de* z^3.
Usando a expressão 1-1 e substituindo $n=3$, *temos*

$$z^3=2^3[\cos(\tfrac{3\pi}{6})+isen(\tfrac{3\pi}{6})],\ \textit{então obtemos}\ z^3=8[\cos(\tfrac{\pi}{2})+isen(\tfrac{\pi}{2})].$$

1.1.7 Raiz n-ésima de um Número Complexo

Definição 1.5 *Dado um número complexo* z, *denotamos sua raiz n-ésima por* $\sqrt[n]{z}$. *O número complexo* ω *é a raiz n-ésima de* z *se* $\omega^n=z$. *Temos:*

$$\sqrt[n]{z} = \omega \Longleftrightarrow \omega^n = z.$$

Teorema 1.2 *Dado um número complexo* $z = |z|(\cos\theta + isen\theta)$ *e um número natural* n*, com* $n \geq 2$*, então existem* n *raízes n-ésimas de* z *e elas são da forma*

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

onde $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

Prova.

Procuramos ω na forma trigonométrica, isto é,

$$\omega = r(\cos\alpha + isen\alpha). \tag{1-2}$$

Da Definição 1.5, temos que

$$\sqrt[n]{z} = \omega \Longleftrightarrow \omega^n = z,$$

isto é, $\omega^n = r^n[\cos(n\alpha) + isen(n\alpha)]$. Portanto

$$r^n[\cos(n\alpha) + isen(n\alpha)] = |z|(\cos\theta + isen\theta).$$

Da expressão acima concluímos que:

(1) $r^n = |z|$. Assim, $r = \sqrt[n]{|z|}$,

(2) $\cos(n\alpha) = \cos\theta$ e $sen(n\alpha) = sen\theta$. Assim, $n\alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$.

Substituindo os resultados encontrado em (1) e (2) na expressão 1-2, obtemos a igualdade

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right].$$

Agora devemos mostrar que existem n raízes n-ésimas de z. Sabemos que $0 \leq \theta < 2\pi$ e determinaremos os valores de k para os quais obtemos valores de α compreendidos entre 0 e 2π. Temos:

$k = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n}$,
$k = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$,
$k = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}$,
$\vdots$
$k = n-1 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n-1} + \frac{2\pi(n-1)}{n}$,
$k = n \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$.

Para $k = n$ encontramos um valor congruente ao valor encontrado para $k = 0$. O mesmo ocorrerá para $k = n+1, n+2, n+3, \ldots$. Assim, existem n valores de k diferentes que determinam n valores diferentes para α. Portanto, esses n valores de α dão origem a n valores distintos para ω.

$\square$

Exemplo 1.4 *Determine as raízes cúbicas de $z = 8$.*
Temos que determinar o valor de $\omega = \sqrt[3]{z}$, ou seja, $\omega = \sqrt[3]{8}$. Então
$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$, *com $k = 0, 1$ e 2.*
Como $b = 0$ e $a > 0$, então $\theta = 0$.
O módulo de z é: $|z| = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8$. As raízes são dadas por:
$\omega_0 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{0}{3} + \frac{2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{0}{3} + \frac{2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right)\right]$, *então* $\omega_0 = 2[\cos 0 + isen 0]$.
Portanto: $\omega_0 = 2(1 + i\cdot 0) = 2$,
$\omega_1 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{0}{3} + \frac{2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{0}{3} + \frac{2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right)\right]$, *então* $\omega_1 = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.
Portanto: $\omega_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$,
$\omega_2 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{0}{3} + \frac{2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{0}{3} + \frac{2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right)\right]$, *então* $\omega_2 = 2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$.
Portanto: $\omega_2 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$.
As raízes cúbicas de $z = 8$ são:

$$\omega_0 = 2,\ \ \omega_1 = -1 + i\sqrt{3}\ \ e\ \ \omega_2 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Interpretação geométrica. Observamos, do exemplo acima, que as três raízes tem o mesmo módulo $\sqrt[n]{|z|} = 2$, portanto, são pontos de uma circunferência de raio 2 e centro na origem. Da expressão $\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ conclui-se que as raízes são três pontos distintos, sobre a circunferência, separados por um arco de medida $\frac{2\pi}{3}$.

Assim, as raízes cúbicas de $z = 8$ são vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 2 e centro na origem.

Analisando a expressão das raízes n-ésimas de z, dadas por

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

concluímos que ω_k são vértices de um polígono regular inscrito na circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{|z|}$. Ver Figura 1.4.

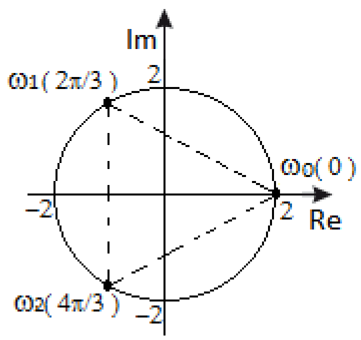

Figura 1.4: *Representação geométrica das raízes cúbicas de $z = 8$.*

1.1.8 Raiz n-ésima da Unidade

Da expressão

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+isen\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

com $z = 1$, temos

$$\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+isen\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \qquad (1\text{-}3)$$

onde $k \in \mathbb{N}$. Os ω_k na expressão 1-3 são chamados de raízes n-ésimas da unidade.

Exemplo 1.5 *Determine as raízes cúbicas da unidade.*
Temos a expressão $\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+isen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, *com* $k = 0,1$ *e* 2.
As raízes são dadas por:
$\omega_0 = \cos\left(\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right)$, *ou seja,* $\omega_0 = \cos 0 + isen 0$.
Portanto: $\omega_0 = (1+i\cdot 0) = 1$,
$\omega_1 = \cos\left(\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right)$, *ou seja,* $\omega_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
Portanto: $\omega_1 = -\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\omega_2 = \cos\left(\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right)$, *ou seja,* $\omega_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.
Portanto: $\omega_2 = -\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.
As raízes cúbicas de $z = 1$ *são:*

$$\omega_0 = 1,\ \ \omega_1 = -\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad \omega_2 = -\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

O leitor pode testar como exercício que $(\omega_0)^3 = (\omega_1)^3 = (\omega_2)^3 = 1$.

Observação

Dado um número complexo z, se ω é uma raiz cúbica de z, então as raízes cúbicas de z, podem ser obtidas multiplicando ω pelas raízes cúbicas da unidade, ou seja, $\omega_0 = 1\cdot\omega$, $\omega_1 = (-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot\omega$ e $\omega_2 = (-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot\omega$.

1.2 Polinômios

Nas seções seguintes faremos um estudo não muito aprofundado sobre polinômios e equações polinomiais. Para maiores informações indicamos as referências [4], [6], [7], [11] e [12].

1.2.1 Definição de Polinômio

Definição 1.6 *Definimos polinômio na variável x a função dada por*

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

com $a_n \neq 0$, onde os coeficientes $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, a_0 é denominado termo independente e $n \in \mathbb{N}$. O grau do polinômio $P(x)$ é dado pelo maior expoente da variável x.

Observações

(1) Se $n = 0$, então $P(x) = a_0$,
(2) Se $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$, então $P(x) = 0$ é denominado polinômio nulo.

Definição 1.7 *Valor numérico de um polinômio é obtido pela substituição da varável x por um número $\alpha \in \mathbb{C}$ e fazendo as operações devidas, ou seja, se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ é um polinômio, então $P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$ é o valor numérico do polinômio $P(x)$ para $x = \alpha$.*

Exemplo 1.6 *Dado o polinômio $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 6x + 10$ determine seu valor numérico para $x = -1$.*
O valor numérico é obtido substituindo a variável x por -1 no polinômio e realizando as operações devidas, assim,
$P(-1) = 3(-1)^4 - 5(-1)^3 + 2(-1)^2 - 6(-1) + 10 = 3 + 5 + 2 + 6 + 10 = 26.$
Portanto, $P(-1) = 26$.

Definição 1.8 *Dado um polinômio $P(x)$, dizemos que o número complexo α_0 é raiz do polinômio, se e somente se, $P(\alpha_0) = 0$, ou seja,*

$$P(\alpha_0) = a_n\alpha_0^n + a_{n-1}\alpha_0^{n-1} + \cdots + a_2\alpha_0^2 + a_1\alpha_o + a_0 = 0.$$

Exemplo 1.7 *O número 2 é raiz do polinômio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, pois $P(2) = 0$.*
Substituindo $x = 2$ em $P(x)$, temos
$P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 3(2) - 2$. *Logo* $P(2) = 16 - 20 + 6 - 2 = 0$.
Portanto, $P(2) = 0$.

Definição 1.9 - *Dados os polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, dizemos que são polinômios iguais quando assumem o mesmo valor numérico para $\forall \alpha \in \mathbb{C}$. Indicamos por*

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow P(\alpha) = Q(\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Definição 1.10 *Dado um polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, definimos o polinômio derivada por $P'(x)$, definido por*

$$P'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1 + 0.$$

Para determinar a derivada segunda do polinômio $P(x)$ devemos realizar o mesmo processo sobre o polinômio $P'(x)$, e assim, sucessivamente.

Exemplo 1.8 *Determine o polinômio derivada dos seguintes polinômios abaixo.*

(a) $P(x) = x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 7x - 10$
Usando a Definição 1.10, obtemos
$P'(x) = 4x^{4-1} + 3\cdot 8x^{3-1} - 2\cdot 9x^{2-1} + 1\cdot 7x^{1-1} - 0 = 4x^3 + 24x^2 - 18x + 7.$

(b) $Q(x) = -3x^5 + 3x^3 + 9x$
Usando a Definição 1.10, obtemos
$Q'(x) = -5\cdot 3x^{5-1} + 3\cdot 3x^{3-1} + 1\cdot 9x^{1-1} = -15x^4 + 9x^2 + 9.$

(c) $R(x) = 2x^3 + 8x^2 - 5x - 8$
Usando a Definição 1.10, obtemos
$R'(x) = 3\cdot 2x^{3-1} + 2\cdot 8x^{2-1} - 1\cdot 5x^{1-1} - 0 = 6x^2 + 16x - 5.$

Definição 1.11 *Chamamos de equação algébrica ou polinomial toda equação que pode ser escrita na forma $P(x) = 0$, onde $P(x)$ representa um polinômio, dado por*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

com $a_n \neq 0$, onde $x \in \mathbb{C}$ e $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ são os coeficientes da equação algébrica e $n \in \mathbb{N}^*$, cujo maior valor de n determina o grau da equação polinomial.

Definição 1.12 *Raiz de uma equação polinomial é um número α_0, $\alpha_0 \in \mathbb{C}$, tal que $P(\alpha_0) = 0$. Ao conjunto de todas as raízes da equação polinomial damos o nome de conjunto solução da equação.*

Definição 1.13 *Sejam os polinômios na variável x*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$
$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

Denominamos sua soma, $P(x) + Q(x)$, pelo polinômio

$$P(x)+Q(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0).$$

Exemplo 1.9 *Sendo $P(x) = 4x^3 + 5x^2 + 2x + 7$ e $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 8$ sua soma é dada por*
$P(x) + Q(x) = (4+1)x^3 + (5+2)x^2 + (2-5)x + (7-8)$
$P(x) + Q(x) = 5x^3 + 7x^2 - 3x - 1.$

Definição 1.14 *A multiplicação de dois polinômios na variável x é definida da seguinte forma:*

(i) *Primeiro multiplicamos todos os pares de termos, um de cada polinômio, com n igual a 0, 1, 2,$\cdots$,n e m igual a 0, 1, 2,$\cdots$,m*

$$a_nx^n \cdot b_mx^m = a_nb_mx^{n+m}.$$

(ii) Agora somamos os coeficientes das potências de x com mesmo expoente

$$ax^p + bx^p = (a+b)x^p.$$

Exemplo 1.10 *Sendo* $P(x) = 2x+3$ *e* $Q(x) = x^2+2x+1$*, seu produto é dado por:*
$P(x)\cdot Q(x) = (2x+3)(x^2+2x+1)$
$P(x)\cdot Q(x) = (2x)(x^2)+(2x)(2x)+(2x)(1)+(3)(x^2)+(3)(2x)+(3)(1)$
$P(x)\cdot Q(x) = 2x^3+4x^2+2x+3x^2+6x+3$
$P(x)\cdot Q(x) = 2x^3+7x^2+8x+3.$

1.2.2 Propriedades das Operações com Polinômios

Sejam $P(x), Q(x)$ e $R(x)$ três polinômios na variável x, com $x \in \mathbb{C}$, temos:

(1) Os polinômios em relação a adição, possui as seguintes propriedades:

- (A_1) COMUTATIVA: $P(x)+Q(x) = Q(x)+P(x)$,
- (A_2) ASSOCIATIVA: $P(x)+[Q(x)+R(x)] = [P(x)+Q(x)]+R(x)$,
- (A_3) POLINÔMIO NEUTRO: Existe um polinômio $P_e(x)$ denominado polinômio neutro ou nulo, tal que, $P(x)+P_e(x) = P_e(x)+P(x) = P(x)$,
- (A_4) POLINÔMIO INVERSO: Todo polinômio é simetrizável em relação a adição, ou seja, $\forall\ P(x)$, $\exists\ [-P(x)]$: $P(x)+[-P(x)] = [-P(x)]+P(x) = P_e(x)$.

(2) Os polinômios em relação a multiplicação, possui as seguintes propriedades:

- (M_1) COMUTATIVA: $P(x)\cdot Q(x) = Q(x)\cdot P(x)$,
- (M_2) ASSOCIATIVA: $P(x)\cdot[Q(x)\cdot R(x)] = [P(x)\cdot Q(x)]\cdot R(x)$,
- (M_3) POLINÔMIO NEUTRO: Existe um polinômio $P_n(x) = 1$, denominado polinômio neutro da multiplicação, tal que, $\forall\ P(x)$, $P(x)\cdot P_n(x) = P_n(x)\cdot P(x) = P(x)$,
- (M_4) DISTRIBUTIVIDADE: $P(x)\cdot[Q(x)+R(x)] = P(x)\cdot Q(x)+P(x)\cdot R(x)$.

O conjunto dos polinômios com as operações de adição (+) e multiplicação por escalar $\odot$ é um espaço vetorial.

1.2.3 Polinômios Iguais

Teorema 1.3 *Os polinômios*

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad e$$
$$Q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

são iguais se, e somente se, os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais, ou seja,

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ \cdots,\ a_2 = b_2,\ a_1 = b_1,\ a_0 = b_0.$$

A demonstração do teorema encontra-se, por exemplo, em [12], página 74.

Exemplo 1.11 *Dados os polinômios*

$$P(x) = x^3 + (a+2)x^2 - 7x + 9 \quad e \quad Q(x) = x^3 + 8x^2 - 7x + 3b - 5,$$

determine os valores de a e b para que se tenha $P(x) = Q(x)$.

Para que os polinômios sejam iguais devemos ter

$$a + 2 = 8, \text{ portanto } a = 6,$$
$$3b - 5 = 9, \text{ portanto } b = \tfrac{14}{3}.$$

1.2.4 Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema 1.4 *Todo polinômio complexo de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.*

A demonstração do teorema encontra-se, por exemplo, em [1], página 107.

1.2.5 Divisão de Polinômios

Definição 1.15 *Considere dois polinômios $P(x)$ e $Q(x) \neq 0$, com grau de $P(x)$ maior que grau $Q(x)$. Fazer a divisão de $P(x)$ por $Q(x)$ é determinar dois polinômios $q(x)$ e $r(x)$, tal que satisfaçam as seguintes condições:*

(I) $P(x) = Q(x)q(x) + r(x)$,

(II) grau de $r(x)$ menor que o grau de $Q(x)$.

Caso $r(x) = 0$, dizemos que a divisão é exata e que $P(x)$ é divisível por $Q(x)$.

Teorema 1.5 *Teorema do Resto*

O resto da divisão do polinômio $P(x)$ por $(x - a)$ é igual ao valor numérico de $P(x)$ em a.

Prova.

Pela definição de divisão de polinômios, temos que

$$P(x) = (x-a)q(x) + r(x), \tag{1-4}$$

onde $q(x)$ é o quociente e $r(x)$ é o resto da divisão. Temos que o grau de $(x-a)$ é um, portanto o grau de $r(x)$ é zero ou $r(x)=0$. Assim podemos concluir que $r(x)$ é um polinômio constante. Usando a igualdade 1-4, obtemos
$P(a)=(a-a)q(a)+r(a)$, ou seja, $P(a)=0\cdot q(a)+r(a)$. Então, $P(a)=r(a)=r$.
Portanto $P(a)=r$.

□

Teorema 1.6 *Teorema de D'Alembert.*
O polinômio $P(x)$ é divisível por $(x-a)$ se, e somente se, a é raiz de $P(x)=0$.

Prova.
Pelo teorema do resto, temos que $P(a)=r$, então:
$(\Rightarrow)$ pela hipótese temos que $P(x)$ é divisível por $(x-a)$, então

$$r=0 \Rightarrow P(a)=0 \Rightarrow a \text{ é raiz de } P(x).$$

$(\Leftarrow)$ pela hipótese temos que a é raiz de $P(x)$, então

$$P(a)=0 \Rightarrow r=0 \Rightarrow P(x) \text{ é divisível por } (x-a).$$

□

1.2.6 Teorema da Decomposição

Teorema 1.7 *Todo polinômio $P(x)$ de grau n, com $n\geq 1$, pode ser escrito na forma*

$$P(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n),$$

onde $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{n-1},x_n$ são as raízes de $P(x)=0$.

Prova.
Seja $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$, com $x\in\mathbb{C}$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.), o polinômio $P(x)$ admite pelo menos uma raiz complexa. Então se x_1 for essa raiz $P(x)$ é divisível por $(x-x_1)$, ou seja,

$$P(x)=(x-x_1)Q_1(x). \tag{1-5}$$

Em 1-5 $Q_1(x)$ é um polinômio de grau $n-1$. Se $n-1\geq 1$, então $Q_1(x)$ possui pelo menos uma raiz complexa. Seja x_2 essa raiz, assim $Q_1(x)$ é divisível por $(x-x_2)$, então podemos escrever $Q_1(x)=(x-x_2)Q_2(x)$. Substituindo Q_1 em 1-5, temos que

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)Q_2(x). \tag{1-6}$$

Em 1-6 Q_2 é um polinômio de grau $n-2$. Portanto aplicando o Teorema Fundamental da Álgebra sucessivamente, obtemos

$$P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)Q_n(x).$$

Devemos fazer o processo até encontrar $Q_n(x)$ com grau nulo, ou seja, até obtermos a seguinte igualdade

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)Q_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Da igualdade acima, temos $Q_n(x) = a_n$. Logo,

$$P(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

□

1.2.7 Teorema das Raízes Racionais

Teorema 1.8 *Seja o polinômio*

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

$a_n \neq 0$, *com* $n > 0$ *e coeficientes* $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. *Se* $\frac{p}{q}$, *com* $p, q \in \mathbb{Z}^*$, $mdc(p,q) = 1$, *é uma raiz racional do polinômio com, então* p *é divisor de* a_0 *e* q *é divisor de* a_n.

Prova.

Como $\frac{p}{q}$ é raiz do polinômio, temos $P(\frac{p}{q}) = 0$. Então

$$P(\tfrac{p}{q}) = a_n(\tfrac{p}{q})^n + a_{n-1}(\tfrac{p}{q})^{n-1} + \cdots + a_2(\tfrac{p}{q})^2 + a_1(\tfrac{p}{q}) + a_0 = 0.$$

Multiplicando por q^n, obtemos

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0.$$

Daí, podemos escrever

$$\begin{aligned} a_np^n &= q(-a_{n-1}p^{n-1} - \cdots - a_2p^2q^{n-3} - a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1}) \\ a_0q^n &= p(-a_np^{n-1} - a_{n-1}p^{n-2}q - \cdots - a_2pq^{n-2} - a_1q^{n-1}). \end{aligned}$$

Portanto, $q \mid a_np^n$ e $p \mid a_0q^n$. Como $mdc(p,q) = 1$, temos que $q \mid a_n$ e $p \mid a_0$.

□

1.2.8 Teorema das Raízes Complexas

Teorema 1.9 *Seja o polinômio*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + ax + a_0,$$

$a_n \neq 0$*, com coeficientes reais. Se o número complexo* $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ *é uma raiz da equação polinomial, então o complexo conjugado* $\bar{z} = a - bi$ $(b \neq 0)$ *também será raiz da equação polinomial.*

Prova.

A equação polinomial é dada por

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + ax + a_0 = 0.$$

Da hipótese, temos que $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ é raiz da equação polinomial acima, isto é, $P(z) = 0$. Assim,

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2z^2 + az + a_0 = 0.$$

Tomando o conjugado em ambos os membros da equação acima, temos

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2z^2 + az + a_0} = \overline{0}.$$

Usando as seguintes propriedades do conjugado: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{kz} = k\bar{z}$, onde k é uma constante e $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$, obtemos as igualdades

$$\begin{gathered}
\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_2z^2} + \overline{az} + \overline{a_0} = \overline{0}, \\
a_n \overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \cdots + a_2\overline{z^2} + a\bar{z} + a_0 = 0, \\
a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + \cdots + a_2(\bar{z})^2 + a\bar{z} + a_0 = 0.
\end{gathered}$$

Portanto, temos $P(\bar{z}) = 0$, ou seja, $\bar{z} = a - bi$ também é raiz da equação polinomial.

□

CAPÍTULO 2

Equações Polinomiais

2.1 Método para Resolver uma Equação Polinomial

Existem métodos numéricos para a resolução de equações polinomiais, um exemplo é o método de Newton. Aqui desenvolveremos os métodos algébricos para equações polinomiais até do 4º grau. Mostraremos aqui esses métodos práticos fazendo um estudo mais aprofundado das equações polinomiais do 3º e 4º graus.

Nas seções seguintes faremos um estudo dos métodos algébricos. Para maiores informações indicamos as referências [4], [9], [10] e [12].

2.1.1 Equação do 1º Grau

Uma função polinomial do 1º grau

$$f(x) = ax + b,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Para determinar a raiz da equação associada, $f(x) = 0$, façamos $ax + b = 0$. Somando $-b$ em ambos os membros da equação obtemos $ax + b - b = -b$, assim $ax = -b$. Agora multiplicamos ambos os membros da equação por $\frac{1}{a}$ obtendo $\frac{1}{a} \cdot ax = -b \cdot \frac{1}{a}$. Portanto $x = -\frac{b}{a}$.
O valor de x está determinado em função dos coeficientes a e b sendo que o resultado encontrado é necessariamente a raiz procurada.

Exemplo 2.1 *Determine a raiz de* $5x - 9 = 0$.

A raiz procurada é obtida fazendo $x = -\frac{b}{a}$. *Substituindo os valores de* $a = 5$ *e* $b = -9$, *obtemos* $x = -\frac{(-9)}{5}$. *Portanto* $x = \frac{9}{5}$.

2.1.2 Equação do 2º Grau

Uma função polinomial do 2º grau

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Para determinar as raízes da equação correspondente procedemos como segue: fazendo $f(x) = 0$, temos $ax^2 + bx + c = 0$, dividindo todos os termos por a e isolando os termos com x encontramos $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$. Agora completando o quadrado do 1º membro obtemos $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$, ou seja, $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{-4ac+b^2}{4a^2}$. Como $\sqrt{a^2} = |a|$ podemos escrever $(x + \frac{b}{2a}) = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$, isolando x encontramos $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, ou seja, $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

O valor de x está determinado em função dos coeficientes a, b e c, sendo que os dois resultados encontrados são necessariamente as duas raízes procuradas. Temos as seguintes possibilidades para as raízes:

(1) Se $\Delta > 0$, então a equação possui duas raízes reais diferentes, dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

(2) Se $\Delta = 0$, então a equação possui duas raízes reais iguais, dadas por

$$x = -\frac{b}{2a},$$

(3) Se $\Delta < 0$, então a equação possui duas raízes complexas conjugadas, dadas por

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}.$$

Observação

Observe as igualdades:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Dada uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, dividindo os termos por a, encontramos um polinômio com coeficiente do maior grau igual a 1 que é chamado de polinômio mônico, dado por $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. A equação do 2º grau $x^2 - Sx + P = 0$ é determinada conhecendo-se a soma e o produto das suas raízes.

Exemplo 2.2 *A partir do valor do discriminante (Δ) fazer a análise das raízes das funções abaixo e determinemos seus respectivos valores:*

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

Temos $a = 1, b = -6$ e $c = 8$. Então

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 \Rightarrow \Delta = 36 - 32 \Rightarrow \Delta = 4.$

Como $\Delta > 0$ a equação possui duas raízes reais diferentes, dadas por x_1 e x_2 onde:

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-(-6)+\sqrt{4}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_1 = \frac{6+2}{2} \Rightarrow x_1 = 4,$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-(-6)-\sqrt{4}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_2 = \frac{6-2}{2} \Rightarrow x_2 = 2.$

(b) $f(x) = -x^2 + 10x - 25$
Temos $a = -1, b = 10$ *e* $c = -25$. *Então*
$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (10)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-25) \Rightarrow \Delta = 100 - 100 \Rightarrow \Delta = 0.$
Como $\Delta = 0$ *a equação possui duas raízes reais iguais, dadas por*
$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{10}{2(-1)} \Rightarrow x = 5.$

(c) $f(x) = x^2 - 4x + 5$
Temos $a = 1, b = -4$ *e* $c = 5$. *Então*
$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 5 \Rightarrow \Delta = 16 - 20 \Rightarrow \Delta = -4.$
Como $\Delta < 0$ *a equação possui duas raízes complexas conjugadas, dadas por* x_1 *e* x_2 *onde:*
$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-(-4)+i\sqrt{-(-4)}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_1 = \frac{4+2i}{2} \Rightarrow x_1 = 2+i,$
$x_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{-(-4)}}{2.1} \Rightarrow x_2 = \frac{4-2i}{2} \Rightarrow x_2 = 2-i.$

2.1.3 Equação do 3º Grau

Uma função polinomial do 3º grau

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Para determinar as raízes da equação polinomial $f(x) = 0$, usamos a Fórmula de Cardano, dada por

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Nas seções seguintes faremos um maior detalhamento da Fórmula de Cardano.

Exemplo 2.3 *Usando a Fórmula de Cardano encontre as raízes de* $f(x) = x^3 - 6x - 9$. *Temos* $p = -6$ *e* $q = -9$. *Então, substituindo p e q na Fórmula de Cardano obtemos*
$x = \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} + \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} - \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}}$ *e portanto*
$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}$, *ou seja,* $x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}.$
Como $\sqrt[3]{8}$ *é igual a* $2, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i$ *e* $\sqrt[3]{1}$ *é igual a* $1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, *assim, temos as seguintes possibilidades para as raízes de* $f(x)$*:*
$x_1 = 2 + 1 = 3,$
$x_2 = 2 + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{3+\sqrt{3}i}{2},$
$x_3 = 2 + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \frac{3-\sqrt{3}i}{2},$
$x_4 = -1 + \sqrt{3}i + 1 = \sqrt{3}i,$
$x_5 = -1 + \sqrt{3}i + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{-3+3\sqrt{3}i}{2},$
$x_6 = -1 + \sqrt{3}i + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \frac{-3+\sqrt{3}i}{2},$

$x_7 = -1 - \sqrt{3}i + 1 = -\sqrt{3}i,$
$x_8 = -1 - \sqrt{3}i + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{-3-\sqrt{3}i}{2},$
$x_9 = -1 - \sqrt{3}i + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \frac{-3-3\sqrt{3}i}{2}.$

Das nove possibilidades, somente três são raízes de $f(x) = 0$. Substituindo em $f(x) = 0$ os nove valores encontrados, observamos que somente x_1, x_6 e x_8 satisfazem a equação. Portanto $x_1 = 3$, $x_6 = \frac{-3+\sqrt{3}i}{2}$ e $x_8 = \frac{-3-\sqrt{3}i}{2}$ são as raízes de $x^3 - 6x - 9 = 0$.

2.2 Fórmula de Cardano

Seja a equação polinomial do 3º grau escrita na sua forma mais geral

$$\tilde{a}x^3 + \tilde{b}x^2 + \tilde{c}x + \tilde{d} = 0, \ (a \neq 0).$$

Inicialmente encontramos uma equação equivalente que tenha o coeficiente de x^3 igual a 1,isto é, tornar o primeiro membro um polinômio mônico. Então basta dividir todos os termos por $\tilde{a}$, obtendo

$$x^3 + \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}x^2 + \frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}x + \frac{\tilde{d}}{\tilde{a}} = 0.$$

Assim, basta trabalhar com as equações do 3º grau na forma

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Fazendo a substituição $x = y - \frac{a}{3}$, para eliminar o termo do 2º grau, obtemos as igualdades

$$\begin{gathered}
\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0 \\
\left(y^3 - 3y^2\frac{a}{3} + 3y\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3\right) + a\left(y^2 - 2y\left(\frac{a}{3}\right) + \left(\frac{a}{3}\right)^2\right) + by - \frac{ab}{3} + c = 0 \\
y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2}{3}y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c = 0 \\
y^3 + \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b\right)y - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c = 0 \\
y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0 \\
y^3 + py + q = 0,
\end{gathered}$$

com $p = b - \frac{a^2}{3}$ e $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$. O resultado encontrado, com esta substituição, se trata de uma equação do 3º grau que não possui o termo do segundo grau. Portanto basta estudar as equações do 3º grau na forma

$$x^3 + px + q = 0. \tag{2-1}$$

Para resolver a equação 2-1 façamos a substituição $x = u + v$, obtemos as expressões $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$, ou seja, $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0$, assim,

$u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q=0$. Portanto $u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0$. Então procuramos números u e v que satisfaçam o sistema

$$\begin{cases} u^3+v^3+q=0 \\ 3uv+p=0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\frac{p^3}{27}. \end{cases}$$

Determinar o valor de u^3 e v^3 do sistema dado é fácil, pois se trata das raízes de uma equação do 2º grau onde conhecemos sua soma e seu produto, assim,

$$z^2-(u^3+v^3)z+(u^3v^3)=0. \text{ Portanto } z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0.$$

Usando a fórmula resolutiva da equação do 2º grau, temos que

$$z=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-4\cdot(1)\cdot\left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2\cdot(1)} \Rightarrow z=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2-4\left(-\frac{p^3}{27}\right)}{4}} \Rightarrow z=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

$$v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

Como $x=u+v$ é uma raiz da equação $x^3+px+q=0$, então x deve ser escrito na forma

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Observemos que para cada raiz cúbica, na Fórmula de Cardano, temos três valores possíveis, e assim teríamos um total de nove valores possíveis para x, mas uma equação cúbica possui exatamente três raízes complexas. Portanto, dos nove possíveis valores de x, somente três satisfazem a equação original. Este fato decorre quando elevamos ao cubo uma das equações do sistema $(3uv+p=0 \Rightarrow u^3v^3=-\frac{p^3}{27})$ o que acaba inserindo mais 6 raízes diferentes para a equação. Outro fato que explica o ocorrido é que como $x=u+v$, sendo $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ e $v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$, temos $3uv+p=0$, ou seja, $uv=-\frac{p}{3}$, assim quando escolhemos um dos três valores de u o valor de v já fica determinado.

Exemplo 2.4 *Usando o desenvolvimento da fórmula de Cardano encontre as raízes da equação* $2x^3+6x^2-6x-28=0$.

Inicialmente vamos tornar mônico o lado esquerdo da equação dividindo por 2 *os seus termos, ou seja, para que o termo de maior grau fique com coeficiente igual a* 1*:*

$$2x^3+6x^2-6x-28=0\ \div(2)$$
$$x^3+3x^2-3x-14=0.$$

Fazendo $x=y-\frac{a}{3}$, *obtemos* $x=y-1$. *Substituindo x para eliminar o termo do 2º grau, assim,*

$$(y-1)^3+3(y-1)^2-3(y-1)-14=0,$$
$$y^3-6y-9=0.$$

Obtemos uma equação do 3º grau, sem o termo do 2º grau, portanto estamos na condição de aplicar a fórmula de Cardano. Fazendo $y=u+v$, *obtemos as igualdades*

$$(u+v)^3-6(u+v)-9=0,$$
$$u^3+3u^2v+3uv^2+v^3-6(u+v)-9=0,$$
$$u^3+v^3-9+(u+v)(3uv-6)=0.$$

Procuramos números u e v que satisfaçam as igualdades $u^3+v^3-9=0$ *e* $3uv-6=0$, *ou seja,* $u^3+v^3=9$ *e* $u^3v^3=8$.
Para determinar os valores de u^3 *e* v^3, *basta resolver a equação do 2º grau conhecendo a soma e o produto das suas raízes*

$$z^2-Sz+P=0, \text{ ou seja, } z^2-(u^3+v^3)z+(u^3v^3)=0,$$

sendo u^3 *e* v^3 *suas raízes.*
Assim, $z^2-9z+8=0$, *usando a fórmula de Bháskara obtemos* $z=\frac{9\pm\sqrt{81-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}$, *ou seja,* $z=\frac{9\pm7}{2}$. *As raízes procuradas são* $u^3=\frac{9+7}{2}=8$, *ou seja,* $u=\sqrt[3]{8}$ *e* $v^3=\frac{9-7}{2}=1$, *ou seja,* $v=\sqrt[3]{1}$.
Portanto, $u=\left\{2,-1+\sqrt{3}i,-1-\sqrt{3}i\right\}$ *e* $v=\left\{1,\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$.
Sabemos que $3uv=-p$ *e que* $p=-6$, *então ao escolher o valor de u o valor de v já ficará determinado. Assim,*
para $u=2$, *temos* $3\cdot2\cdot v=6$, *ou seja,* $v=1$,
para $u=-1+\sqrt{3}i$, *temos* $3\cdot(-1+\sqrt{3}i)\cdot v=6$, *ou seja,* $v=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ *e*
para $u=-1-\sqrt{3}i$, *temos* $3\cdot(-1-\sqrt{3}i)\cdot v=6$, *ou seja,* $v=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.
Como $y=u+v$ *é raiz da equação* $y^3-6y-9=0$, *temos*
$y_1=2+1=3$,
$y_2=-1+\sqrt{3}i+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{-3+\sqrt{3}i}{2}$,
$y_3=-1-\sqrt{3}i+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{-3-\sqrt{3}i}{2}$.
Por fim, para determinar as raízes de $2x^3+6x^2-6x-28=0$, *basta observar que como* $x=y-1$, *então*

$$x_1=3-1=2,\quad x_2=\frac{-3+\sqrt{3}i}{2}-1=\frac{-5+\sqrt{3}i}{2}\quad e\quad x_3=\frac{-3-\sqrt{3}i}{2}-1=\frac{-5-\sqrt{3}i}{2}.$$

Exemplo 2.5 *Usando o desenvolvimento da fórmula de Cardano encontremos as raízes da equação $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$.*

Fazendo $x = y - \frac{a}{3}$, obtemos $x = y + 1$. Substituindo x para eliminar o termo do 2^o grau, obtemos as igualdades

$$(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + (y+1) + 5 = 0,$$
$$y^3 - 2y + 4 = 0.$$

Obtemos uma equação do 3^o grau, sem o termo do 2^o grau, e portanto a fórmula de Cardano pode ser aplicada. Fazendo $y = u + v$, temos as igualdades

$$(u+v)^3 - 2(u+v) + 4 = 0,$$
$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 2(u+v) + 4 = 0,$$
$$u^3 + v^3 + 4 + (u+v)(3uv - 2) = 0.$$

Procuramos números u e v que satisfaçam $u^3 + v^3 + 4 = 0$ e $3uv - 2 = 0$, ou seja, $u^3 + v^3 = -4$ e $u^3v^3 = \frac{8}{27}$.
Para determinar os valores de u^3 e v^3, basta resolver a equação do 2^o grau conhecendo a soma e o produto das suas raízes

$$z^2 - Sz + p = 0, \text{ ou seja, } z^2 - (u^3 + v^3)z + (u^3v^3) = 0,$$

sendo u^3 e v^3 as raízes da equação.
Assim, $z^2 + 4z + \frac{8}{27} = 0$, usando a fórmula de Bháskara obtemos $z = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 1 \cdot \frac{8}{27}}}{2\cdot 1}$, ou seja, $z = \frac{-18 \pm 10\sqrt{3}}{9}$. As raízes procuradas são $u^3 = \frac{-18+10\sqrt{3}}{9}$, ou seja, $u = \sqrt[3]{\frac{-18+10\sqrt{3}}{9}}$ e $v^3 = \frac{-18-10\sqrt{3}}{9}$, ou seja, $v = \sqrt[3]{\frac{-18-10\sqrt{3}}{9}}$.
Devemos encontrar os valores de u e v, para isso, consideremos as igualdades
$\sqrt[3]{\frac{-18+10\sqrt{3}}{9}} = \sqrt[3]{\frac{-18+10\sqrt{3}}{9}.\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{\frac{-54+30\sqrt{3}}{27}} = \frac{\sqrt[3]{-54+30\sqrt{3}}}{3}$ *e* $(\sqrt{3}-3)^3 = -54 + 30\sqrt{3}$,
$\sqrt[3]{\frac{-18-10\sqrt{3}}{9}} = \sqrt[3]{\frac{-18-10\sqrt{3}}{9}.\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{\frac{-54-30\sqrt{3}}{27}} = \frac{\sqrt[3]{-54-30\sqrt{3}}}{3}$ *e* $(-\sqrt{3}-3)^3 = -54 - 30\sqrt{3}$.
Concluímos que
$u = \sqrt[3]{\frac{-18+10\sqrt{3}}{9}} = \frac{\sqrt[3]{-54+30\sqrt{3}}}{3} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-3)^3}}{3} = \frac{\sqrt{3}-3}{3} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$,
$v = \sqrt[3]{\frac{-18-10\sqrt{3}}{9}} = \frac{\sqrt[3]{-54-30\sqrt{3}}}{3} = \frac{\sqrt[3]{(-\sqrt{3}-3)^3}}{3} = \frac{-\sqrt{3}-3}{3} = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Como $u = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ é uma das raízes cúbicas, as outras duas raízes são obtidas multiplicando seu valor pelas raízes cúbicas da unidade, ou seja,
$u = \left\{(-1 + \frac{\sqrt{3}}{3}), (-1 + \frac{\sqrt{3}}{3})(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}), (-1 + \frac{\sqrt{3}}{3})(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})\right\}$.
Como $v = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ é uma das raízes cúbicas, as outras duas raízes são obtidas multiplicando seu valor pelas raízes cúbicas da unidade, ou seja,
$v = \left\{(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}), (-1 - \frac{\sqrt{3}}{3})(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}), (-1 - \frac{\sqrt{3}}{3})(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})\right\}$.
Sabemos que $3uv = -p$ e que $p = -2$, então ao escolher o valor de u o valor de v já

ficará determinado. Assim,
para $u = -1+\frac{\sqrt{3}}{3}$, *temos* $3\cdot(-1+\frac{\sqrt{3}}{3})\cdot v = 2$, *ou seja,* $v = -1-\frac{\sqrt{3}}{3}$,
para $u = (-1+\frac{\sqrt{3}}{3})(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})$, *temos* $3\cdot(-1+\frac{\sqrt{3}}{3})(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})\cdot v = 2$, *ou seja,*
$v = (-1-\frac{\sqrt{3}}{3})(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})$ *e*
para $u = (-1+\frac{\sqrt{3}}{3})(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})$, *temos* $3\cdot(-1+\frac{\sqrt{3}}{3})(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})\cdot v = 2$, *ou seja,*
$v = (-1-\frac{\sqrt{3}}{3})(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})$.
Como $y = u+v$ *é raiz da equação* $y^3-2y+4=0$, *temos*
$y_1 = (-1+\frac{\sqrt{3}}{3})+(-1-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -2$,
$y_2 = (-1+\frac{\sqrt{3}}{3})(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})+(-1-\frac{\sqrt{3}}{3})(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}) = 1+i$,
$y_3 = (-1+\frac{\sqrt{3}}{3})(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})+(-1-\frac{\sqrt{3}}{3})(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}) = 1-i$.
Por fim, para determinar as raízes de $x^3-3x^2+x+5=0$, *basta observarmos que* $x = y+1$, *então*

$$x_1 = -2+1 = -1, \quad x_2 = 1+i+1 = 2+i \quad e \quad x_3 = 1-i+1 = 2-i.$$

2.3 Relação entre os Coeficientes e as Raízes da Equação do 3º Grau

Seja a equação do 3º grau escrita na sua forma mais geral

$$ax^3+bx^2+cx+d = 0, (a \neq 0). \tag{2-2}$$

Dividindo todos os termos por a $(a \neq 0)$ e usando o Teorema da Decomposição, obtemos a igualdade

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a} = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Agora aplicamos a distributividade no 2º membro desta igualdade, obtendo a expressão

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a} = x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3.$$

Estabelecendo a identidade de polinômios, obtemos as relações

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 &= \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

Estas relações são conhecidas como as relações de Girard para a equação do 3º grau.

Exemplo 2.6 *Encontrar as relações de Girard para a equação* $2x^3+5x^2-3x+1=0$.
Temos $a = 2, b = 5, c = -3, d = 1$. *Então*

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \Rightarrow x_1+x_2+x_3=-\frac{5}{2},$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a} \Rightarrow x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{-3}{2},$$
$$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a} \Rightarrow x_1x_2x_3=-\frac{1}{2}.$$

2.4 Análise das Raízes da Equação do 3º Grau a partir da Fórmula de Cardano

Sabemos que a equação do 3º grau possui apenas 3 raízes incluindo suas multiplicidades, então dividiremos o estudo em dois casos.

(1) As três raízes são reais e distintas

Sejam α, β, γ as três raízes, com $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0$.

Escrevendo a equação na sua forma fatorada, obtemos a equação

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0.$$

E assim,

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma=0. \tag{2-3}$$

A fórmula de Cardano se aplica em equações do 3º grau na forma

$$x^3+px+q=0.$$

Portanto para que 2-3 não tenha o termo do 2º grau devemos ter

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \gamma=-(\alpha+\beta).$$

Substituindo γ em 2-3, temos que

$$x^3-(\alpha+\beta-(\alpha+\beta))x^2+(\alpha\beta+\alpha(-(\alpha+\beta))+\beta(-(\alpha+\beta)))x-\alpha\beta(-(\alpha+\beta))=0$$
$$x^3+(\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2)x+\alpha\beta(\alpha+\beta)=0.$$

Obtemos os valores de p e q dados por

$$p=\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2 \text{ e } q=\alpha\beta(\alpha+\beta).$$

Substituindo os valores de p e q na Fórmula de Cardano, obtemos a expressão

$$x=\sqrt[3]{-\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{2}+\sqrt{\frac{(\alpha\beta(\alpha+\beta))^2}{4}+\frac{(\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2)^3}{27}}}+$$
$$\sqrt[3]{-\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{2}-\sqrt{\frac{(\alpha\beta(\alpha+\beta))^2}{4}+\frac{(\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2)^3}{27}}}.$$

Vamos fazer a análise do discriminante da equação.

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \Rightarrow \Delta = \frac{(\alpha\beta(\alpha+\beta))^2}{4} + \frac{(\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2)^3}{27} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta = \frac{-4\alpha^6 - 12\alpha^5\beta + 3\alpha^4\beta^2 + 26\alpha^3\beta^3 + 3\alpha^2\beta^4 - 12\alpha\beta^5 - 4\beta^6}{108} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta = -\frac{(\alpha-\beta)^2(2\alpha+\beta)^2(\alpha+2\beta)^2}{108}.$$

Observemos que, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, com $\alpha \neq \beta$, temos $\Delta < 0$.

(2) Uma raiz é real e duas raízes são complexas

Suponhamos que $z = \alpha + \beta i$ seja uma raiz da equação do 3º grau. Então pelo Teorema das raízes complexas, temos que $\bar{z} = \alpha - \beta i$ também será raiz da equação e a outra raiz necessariamente será real (γ).

Como $z, \bar{z}$ e γ são raízes da equação polinomial podemos escrever sua forma fatorada, dada por

$$(x-z)(x-\bar{z})(x-\gamma) = 0.$$

Aplicando a distributividade, obtemos a equação

$$x^3 - (z+\bar{z}+\gamma)x^2 + (z\bar{z}+z\gamma+\bar{z}\gamma)x - z\bar{z}\gamma = 0. \tag{2-4}$$

A fórmula de Cardano é válida para equações do 3º grau na forma

$$x^3 + px + q = 0.$$

Portanto, para que 2-4 não tenha o termo do 2º grau devemos ter

$$z+\bar{z}+\gamma = 0 \Rightarrow (\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)+\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -2\alpha.$$

Substituindo γ em 2-4, temos

$$x^3 - (z+\bar{z}-2\alpha)x^2 + (z\bar{z}+z(-2\alpha)+\bar{z}(-2\alpha))x - z\bar{z}(-2\alpha) = 0$$
$$x^3 + (\beta^2 - 3\alpha^2)x + 2\alpha(\alpha^2+\beta^2) = 0.$$

Obtemos os valores de p e q, dados por

$$p = \beta^2 - 3\alpha^2 \quad \text{e} \quad q = 2\alpha(\alpha^2+\beta^2).$$

Substituindo os valores de p e q na Fórmula de Cardano, temos

$$x = \sqrt[3]{-\frac{2\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{2} + \sqrt{\frac{(2\alpha(\alpha^2+\beta^2))^2}{4} + \frac{(\beta^2-3\alpha^2)^3}{27}}} +$$
$$\sqrt[3]{-\frac{2\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{2} - \sqrt{\frac{(2\alpha(\alpha^2+\beta^2))^2}{4} + \frac{(\beta^2-3\alpha^2)^3}{27}}}.$$

Vamos fazer a análise do discriminante da equação.

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \Rightarrow \Delta = \frac{(2\alpha(\alpha^2+\beta^2))^2}{4} + \frac{(\beta^2-3\alpha^2)^3}{27} \Rightarrow \Delta = \frac{81\alpha^4\beta^2+18\alpha^2\beta^4+\beta^6}{27}.$$

Observemos que, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\beta \neq 0$, temos $\Delta > 0$.
Caso tenhamos $\beta = 0$, consequentemente $\Delta = 0$, então as três raízes são reais, sendo que teríamos duas ou as três raízes coincidentes.

Podemos observar que as recíprocas também são verdadeiras. Para isso, suponhamos que $\Delta < 0$ não implicasse em três raízes reais distintas, então teríamos uma raiz complexa $\alpha + \beta i$ e consequentemente $\alpha - \beta i$ também seria raiz, assim estaríamos no 2º caso que implica em $\Delta > 0$, que é uma contradição. Portanto podemos concluir que $\Delta < 0$ implica em três raízes reais distintas. De maneira análoga, podemos provar que $\Delta > 0$ implicará em uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.
Resumindo, podemos concluir que:

(I) $\Delta < 0$ se, e somente se, as três raízes são reais e distintas,
(II) $\Delta > 0$ se, e somente se, uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas,
(III) $\Delta = 0$ se, e somente se, as raízes são reais sendo duas ou as três iguais.

Exemplo 2.7 *Façamos a análise das raízes das equações polinomiais do 3º grau.*

(a) $x^3 + 3x + 2 = 0$

Temos $p = 3$ *e* $q = 2$. *Para fazer a análise das raízes devemos calcular o valor do discriminante da equação. Assim,*

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \Rightarrow \Delta = \frac{2^2}{4} + \frac{3^3}{27} \Rightarrow \Delta = 2.$$

Como $\Delta > 0$, *a equação possui uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas. Observe no esboço do gráfico da função dada.*

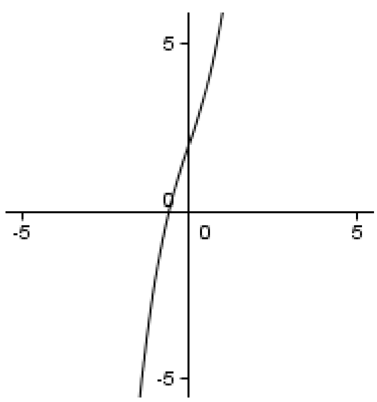

Figura 2.1: *Gráfico de* $f(x) = x^3 + 3x + 2$, *feito no GeoGebra.*

(b) $x^3 - 6x + 4 = 0$

Temos $p = -6$ *e* $q = 4$. *Para fazer a análise das raízes devemos calcular o valor do discriminante da equação. Assim,*

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \Rightarrow \Delta = \frac{4^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27} \Rightarrow \Delta = -7.$$

Como $\Delta < 0$, *a equação possui três raízes reais distintas.*
Observe no esboço do gráfico da função dada.

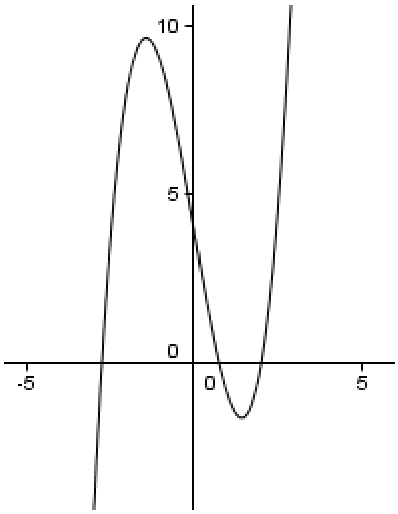

Figura 2.2: *Gráfico de* $f(x) = x^3 - 6x + 4$, *feito no GeoGebra.*

(c) $x^3 - 3x - 2 = 0$

Temos $p = -3$ *e* $q = -2$. *Para fazer a análise das raízes devemos calcular o valor do discriminante da equação. Assim,*

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \Rightarrow \Delta = \frac{(-2)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27} \Rightarrow \Delta = 0.$$

Como $\Delta = 0$, *a equação possui as três raízes reais sendo duas ou as três iguais. Observe no esboço do gráfico da função dada.*

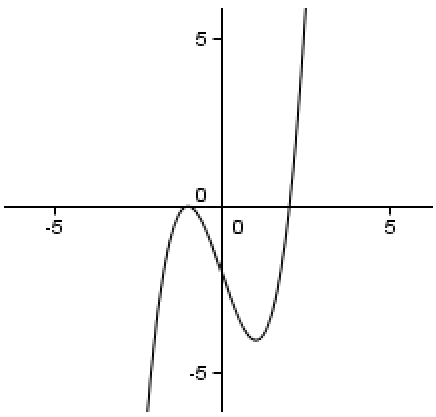

Figura 2.3: *Gráfico de* $f(x) = x^3 - 3x - 2$, *feito no GeoGebra.*

2.5 Estudo do Gráfico da Função do 3º Grau

Vamos estudar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3 + px + q$, com p e q números reais e constantes. Inicialmente podemos escrever a função na forma

$$f(x) = x^3\left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right).$$

Observe que para valores de x com módulo muito grande as frações $\frac{p}{x^2}$ e $\frac{q}{x^3}$ assumem valores extremamente pequenos tendendo a zero, então o sinal de $(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3})$ será positivo. Portanto a função terá o mesmo sinal de x^3, ou seja, de x. Assim, a função $f(x)$ será positiva para valores positivos muito grande de x e será negativa para valores muito grande negativos de x. Como $f(x)$ passa de valores negativos para valores positivos, então em algum momento teremos $f(x) = 0$, ou seja, a função $f(x) = x^3 + px + q$ possui pelo menos uma raiz real.

Aqui temos uma noção intuitiva de limite e continuidade, para maiores detalhes sobre o assunto indicamos [8] como referência.

Vamos determinar a derivada de $f(x)$, representada por $f'(x)$. Temos

$$f'(x) = 3x^2 + p.$$

Quando $p > 0$ a derivada de $f(x)$ assume sempre valores positivos para qualquer valor de x. Então $f(x)$ é sempre crescente garantindo que $f(x)$ corta o eixo das abscissas apenas uma vez. Portanto $f(x)$ possui apenas uma raiz real, podendo ser negativa, nula ou positiva, e duas raízes complexas conjugadas.

Observe que como $p > 0$ as raízes serão

(1) uma raiz real positiva e duas raízes complexas, quando $q < 0$.

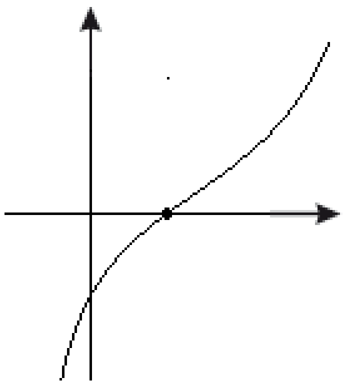

Figura 2.4: *Uma raiz real positiva e duas raízes complexas.*

(2) uma raiz real negativa e duas raízes complexas, quando $q > 0$.

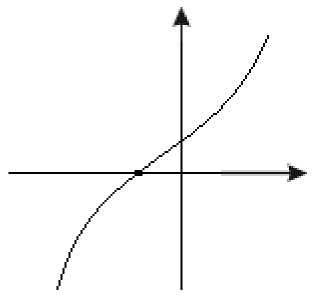

Figura 2.5: *Uma raiz real negativa e duas raízes complexas.*

(3) uma raiz real nula e duas raízes complexas, quando $q = 0$.

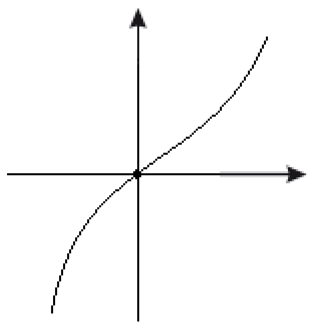

Figura 2.6: *Uma raiz real nula e duas raízes complexas.*

Quando $p = 0$ a função $f(x) = x^3 + px + q$ se reduz a $f(x) = x^3 + q$ e sua derivada $f'(x) = 3x^2$ assume somente valores positivos para qualquer valor de x. Portanto $f(x)$ é sempre crescente e consequentemente suas raízes serão:

(1) uma raiz real, positiva ou negativa, e duas raízes complexas conjugadas. Quando $q \neq 0$ a raiz será positiva se $q < 0$ e negativa se $q > 0$.

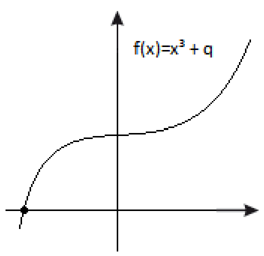

Figura 2.7: *Uma raiz real, positiva ou negativa, e duas raízes complexas conjugadas.*

(2) uma raiz real tripla igual a zero, quando $q = 0$.

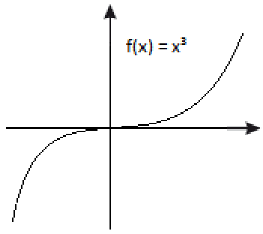

Figura 2.8: *Uma raiz real tripla igual a zero.*

Quando $p < 0$, fazendo $p = -3a^2$, $a > 0$, a função, sua derivada primeira e sua derivada segunda são dadas, respectivamente, por

$$f(x) = x^3 - 3a^2x + q, \quad f'(x) = 3x^2 - 3a^2 \quad \text{e} \quad f"(x) = 6x.$$

Notemos que,
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm a$.
$f"(x) = 6x \Rightarrow f"(-a) = -6a$, como $f"(x) < 0$ em $x = -a$, então $-a$ é um ponto de máximo local.
$f"(x) = 6x \Rightarrow f"(a) = 6a$, como $f"(x) > 0$ em $x = a$, então a é um ponto de mínimo local.
Observe as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} f(a)\cdot f(-a) &= (a^3 - 3a^2a + q)(-a^3 + 3a^2a + q), \\ f(a)\cdot f(-a) &= (a^3 - 3a^3 + q)(-a^3 + 3a^3 + q), \\ f(a)\cdot f(-a) &= (q - 2a^3)(q + 2a^3) = q^2 - 4a^6. \end{aligned}$$

Devemos lembrar que

$$p = -3a^2 \quad \text{e} \quad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Substituindo o valor de a em $f(a)f(-a) = q^2 - 4a^6$, temos que

$$f(a)f(-a) = q^2 - 4\left(-\frac{p}{3}\right)^3 = q^2 + \frac{4p^3}{27} = 4\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = 4\Delta.$$

Portanto, o sinal do discriminante (Δ) será o mesmo de $f(a)f(-a)$.
O gráfico de $f(x) = x^3 + px + q$, com $p < 0$, apresenta uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas, uma raiz real simples e uma raiz real dupla, ou as três raízes reais distintas. Portanto, podemos concluir que as raízes de $x^3 + px + q = 0$ para $p < 0$, tem a forma:

(1) uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas, quando $\Delta > 0$.

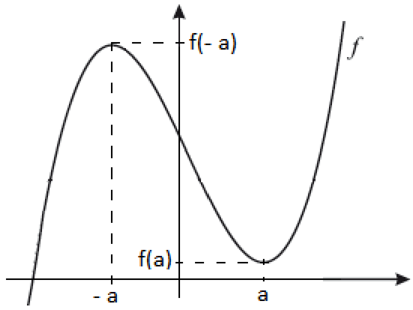

Figura 2.9: *Uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.*

(2) uma raiz real simples e uma raiz real dupla, ou seja, duas raízes reais distintas, quando $\Delta = 0$.

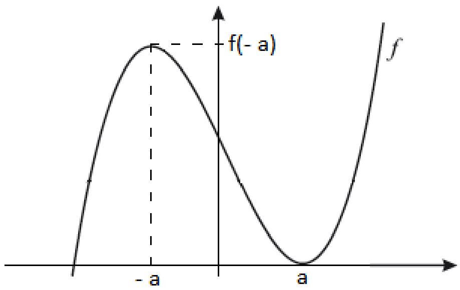

Figura 2.10: *Uma raiz real simples e uma raiz real dupla.*

(3) as três raízes reais distintas, quando $\Delta < 0$.

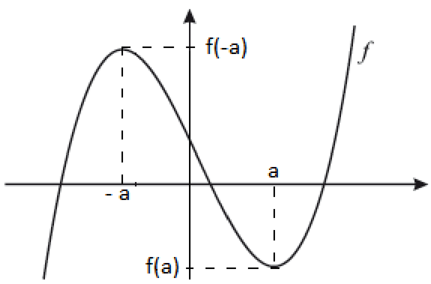

Figura 2.11: *Três raízes reais distintas.*

Para os leitores interessados em mais detalhes sobre construções de gráficos indicamos [8] como referência.

2.6 Método para Resolução de uma Equação do 4º Grau ou Método de Ferrari

Seja a equação do 4º grau escrita na sua forma mais geral

$$\tilde{a}x^4+\tilde{b}x^3+\tilde{c}x^2+\tilde{d}x+\tilde{e}=0.$$

Inicialmente vamos encontrar uma equação equivalente que tenha o coeficiente de x^4 igual a 1, isto é, tornar o primeiro membro um polinômio mônico. Para isto basta dividir todos os termos da equação por $\tilde{a}$, obtendo a expressão

$$x^4+\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}x^3+\frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}x^2+\frac{\tilde{d}}{\tilde{a}}x+\frac{\tilde{e}}{\tilde{a}}=0.$$

Então basta trabalhar com as equações do 4º grau na forma

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

Fazendo a substituição $x=y-\frac{a}{4}$, para eliminar o termo do 3º grau, teremos as igualdades

$$\left(y-\frac{a}{4}\right)^4+a\left(y-\frac{a}{4}\right)^3+b\left(y-\frac{a}{4}\right)^2+c\left(y-\frac{a}{4}\right)+d=0,$$
$$\left[y^2-\frac{2ay}{4}+\left(\frac{a}{4}\right)^2\right]^2+a\left(y-\frac{a}{4}\right)\left[y^2-\frac{2ay}{4}+\left(\frac{a}{4}\right)^2\right]+b\left[y^2-\frac{2ay}{4}+\left(\frac{a}{4}\right)^2\right]+$$
$$c\left(y-\frac{a}{4}\right)+d=0,$$
$$y^4-\frac{ay^3}{2}+\frac{a^2y^2}{16}-\frac{ay^3}{2}+\frac{a^2y^2}{4}-\frac{a^3y}{32}+\frac{a^2y^2}{16}-\frac{a^3y}{32}+\frac{a^4}{256}+ay^3-\frac{a^2y^2}{2}+\frac{a^3y}{16}-\frac{a^2y^2}{4}+$$
$$\frac{a^3y}{8}-\frac{a^4}{64}+by^2-\frac{aby}{2}+\frac{a^2b}{16}+cy-\frac{ac}{4}+d=0, \text{ e assim,}$$
$$y^4+\left(-\frac{3a^2}{8}+b\right)y^2+\left(\frac{a^3}{8}-\frac{ab}{2}+c\right)y+\left(-\frac{3a^4}{256}+\frac{a^2b}{16}-\frac{ac}{4}+d\right)=0.$$

O resultado encontrado, com esta substituição, é uma equação do 4º grau que não possui o termo do terceiro grau. Portanto basta estudar as equações do 4º grau na forma

$$y^4+py^2+qy+r=0,$$

com $p=-\frac{3a^2}{8}+b$, $q=\frac{a^3}{8}-\frac{ab}{2}+c$ e $r=-\frac{3a^4}{256}+\frac{a^2b}{16}-\frac{ac}{4}+d$. Agora desenvolvemos da seguinte maneira.

$$y^4+py^2+qy+r=0\Rightarrow y^4+py^2=-qy-r=0.$$

Completando o quadrado do 1º membro, temos que

$$y^4+py^2+py^2+p^2=-qy-r+py^2+p^2\Rightarrow(y^2+p)^2=-qy-r+py^2+p^2.$$

Agora vamos somar z na equação acima da seguinte maneira.

$$(y^2+p+z)^2 = -qy - r + py^2 + p^2 + (z^2+2zy^2+2zp),$$
$$(y^2+p+z)^2 = (2z+p)y^2 - qy + (z^2+p^2+2pz-r).$$

Percebemos que o 2º membro é uma equação quadrática, assim podemos determinar o valor de z para que se tenha um quadrado perfeito. Para isso seu discriminante deve ser igual a zero o que nos possibilitará escrever o 2º membro da equação na forma $(y+k)^2$. Assim,

$$\Delta = (-q)^2 - 4(2z+p)(2zp+z^2+p^2-r),$$
$$\Delta = -8z^3 - 20pz^2 + (8r-16p^2)z - 4p^3 + 4pr + q^2 = 0.$$

Fazendo $\Delta = 0$, obtemos uma equação do 3º grau. Portanto usando a fórmula de Cardano determinamos o valor de z, tal que,

$$(2z+p)y^2 - qy + (z^2+p^2+2pz-r) = (y+k)^2.$$

Desta forma, teremos $(y^2+p+z)^2 = (2z+p)y^2 - qy + (z^2+p^2+2pz-r)$, ou seja, $(y^2+p+z)^2 = (y+k)^2$. Então podemos escrever $\left|y^2+p+z\right| = |y+k|$.
Assim, $y^2+k_1-y-k=0$, com $k_1 = p+z$, então $y^2-y+k'=0$, com $k' = k_1-k$.
Portanto as raízes de $y^2-y+k'=0$ coincidem com as raízes de $y^4+py^2+qy+r=0$. Com esse método podemos obter duas raízes de qualquer equação polinomial do 4º grau.

2.6.1 Outra Maneira para Encontrar as Soluções das Equações do 4º Grau

Para maiores detalhes ver em [10].
Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes de uma equação do 3º grau na forma

$$x^3 - Sx^2 + S_dx - P = 0. \tag{2-5}$$

Sabemos, das relações de Girard, que

$$S = x_1+x_2+x_3,\ S_d = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 \text{ e } P = x_1x_2x_3.$$

Seja $y = \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}$. Então

$$y^2 = (\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})^2 \quad \text{ou}$$
$$y^2 = x_1+x_2+x_3+2(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_2x_3}) = S+2(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_2x_3}) \quad \text{ou}$$
$$\left(\frac{y^2-S}{2}\right)^2 = (\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_2x_3})^2, \text{ e portanto}$$
$$\left(\frac{y^2-S}{2}\right)^2 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+2\sqrt{x_1x_2x_3}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}) = S_d+2\sqrt{P}y. \text{ Assim,}$$
$$y^4-2Sy^2+S^2 = 4S_d+8\sqrt{P}y \quad \text{ou}$$
$$y^4-2Sy^2-8\sqrt{P}y+S^2-4S_d = 0.$$

A equação acima é uma equação do 4º grau, sem o termo do 3º grau. Sabemos que a equação $z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$ pode ser escrita na forma $y^4+\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$, basta fazer $z=y-\frac{a}{4}$. Então teremos S, S_d e P, tais que

$$-2S=\alpha \Rightarrow S=-\frac{\alpha}{2},$$
$$-8\sqrt{P}=\beta \Rightarrow P=\left(\frac{\beta}{8}\right)^2,$$
$$S^2-4S_b=\gamma \Rightarrow S_d=\frac{S^2-\gamma}{4} \Rightarrow S_d=\frac{\alpha^2-4\gamma}{16}.$$

Basta agora substituir os valores de S, S_d e P na equação 2-5, para encontrar a equação

$$x^3+\left(\frac{\alpha}{2}\right)x^2+\left(\frac{\alpha^2-4\gamma}{16}\right)x-\left(\frac{\beta}{8}\right)^2=0.$$

Resolvendo a equação acima, pela fórmula de Cardano, obtemos as raízes x_1, x_2 e x_3, tais que,

$$y=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3},$$

que satisfaz a equação $y^4+\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$. Quando diminuímos $\frac{a}{4}$ das raízes encontradas ficam determinadas as raízes da equação $z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$.
Observe que para cada raiz quadrada de $y=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}$ temos dois valores complexos possíveis resultando em oito raízes complexas possíveis, o que contraria o fato que as equação do 4º grau possuírem exatamente quatro raízes complexas. Observemos que $\sqrt{P}=-\frac{\beta}{8}$, então $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3}=-\frac{\beta}{8}$, ou seja, $\sqrt{x_3}$ está em função de $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$, portanto para cada valor de $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ há um único valor para $\sqrt{x_3}$. Assim, ficam determinadas exatamente as quatro raízes da equação original.

Exemplo 2.8 *Seja a equação $w^4+4w^3+12w^2+(16+24\sqrt{5})w+28+24\sqrt{5}=0$. Encontrar suas raízes usando o método de resolução das equações polinomiais do 4º grau.*

Para eliminar o termo do 3º grau devemos fazer a substituição $w=y-\frac{a}{4}$, como $a=4$, obtendo $w=y-1$. Assim,

$$(y-1)^4+4(y-1)^3+12(y-1)^2+(16+24\sqrt{5})(y-1)+28+24\sqrt{5}=0 \quad ou$$
$$y^4+6y^2+24\sqrt{5}y+21=0,$$

obtendo uma equação do 4º grau sem o termo do 3º grau, com $\alpha=6$, $\beta=24\sqrt{5}$ e $\gamma=21$. Assim podemos obter uma equação do 3º grau da forma:

$$x^3+\tfrac{\alpha}{2}x^2+(\tfrac{\alpha^2-4\gamma}{16})x-(\tfrac{\beta}{8})^2=0 \Rightarrow x^3+\tfrac{6}{2}x^2+(\tfrac{6^2-4\cdot 21}{16})x-(\tfrac{24\sqrt{5}}{8})^2=0 \quad ou$$
$$x^3+3x^2-3x-45=0.$$

Agora vamos utilizar a fórmula de Cardano para determinar as raízes da equação acima. Para eliminar o termo do 2º grau fazemos a substituição $x=z-\frac{a}{3}$, obtendo $x=z-1$, assim

$$(z-1)^3+3(z-1)^2-3(z-1)-45=0 \Rightarrow z^3-6z-40=0,$$

e portanto $p=-6$ *e* $q=-40$. *Aplicando a fórmula de Cardano, temos*

$$z=\sqrt[3]{-\frac{(-40)}{2}+\sqrt{\frac{(-40)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{(-40)}{2}-\sqrt{\frac{(-40)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}}} \quad ou$$
$$z=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

Observemos as igualdades abaixo:
$(2+\sqrt{2})^3=2^3+3\cdot2^2\cdot\sqrt{2}+3\cdot2\cdot(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^3=8+12\sqrt{2}+12+2\sqrt{2}=20+14\sqrt{2},$
$(2-\sqrt{2})^3=2^3-3\cdot2^2\cdot\sqrt{2}+3\cdot2\cdot(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^3=8-12\sqrt{2}+12-2\sqrt{2}=20-14\sqrt{2}.$
Das igualdades acima podemos escrever
$u=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}=2+\sqrt{2},$
$v=\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}=2-\sqrt{2}.$
Como $u=2+\sqrt{2}$ *é uma das raízes cúbicas, as outras duas raízes são obtidas multiplicando seu valor pelas raízes cúbicas da unidade, ou seja,*
$u=\left\{(2+\sqrt{2}),(2+\sqrt{2})(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}),(2+\sqrt{2})(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})\right\}.$
Como $v=2-\sqrt{2}$ *é uma das raízes cúbicas, as outras duas raízes são obtidas multiplicando seu valor pelas raízes cúbicas da unidade, ou seja,*
$v=\left\{(2-\sqrt{2}),(2-\sqrt{2})(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}),(2-\sqrt{2})(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})\right\}.$
Sabemos que $3uv=-p$ *e que* $p=-6$, *então ao escolher o valor de u o valor de v já ficará determinado. Assim,*
para $u=2+\sqrt{2}$, *temos* $3\cdot(2+\sqrt{2})\cdot v=6$, *ou seja,* $v=2-\sqrt{2}$,
para $u=(2+\sqrt{2})(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})$, *temos* $3\cdot(2+\sqrt{2})(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})\cdot v=6$, *ou seja,*
$v=(2-\sqrt{2})(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})$ *e*
para $u=(2+\sqrt{2})(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})$, *temos* $3\cdot(2+\sqrt{2})(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})\cdot v=6$, *ou seja,*
$v=(2-\sqrt{2})(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})$.
Assim as raízes de $z^3-6z-40=0$ *são dadas por*
$z_1=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4,$
$z_2=(2+\sqrt{2})(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})+(2-\sqrt{2})(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})=-2+i\sqrt{6},$
$z_3=(2+\sqrt{2})(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})+(2-\sqrt{2})(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})=-2-\sqrt{6}.$
Para encontrar o valor de x, usamos $x=z-1$, *assim,*
$x_1=z_1-1=4-1=3,$
$x_2=z_2-1=-2+i\sqrt{6}-1=-3+i\sqrt{6},$
$x_3=z_3-1=-2-i\sqrt{6}-1=-3-i\sqrt{6}.$
Temos que $y=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}$ *satisfaz a equação* $y^4+6y^2+25\sqrt{5}y+21=0$. *Para isso, devemos lembrar que* $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3}=-\frac{\beta}{8}$, *ou seja, como* $\beta=24\sqrt{5}$ *o produto das raízes deve ser negativo. Assim,*
$y_1=-\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}=-\sqrt{3}-\sqrt{-3+i\sqrt{6}}-\sqrt{-3-i\sqrt{6}},$
$y_2=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}=\sqrt{3}+\sqrt{-3+i\sqrt{6}}-\sqrt{-3-i\sqrt{6}},$

$y_3 = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} = \sqrt{3} - \sqrt{-3+i\sqrt{6}} + \sqrt{-3-i\sqrt{6}},$
$y_4 = -\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} = -\sqrt{3} + \sqrt{-3+i\sqrt{6}} + \sqrt{-3-i\sqrt{6}}.$
Finalmente, encontramos as raízes da equação original. Para isso, temos $w = y-1$, ou seja,
$w_1 = -\sqrt{3} - \sqrt{-3+i\sqrt{6}} - \sqrt{-3-i\sqrt{6}} - 1,$
$w_2 = \sqrt{3} + \sqrt{-3+i\sqrt{6}} - \sqrt{-3-i\sqrt{6}} - 1,$
$w_3 = \sqrt{3} - \sqrt{-3+i\sqrt{6}} + \sqrt{-3-i\sqrt{6}} - 1,$
$w_4 = -\sqrt{3} + \sqrt{-3+i\sqrt{6}} + \sqrt{-3-i\sqrt{6}} - 1.$

Conclusão

Analisando o contexto histórico das equações polinomiais verificamos a dificuldade enfrentada pelos matemáticos da época para determinarem um método que possibilitasse encontrar as raízes de uma equação do 3º e 4º graus. Os desafios levavam esses grandes gênios a uma dedicação incansável até obterem resultados satisfatórios. Entendemos que o ensino de equações polinomiais até no ensino básico não pode se restringir apenas as equações de 1º e 2º graus, visto que nos livros didáticos atuais dificilmente encontramos algum desses métodos algébricos.

O ensino de equações polinomiais com grau maior que dois permite que o aluno veja curvas diferentes de retas, parábolas e círculos, com os quais eles já estão acostumados, dando uma bagagem matemática muito maior. Também permite estabelecer algumas relações importantes, como por exemplo, verificar o tipo de solução que estas equações possuem e relacionar os seus coeficientes com suas respectivas raízes.

Um obstáculo enfrentado para o ensino de equações polinomiais é o fato de deparar com raízes quadradas de números negativos, o que nos leva a concluir a importância dos números complexos para o desenvolvimento do tema, pois quando os alunos estão estudando as equações do 2º grau, e ao calcular o discriminante da equação obtém um número negativo significava que a equação não tinha solução, mas dependendo da equação do terceiro grau, a partir da fórmula de Cardano, é possível que no seu desenvolvimento encontremos raízes de números negativos sendo que esta equação tenha raízes reais.

Esperamos que este trabalho possa despertar o interesse ao estudo das equações polinomiais do 3º grau no ensino básico, sendo uma ferramenta que auxilie no desenvolvimento de estratégias pedagógicas eficientes para tal fim, mesmo sabendo que não é recomendado trabalhá-lo em sua totalidade por conter conceitos não adequados para o ensino básico, mas sendo útil para o conhecimento do professor.

Referências Bibliográficas

[1] Ávila, G. **Variáveis Complexas e Aplicações**. LTC Editora, Rio de Janeiro, 2000.

[2] Boyer, C. B. **História da Matematica**. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1974.

[3] Domingues, H. H.; Iezzi, G. **Álgebra Moderna**. Atual Editora, São Paulo, 2003.

[4] dos Santos Garcia, A. C.; Marinho, E. R. M.; Cremm, R.; da Silva, R. P. **Um estudo analítico dos polinômios e equações polinomiais**. Graduação, Centro Universitário FIEO, 2007.

[5] Gomes, P. C. B. **História da álgebra: Desenvolvimento e percursores**. Graduação, Universidade Estadual Vale do Acaraú, 2007.

[6] Iezzi, G. **Fundamentos de Matemática Elementar 6**. Atual Editora, São Paulo, 1977.

[7] Iezzi, G.; Marakami, C. **Fundamentos de Matemática Elementar 1**. Atual Editora, São Paulo, 1977.

[8] Leithold, L. **O Cáculo com Geometria Analítica Volume 1**. Editora HARBRA ltda, São Paulo, 1994.

[9] Lima, E. L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. SBM, Rio de Janeiro, 1991.

[10] Lima, E. L. **Revista do Professor de Matemática 25**. SBM, Rio de Janeiro, 1994.

[11] Neto, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar Volume 6**. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[12] Neto, A. A.; Sampaio, J. L. P.; Lapa, N.; Cavallante, S. L. **Números Complexos, Polinômios e Equações Algébricas: Noções de Matemática volume 7**. Editora Moderna, São Paulo, 1982.