GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Programa e Metas Curriculares
Matemática A

Ensino Secundário

Cursos Científico-Humanísticos
de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas

Programa e Metas Curriculares – Matemática A

Coordenação pedagógica

Helena Damião – Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Coimbra
Isabel Festas – Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Coimbra

Coordenação científica

António Bivar – Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (aposentado)
Carlos Grosso – Escola Secundária c/ 3.º Ciclo de Pedro Nunes
Filipe Oliveira – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa
Maria Clementina Timóteo – Escola Secundária c/ 3.º Ciclo Padre Alberto Neto
Luísa Loura – Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (Probabilidades e Estatística)

Consultores

Armando Machado – Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
Cândida Palma – Escola Secundária do Lumiar (aposentada)
Carlos Andrade – Escola Secundária de Mem Martins
Cristina Viegas – Escola Secundária de Henriques Nogueira
Filipe Teixeira – Colégio do Sagrado Coração de Maria
Luciano Batalha dos Santos – Escola Secundária D. Filipa de Lencastre
Luís Canto de Loura – Instituto Superior de Engenharia de Lisboa (aposentado)
Joana Teles – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
José Carlos Santos – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Jorge Buescu – Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
Maria Alice da Silva Martins – Agrupamento de Escolas Artur Gonçalves
Maria Helena Almeida Santos – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa
Maria Manuela Neves Figueiredo – Instituto Superior de Agronomia
Marília Pires – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve
Paula Reis – Escola Secundária Padre António Vieira

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Programa de Matemática A

Ensino Secundário

Cursos Científico-Humanísticos de
Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas

1. INTRODUÇÃO

No âmbito da revisão curricular iniciada em 2011, cujo sentido é o de elevar os padrões de desempenho escolar dos alunos portugueses, e em continuidade com o Programa de Matemática para o Ensino Básico, homologado pelo Despacho n.º 9888-A/2013, publicado no Diário da República, 2.ª série, n.º 143, de 26 de julho de 2013, o presente Programa e Metas Curriculares estabelecem o conjunto de conhecimentos e de capacidades essenciais que os alunos devem adquirir e desenvolver no decurso do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática A.

Alicerçado na análise de diferentes abordagens que têm sido adotadas para o ensino da Matemática neste nível de escolaridade (programas e avaliações nacionais e internacionais, literatura e investigação científica sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática), este documento pretende definir um padrão coerente que imprima rigor ao que é ensinado nas escolas, garantindo simultaneamente aos professores autonomia pedagógica e liberdade de usar conhecimentos e experiência acumulada para auxiliar os alunos a atingir o seu melhor desempenho.

Em concreto, o presente Programa foi elaborado tendo em conta a informação proporcionada por mais de dez anos de aplicação do Programa anterior. No entanto, ao optar-se pela elaboração de Metas Curriculares, muitos dos conteúdos transversais inerentes a um Programa de Matemática do Secundário encontram-se agora, em grande medida, explicitados, o que levou, por exemplo, à constituição do domínio *Lógica e Teoria dos Conjuntos* no 10.º ano.

As Metas Curriculares, que com o Programa formam um documento único, elencam, para cada domínio e em consonância com os conteúdos, os objetivos gerais a atingir em cada ano de escolaridade. Cada um deles encontra-se definido de forma precisa por um conjunto de descritores que apontam para desempenhos específicos e avaliáveis que os alunos deverão evidenciar para que esses objetivos se considerem cumpridos.

O Programa e as Metas Curriculares respeitam a estrutura cumulativa que é característica da disciplina de Matemática, apoiando-se os novos conhecimentos em outros previamente estudados e adquiridos. De acordo com a investigação recente na área do ensino da Matemática, é desta forma progressiva que se pode ir desenvolvendo a compreensão, ou seja, que se pode ir construindo uma sólida rede de factos, conceitos, relações e procedimentos suscetível de ser mobilizada, de forma flexível, em diversos contextos. O Programa e as respetivas Metas foram concebidos por forma a fornecer aos alunos instrumentos que garantam um prosseguimento de estudos com sucesso, tendo em consideração que é este o ramo da Matemática do Ensino Secundário que dá acesso aos cursos do Ensino Superior de áreas que requerem uma sólida formação matemática.

Nessa conceção, tiveram-se igualmente em conta as avaliações internacionais em que Portugal participa, nomeadamente o PISA e o TIMSS. O *Programme for International Student Assessment* (PISA) tem por objetivo avaliar a literacia de Leitura, Matemática e Ciências nos jovens de 15 anos, independentemente do ano de escolaridade e da modalidade que frequentam. Ainda que a pertinência deste estudo seja indiscutível, serão mais relevantes, no quadro do presente Programa, os pressupostos do *Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks* (adiante designado por *TIMSS-Advanced),* programa de avaliação internacional no qual Portugal participará a partir de 2015 e cujo objetivo é precisamente o de estudar os resultados obtidos pelos alunos que se encontram no final do Ensino Secundário nas disciplinas de Física e Matemática, em modalidades destinadas ao prosseguimento de estudos em áreas de ciências e tecnologias. Na definição e estruturação dos domínios cognitivos e de conteúdos a avaliar, o *TIMSS-Advanced* envolve todos os países participantes num processo colaborativo que passa por uma muito completa descrição dos tópicos e conteúdos dos currículos de Matemática e de Física desses países. No que se refere à Matemática, os domínios dos conteúdos (*Álgebra*, *Cálculo* e *Geometria*) e das capacidades cognitivas (*Knowing*, *Appllying* e *Reasoning*) encontram-se devidamente contemplados no presente documento curricular conforme se explica nos tópicos seguintes.

No que diz respeito aos conteúdos programáticos, a análise destes elementos, bem como de currículos de outros países não participantes no *TIMSS-Advanced*, revela que a inclusão no Programa de alguns temas fundamentais, atualmente ausentes do Ensino Secundário em Portugal, contribui decisivamente para o alinhamento das opções curriculares nacionais com o plano internacional. Como exemplo refiram-se os que constam do domínio *Primitivas e Cálculo Integral.* Procedeu-se ainda ao reforço de alguns tópicos, como o da aplicação da trigonometria à resolução de triângulos ou o do estudo de limites de sucessões e de funções, que, quando trabalhados de forma vaga e exageradamente intuitiva, levam com frequência à formação de conceções erradas e difíceis de reverter.

Finalmente, com o objetivo de promover o conhecimento da forma como a Matemática vai sendo construída, procurou-se justificar, em certas situações, a escolha de algumas definições consagradas desta disciplina. É, por exemplo, o caso da extensão das definições das razões trigonométricas, estudadas no Ensino Básico, a ângulos retos e obtusos, intimamente ligada neste Programa à Lei dos senos e ao Teorema de Carnot, que permitem resolver triângulos de forma simples e sistemática, atividade essa que constitui o propósito primitivo da Trigonometria.

No respeito pela estrutura intrínseca da Matemática e do método que a caracteriza, procurou-se igualmente desenvolver no aluno o gosto por esta disciplina milenar, nas suas diversas vertentes, como o caráter organizador e agregador de conhecimento na sua expressão mais abstrata ou a eficácia de que se revestem os instrumentos matemáticos quando aplicados ao estudo do mundo real.

O calendário de aplicação deste Programa está definido no Despacho n.º 159717/2012, de 14 de dezembro, estando prevista para o ano letivo 2015-16 a sua implementação no 10.º ano de escolaridade, prosseguindo nos anos seguintes para os 11.º e 12.º anos de escolaridade.

2. FINALIDADES DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Como finalidades da disciplina de Matemática no Ensino Secundário salientam-se a estruturação do pensamento e a aplicação da Matemática ao mundo real.

A estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio abstrato

Tal como é referido no Programa de Matemática do Ensino Básico, a apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, o estudo sistemático das suas propriedades e a argumentação clara e precisa, própria desta disciplina, têm um papel primordial na organização do pensamento, constituindo-se como uma gramática basilar do raciocínio hipotético-dedutivo. O trabalho desta gramática contribui para alicerçar a capacidade de elaborar análises objetivas, coerentes e comunicáveis. Contribui ainda para melhorar a capacidade de argumentar, de justificar adequadamente uma dada posição e de detetar falácias e raciocínios falsos em geral. Tratando-se de uma capacidade indispensável a um bom percurso escolar ou profissional, em qualquer área do conhecimento, o desenvolvimento do raciocínio abstrato deve ser considerado como uma finalidade em si.

A modelação e a aplicação da Matemática ao mundo real

Os instrumentos matemáticos são indispensáveis à concretização de modelos que permitem descrever, interpretar e prever a evolução de um grande número de sistemas reais cujo estudo se pode inserir nas mais diversas áreas do conhecimento. De um ponto de vista histórico é possível afirmar que alguns conceitos centrais da Matemática foram desenvolvidos com o propósito de serem utilizados na análise de certos fenómenos naturais. O Programa dá especial relevância a diversas aplicações da Matemática, prescrevendo, por exemplo, explicitamente, a aplicação do cálculo diferencial à cinemática do ponto ou das progressões geométricas ao cálculo de juros, o que permite em particular obter uma interpretação concreta do número de Neper.

A este propósito, é importante referir que a modelação matemática não consiste em associar de forma arbitrária – e sem qualquer critério ou justificação razoável – uma dada função matemática a uma dada grandeza. Proceder dessa forma é transmitir aos alunos uma visão deturpada de como se pode, de facto, aplicar corretamente a Matemática ao mundo real. Por exemplo, a função exponencial é especialmente indicada para modelar o decaimento de uma substância radioativa ou o crescimento de uma população de bactérias porque, em ambas as situações, a análise do fenómeno em estudo permite concluir que a taxa de variação da grandeza observada pode ser considerada, dentro de certas condições, proporcional à quantidade que está num dado momento presente numa amostra, o que se traduz, ao utilizar-se um modelo baseado em funções diferenciáveis, pela proporcionalidade entre a função que representa o fenómeno e a respetiva derivada. Uma tal justificação encontra-se explicitamente prevista no Programa.

De forma análoga prevê-se, no 12.º ano, o tratamento de situações em que uma função é proporcional, com constante de proporcionalidade negativa, à respetiva derivada de segunda ordem. É desta forma possível justificar a utilização de funções trigonométricas na modelação de alguns sistemas que exibem comportamento oscilatório. Em particular, é proposto estudar, neste contexto, a forma como a segunda Lei de Newton e a Lei de Hooke permitem deduzir que certos sistemas envolvendo massas atuadas por molas apresentam um comportamento de oscilador harmónico.

3. OBJETIVOS

Os objetivos que traduzem os desempenhos fundamentais que os alunos deverão evidenciar ao longo do Ensino Secundário são explicitados por verbos a que se atribuem significados específicos e que servem de base à leitura dos descritores elencados nas Metas Curriculares.

Requerem-se assim os seguintes cinco desempenhos, com o sentido que se descreve:

(1) **Identificar/Designar/Referir**: O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.

(2) **Reconhecer**: O aluno deve apresentar uma argumentação coerente ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.

(3) **Saber**: O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

(4) **Provar/Demonstrar**: O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.

(5) **Justificar**: O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.

No seu conjunto, e de modo integrado, estes desempenhos devem concorrer para a aquisição de conhecimentos, factos, conceitos e procedimentos, para a construção e desenvolvimento do raciocínio matemático, para a resolução de problemas em diversos contextos, para uma comunicação (oral e escrita) adequada e para uma visão da Matemática como um todo articulado e coerente.

Conhecimento de factos, de conceitos e de procedimentos – O domínio de procedimentos padronizados deverá ser objeto de particular atenção no ensino desta disciplina. As rotinas e automatismos são essenciais à atividade matemática, uma vez que permitem libertar a memória de trabalho, de modo que esta se possa dedicar, com maior exclusividade, a tarefas que exigem funções cognitivas superiores. Por outro lado permitem determinar, *a priori*, que outra informação se poderia obter sem esforço a partir dos dados de um problema, o que possibilita elaborar novas estratégias com vista à sua resolução. A memorização de alguns factos tem igualmente um papel fundamental na aprendizagem da Matemática, pelo que é incorreto opô-la à compreensão: memorização e compreensão, sendo complementares, reforçam-se mutuamente. Conhecer factos elementares e enunciados de teoremas de memória permite também poupar recursos cognitivos que poderão ser direcionados para a execução de tarefas mais complexas. No *TIMSS-Advanced*, relativamente ao domínio cognitivo «*Knowing*», considera-se que os factos e propriedades elementares constituem, em conjunto, a linguagem básica da Matemática e a própria fundação do pensamento matemático, devendo o aluno ser capaz de os recordar de forma automática e sistemática. Relativamente aos procedimentos, entende-se que: «Os procedimentos formam uma ponte entre os conhecimentos elementares e a utilização da Matemática para a resolução de problemas rotineiros. Os alunos devem ser eficientes e precisos na utilização de uma variedade de procedimentos de cálculo e outras ferramentas. Devem saber que determinados procedimentos permitem resolver categorias inteiras de problemas e não apenas problemas avulso.»

Raciocínio matemático – O raciocínio matemático é por excelência o raciocínio hipotético--dedutivo, embora o raciocínio indutivo desempenhe também um papel fundamental na atividade matemática, uma vez que preside à formulação de conjeturas. Os alunos devem ser capazes de estabelecer conjeturas, em alguns casos, após a análise de um conjunto de situações particulares, nomeadamente pela exploração das potencialidades dos recursos tecnológicos. O *TIMSS-Advanced*, no capítulo dedicado à capacidade cognitiva «*Reasoning*», estabelece também que os alunos devem ser capazes de utilizar a intuição e o raciocínio indutivo baseado em padrões e em regularidades com vista à resolução de problemas não rotineiros, frisando que estes problemas exigem recursos cognitivos acima dos necessários à resolução de problemas rotineiros, ainda que a respetiva resolução esteja dependente de conhecimentos e capacidades previamente adquiridas. No entanto (e tal como também se encontra cuidadosamente explicitado no *TIMSS-Advanced*), os alunos deverão saber que o raciocínio indutivo não é apropriado para justificar propriedades e, contrariamente ao raciocínio dedutivo, pode levar a conclusões erradas a partir de hipóteses verdadeiras, razão pela qual as conjeturas formuladas mas não demonstradas têm um interesse limitado, devendo os alunos ser alertados para este facto e incentivados a justificá-las *a posteriori.*

Os desempenhos requeridos para o cumprimento dos descritores preveem que os alunos da disciplina de Matemática A consigam, no final do Ensino Secundário, elaborar algumas demonstrações com segurança.

Resolução de problemas – A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, de conceitos e de relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais. Este ponto é reforçado no *TIMSS-Advanced*, a propósito do domínio cognitivo «*Applying*». Considera-se, a propósito da resolução de problemas, que os alunos devem «aplicar conhecimentos de factos matemáticos, capacidades, procedimentos e conceitos para criar representações e resolver problemas». Faz-se ainda notar que «embora a respetiva dificuldade possa variar, os problemas a resolver no âmbito deste domínio cognitivo envolvem essencialmente a capacidade de selecionar e aplicar procedimentos previamente estudados».

Assim, a resolução de problemas não deve confundir-se com atividades vagas de exploração e de descoberta que, podendo constituir estratégias de motivação, não se revelam adequadas à concretização efetiva de uma finalidade tão exigente.

Nos enunciados de exercícios e problemas deve ter-se em conta a conveniência de uma progressiva utilização das técnicas e princípios que vão sendo adquiridos, procurando-se um equilíbrio entre a adequação das questões propostas a essa aquisição progressiva e uma ilustração, nem sempre possível, de situações inteiramente inspiradas na vida corrente. Desta maneira, pode ser conveniente, em diversas situações, propor problemas descrevendo situações que não traduzam de modo plenamente realista aspetos da experiência quotidiana dos alunos, mas que sejam particularmente adaptados aos objetivos do ensino de determinadas matérias.

Comunicação matemática – A capacidade de compreender os enunciados dos problemas matemáticos e de identificar as questões que levantam pode ser desenvolvida através da sua explicitação e explicação, bem como da discussão de estratégias que conduzam à sua resolução. Os alunos devem, pois, ser incentivados a expor as suas ideias de modo claro, conciso e coerente, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas. Sendo igualmente a redação escrita parte integrante da atividade matemática, devem também ser incentivados a redigir convenientemente as respostas, explicando de forma adequada o raciocínio e apresentando as suas conclusões de forma clara, escrevendo em português correto e evitando uma utilização inapropriada de símbolos matemáticos como abreviaturas estenográficas.

História da Matemática – A História da Matemática é um tema que está contemplado explicitamente em alguns descritores das Metas. Os professores deverão, não apenas nesses casos mas também a propósito de outros temas que para o efeito se revelem particularmente adequados, enquadrar de um ponto de vista histórico os conteúdos abordados. Tal atividade, para além de ilustrar a forma como a Matemática foi construída ao longo dos tempos, permite ainda, não só uma maior motivação para a aprendizagem, como, em muitos casos, também proporciona uma melhor compreensão dos próprios conceitos. Por outro lado, a interação da Matemática com outras áreas do conhecimento como a Astronomia, a Física, a Biologia ou a Economia constituiu um dos motores essenciais à evolução global das ciências, incluindo a própria Matemática, pelo que o conhecimento histórico dessa interação é um fator essencial para uma compreensão mais profunda do pensamento científico.

4. CONTEÚDOS

Em cada ano de escolaridade, os conteúdos encontram-se organizados por domínios. A articulação entre os domínios de conteúdos e os objetivos acima referidos – que constituem o conjunto de desempenhos que os alunos devem evidenciar – está materializada nas Metas Curriculares.

Nos quadros seguintes apresentam-se os conteúdos a lecionar, organizados por anos de escolaridade, e sugere-se, a título não prescritivo, o número de tempos letivos que poderá ser dedicado a cada um dos domínios, incluindo-se nesse número as aulas dedicadas à avaliação. Atendendo à autonomia atualmente conferida às escolas no que se refere à duração dos tempos letivos, esclarece-se que, nessas sugestões, se considerou, como unidade, o tempo letivo de 45 minutos.

10.º ano

No 10.º ano, os domínios de conteúdos são cinco:

- Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC)
- Álgebra (ALG)
- Geometria Analítica (GA)
- Funções Reais de Variável Real (FRVR)
- Estatística (EST)

O domínio *Lógica e Teoria dos Conjuntos* pode ser considerado central neste ciclo de estudos, uma vez que reúne temas fundamentais e transversais a todo o Ensino Secundário. Começa-se por introduzir algumas operações sobre proposições, de forma intuitiva e no contexto de uma Lógica bivalente em que valem os Princípios de não contradição e do terceiro excluído. Em seguida, é estudada a quantificação universal e existencial de condições e a relação entre operações sobre condições e sobre os respetivos conjuntos-solução, assunto que já tinha sido visitado, de forma menos específica, no Ensino Básico. É, ainda, a oportunidade para traduzir numa linguagem própria das teorias aqui desenvolvidas algumas técnicas elementares de demonstração, como a prova da igualdade entre conjuntos por dupla inclusão ou a prova de uma implicação pelo contrarrecíproco. De acordo com os princípios gerais de interpretação das Metas Curriculares, tal como estão enunciados na respetiva introdução, este estudo pode, naturalmente, ser integrado no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios assim como em revisões de conteúdos de anos anteriores.

No domínio da *Álgebra*, completa-se, de forma sistemática, o estudo dos radicais, o que permite estender adequadamente a noção de potência a expoentes racionais e mostrar que as respetivas propriedades algébricas se estendem a potências com este conjunto alargado de expoentes. Neste domínio ainda se retoma o estudo iniciado no Básico acerca do anel dos polinómios de coeficientes reais. É definida a divisão euclidiana e apresentado o Teorema do resto, que permite, em particular, provar que $a \in \mathbb{R}$ é raiz de um polinómio P se e somente se P é divisível por $x - a$. É ainda abordada a noção de multiplicidade algébrica de uma raiz, com aplicações à fatorização de polinómios.

O 10.º ano é igualmente a ocasião para se desenvolver o estudo da *Geometria Analítica* iniciado no Ensino Básico com a introdução dos referenciais cartesianos planos e o estudo das equações cartesianas das retas. Fixada uma unidade de comprimento e um referencial ortonormado do plano, introduz-se o cálculo da medida da distância entre pontos a partir das respetivas coordenadas, o que constitui um passo essencial no sentido de tratar, de forma eficaz, problemas da Geometria com instrumentos puramente analíticos. Dá-se especial relevo ao estudo das equações cartesianas de circunferências e elipses, cuja definição geométrica a partir da propriedade focal é apresentada neste domínio. No que diz respeito ao cálculo vetorial, para além das operações de adição de vetores e de adição de um ponto com um vetor, que eram já conhecidas, define-se agora a diferença de vetores, a multiplicação de um vetor por um escalar, a noção de norma, fixada uma unidade de comprimento, e, fixado além disso um referencial ortonormado, introduzem-se as coordenadas de um vetor, tratando-se em seguida também de um ponto de vista analítico todas estas noções. Depois de se apresentar o conceito de vetor diretor, introduzem-se as equações vetoriais e os sistemas de equações paramétricas de retas do plano. Finalmente, é feita uma primeira abordagem aos referenciais cartesianos do espaço, generalizando-se algumas das noções já estudadas no plano.

Inicia-se o domínio *Funções Reais de Variável Real* com alguns conceitos gerais sobre funções, como a injetividade, a sobrejetividade ou a restrição de uma função a um dado conjunto e definem-se as noções de composição de funções e de função inversa de uma função bijetiva. Em seguida, estabelecem-se relações entre propriedades de funções reais de variável real, como a paridade e simetrias dos respetivos gráficos. Estudam-se ainda as transformações geométricas dos gráficos de funções obtidas através da adição ou da multiplicação das variáveis dependente ou independente de uma dada função por uma constante. Termina-se este domínio de conteúdos com alguns aspetos gerais das funções reais de variável real, como a monotonia, o sentido de concavidade do respetivo gráfico ou as noções de extremo relativo e absoluto.

Finalmente, no domínio *Estatística*, começa-se por introduzir o sinal de somatório e algumas das suas regras operatórias, que serão úteis em diversas ocasiões ao longo do Ensino Secundário. Em particular poderão ser utilizadas neste mesmo domínio, nomeadamente aquando da manipulação de médias e desvios-padrão de amostras, ou de percentis, noções tratadas no 10.º ano. Para além das definições de variável estatística, amostra, média, variância, desvio-padrão e percentil, analisam-se as propriedades básicas destes conceitos e as respetivas interpretações em exemplos concretos.

10.º ano – Tabela de conteúdos

Domínio	Conteúdos
LTC10 **18 aulas**	**Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos** **Proposições** - Valor lógico de uma proposição; Princípio de não contradição; - Operações sobre proposições: negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência; - Prioridades das operações lógicas; - Relações lógicas entre as diferentes operações; propriedade da dupla negação; Princípio do terceiro excluído; Princípio da dupla implicação; - Propriedades comutativa e associativa, da disjunção e da conjunção e propriedades distributivas da conjunção em relação à disjunção e da disjunção em relação à conjunção; - Leis de De Morgan; - Implicação contrarrecíproca; - Resolução de problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições. **Condições e Conjuntos** - Expressão proposicional ou condição; quantificador universal, quantificador existencial e segundas Leis de De Morgan; contraexemplos; - Conjunto definido por uma condição; Igualdade entre conjuntos; conjuntos definidos em extensão; - União (ou reunião), interseção e diferença de conjuntos e conjunto complementar; - Inclusão de conjuntos; - Relação entre operações lógicas sobre condições e operações sobre os conjuntos que definem; - Princípio de dupla inclusão e demonstração de equivalências por dupla implicação; - Negação de uma implicação universal; demonstração por contrarrecíproco; - Resolução de problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.
ALG10 **30 aulas**	**Radicais** - Monotonia da potenciação; raízes de índice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$; - Propriedades algébricas dos radicais: produto e quociente de raízes com o mesmo índice, potências de raízes e composição de raízes; - Racionalização de denominadores; - Resolução de problemas envolvendo operações com radicais. **Potências de expoente racional** - Definição e propriedades algébricas das potências de base positiva e expoente racional: produto e quociente de potências com a mesma base, produto e quociente de potências com o mesmo expoente e potência de potência; - Resolução de problemas envolvendo operações com potências. **Polinómios** - Divisão euclidiana de polinómios e regra de Ruffini; - Divisibilidade de polinómios; Teorema do resto; - Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades; - Resolução de problemas envolvendo a divisão euclidiana de polinómios, o Teorema do resto e a fatorização de polinómios; - Resolução de problemas envolvendo a determinação do sinal e dos zeros de polinómios.

GA10 54 aulas	**Geometria analítica no plano** - Referenciais ortonormados; - Fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano em função das respetivas coordenadas; - Coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta; - Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta; - Equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos; - Equação cartesiana reduzida da circunferência; - Definição de elipse e respetiva equação cartesiana reduzida; relação entre eixo maior, eixo menor e distância focal; - Inequações cartesianas de semiplanos; - Inequações cartesianas de círculos; - Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano; - Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do plano. **Cálculo vetorial no plano** - Norma de um vetor; - Multiplicação por um escalar de um vetor; relação com a colinearidade e o vetor simétrico; - Diferença entre vetores; - Propriedades algébricas das operações com vetores; - Coordenadas de um vetor; - Vetor-posição de um ponto e respetivas coordenadas; - Coordenadas da soma e da diferença de vetores; coordenadas do produto de um vetor por um escalar e do simétrico de um vetor; relação entre as coordenadas de vetores colineares; - Vetor diferença de dois pontos; cálculo das respetivas coordenadas; coordenadas do ponto soma de um ponto com um vetor; - Cálculo da norma de um vetor em função das respetivas coordenadas; - Vetor diretor de uma reta; relação entre as respetivas coordenadas e o declive da reta; - Paralelismo de retas e igualdade do declive; - Equação vetorial de um reta; - Sistema de equações paramétricas de uma reta; - Resolução de problemas envolvendo a determinação de coordenadas de vetores no plano, a colinearidade de vetores e o paralelismo de retas do plano. **Geometria analítica no espaço** - Referenciais cartesianos ortonormados do espaço; - Equações de planos paralelos aos planos coordenados; - Equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos; - Distância entre dois pontos no espaço; - Equação do plano mediador de um segmento de reta; - Equação cartesiana reduzida da superfície esférica; - Inequação cartesiana reduzida da esfera; - Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do espaço; - Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do espaço. **Cálculo vetorial no espaço** - Generalização ao espaço dos conceitos e propriedades básicas do cálculo vetorial; - Equação vetorial da reta no espaço; - Resolução de problemas envolvendo cálculo vetorial no espaço.

FRVR10 **58 aulas**	**Generalidades acerca de funções** - Produtos cartesianos de conjuntos; - Gráficos de funções; - Restrições de uma função; - Imagem de um conjunto por uma função; - Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas; - Composição de funções; - Função inversa de uma função bijetiva. **Generalidades acerca de funções reais de variável real** - Funções reais de variável real; funções definidas por expressões analíticas; - Propriedades geométricas dos gráficos de funções; - Paridade; simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares; - Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa; - Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $af(x)$, $f(bx)$, $f(x+c)$ e $f(x)+d$, a, b, c, d números reais, a e b não nulos. **Monotonia, extremos e concavidade** - Intervalos de monotonia de uma função real de variável real; caso das funções afins e caso das funções quadráticas; - Vizinhança de um ponto da reta numérica; extremos relativos e absolutos; - Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real. **Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo e de funções definidas por ramos** - Extremos, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica de funções quadráticas; - Funções definidas por ramos; - Estudo da função $x \to a\|x-b\|+c\ ,\ a \neq 0$; - As funções $x \to \sqrt{x}$ e $x \to \sqrt[3]{x}$ enquanto funções inversas; - Domínio e representação gráfica das funções definidas analiticamente por $f(x) = a\sqrt{x-b}+c\ ,\ a \neq 0$ e $f(x) = a\sqrt[3]{x-b}+c\ ,\ a \neq 0$; - Estudo de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais, módulos e radicais. **Resolução de problemas** - Equações e inequações envolvendo as funções polinomiais, raiz quadrada e raiz cúbica, e a composição da função módulo com funções afins e com funções quadráticas; - Resolução de problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real; - Resolução de problemas envolvendo as funções afins, quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais.

EST10 **18 aulas**	**Características amostrais** - Sinal de somatório; tradução no formalismo dos somatórios das propriedades associativa e comutativa generalizadas da adição e distributiva generalizada da multiplicação em relação à adição; - Variável estatística quantitativa como função numérica definida numa população e amostra de uma variável estatística; - Média de uma amostra; propriedades da média de uma amostra; - Variância e desvio-padrão de uma amostra; propriedades da variância e do desvio--padrão de uma amostra; - Percentil de ordem k; propriedades do percentil de ordem k; - Resolução de problemas envolvendo a média e o desvio-padrão de uma amostra; - Resolução de problemas envolvendo os percentis de uma amostra.

11.º ano

No 11.º ano, os domínios de conteúdos são cinco:

- Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI)
- Geometria Analítica (GA)
- Sucessões (SUC)
- Funções Reais de Variável Real (FRVR)
- Estatística (EST)

Após o estudo das razões trigonométricas dos ângulos agudos, realizado no Ensino Básico, o início do domínio *Trigonometria e Funções Trigonométricas* é consagrado a estabelecer uma definição para o seno e o cosseno de um qualquer ângulo convexo, justificando-se a escolha apresentada com a motivação de estender a ângulos internos retos e obtusos, a Lei dos Senos e o Teorema de Carnot, que permitem resolver triângulos de forma simples e sistemática. É também requerido o uso adequado de uma calculadora científica para obter valores aproximados dos elementos de triângulos objeto de resolução trigonométrica. Aborda-se em seguida o estudo dos ângulos orientados e generalizados e respetivas medidas de amplitude – conceitos intimamente associados à noção de rotação – e generalizam-se as razões trigonométricas a estes ângulos, introduzindo-se o círculo trigonométrico. Após a definição do radiano como unidade de medida de amplitude, fica-se apto a definir as funções reais de variável real seno, cosseno e tangente e a estudar as respetivas propriedades.

No domínio *Geometria Analítica*, introduz-se, no 11.º ano, a noção geométrica de produto escalar de vetores, deduzindo-se as suas principais propriedades, como a simetria, a bilinearidade ou a relação deste conceito com a perpendicularidade. Fixado um referencial ortonormado, o produto escalar estuda--se também do ponto de vista das coordenadas. É importante notar que as propriedades das funções trigonométricas abordadas no domínio *Trigonometria e Funções Trigonométricas* são fundamentais para uma correta apresentação e justificação de muitos destes resultados. Ainda neste domínio, completa-se o estudo das equações cartesianas de planos no espaço, iniciado no 10.º ano.

No domínio *Sucessões*, após a apresentação de alguns aspetos gerais, é introduzido o princípio de indução matemática, que constitui um instrumento fundamental para o estudo de diversas propriedades das sucessões, servindo ainda de suporte teórico à definição de sucessões por recorrência. São estudadas as progressões aritméticas e geométricas bem como o cálculo da soma de sequências dos respetivos termos.

A noção de limite é introduzida de forma cuidada. Uma abordagem puramente intuitiva dos limites leva rapidamente a insuficiências concetuais graves. É pois exigida, em situações muito simples, a justificação da convergência de certas sucessões recorrendo diretamente à definição. É também desenvolvida, de forma bastante completa, a álgebra dos limites, incluindo uma análise das situações ditas indeterminadas, devendo os alunos justificar igualmente alguns destes resultados.

No domínio *Funções Reais de Variável Real*, do 11.º ano, utilizam-se os conceitos introduzidos no domínio *Sucessões*, para, pelo processo atribuído a Heine, ficar definida a noção de limite de uma função, num dado ponto ou em mais ou menos infinito. Neste contexto, são essencialmente duas as opções que classicamente se consideram para a definição de limite num ponto a real, consoante o domínio em que se tomam as sucessões a tender para a, para o efeito de testar a existência do referido limite. A opção privilegiada desde há bastante tempo no Ensino Secundário em Portugal tem sido a que consiste em considerar, de entre as sequências no domínio da função, apenas aquelas que nunca tomam o valor a. Ou seja, tem-se optado pelo que vulgarmente se designa por "limite por valores diferentes de a". Neste programa optou-se pela versão alternativa que consiste em admitir, com o mesmo objetivo, sucessões que podem tomar o valor a; considera-se, com efeito, que esta opção apresenta diversas vantagens. Em primeiro lugar por ser mais simples de formular (e permitir também uma formulação mais simples da noção de continuidade) e em segundo lugar porque a própria noção de "limite por valores diferentes" (como outras afins como a de "limite à esquerda" e "à direita") passa a poder ser encarada como caso particular da noção de limite, quando considerada a restrição da função inicial a um subconjunto do respetivo domínio.

A definição de limite segundo Heine – que já é comum no Ensino Secundário – permite, de forma bastante imediata estender ao caso de funções reais a álgebra de limites estudada a propósito das sucessões, bem como os teoremas de convergência por comparação, como o Teorema das funções enquadradas, que é uma consequência direta, com esta abordagem, do Teorema das sucessões enquadradas e que são estudados no 12.º ano. Apresenta-se em seguida a noção de continuidade e, como uma aplicação da noção de limite de uma função, o estudo das assíntotas, em particular no caso do gráfico de uma função racional.

A noção de derivada é igualmente introduzida neste domínio, fazendo-se uma interpretação geométrica da derivada de uma função num dado ponto e estabelecendo-se fórmulas para a soma, diferença, produto, quociente e composta de funções diferenciáveis e calculando-se, diretamente a partir da definição, a derivada de algumas funções elementares. A ligação entre o sinal da derivada e a monotonia de uma dada função é aqui estabelecida invocando-se o Teorema de Lagrange para uma das implicações, embora apenas se exija uma interpretação geométrica desse resultado. Em contrapartida, pretende-se que o aluno saiba justificar a propriedade segundo a qual se uma função atinge um extremo num dado ponto em que é diferenciável, então a derivada anula-se nesse mesmo ponto, desde que pertença a um intervalo aberto contido no domínio da função. É também proposta especificamente a aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto.

No domínio *Estatística*, estudam-se as retas de mínimos quadrados associadas a uma sequência de pontos do plano. As coordenadas destes pontos podem em particular representar os valores de uma amostra bivariada, o que permite a aplicação deste conceito ao estudo da correlação de duas variáveis estatísticas definidas numa mesma população.

11.º ano – Tabela de conteúdos

Domínio	Conteúdos
TRI11 **38 aulas**	**Extensão da Trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos** - Extensão da definição das razões trigonométricas aos casos de ângulos retos e obtusos; Lei dos senos e Lei dos cossenos; - Resolução de triângulos. **Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações** - Ângulos orientados; amplitudes de ângulos orientados e respetivas medidas; - Rotações; - Ângulos generalizados; medidas de amplitude de ângulos generalizados; - Ângulos generalizados e rotações. **Razões trigonométricas de ângulos generalizados** - Circunferência trigonométrica (círculo trigonométrico); - Generalização das definições das razões trigonométricas aos ângulos orientados e generalizados e às respetivas medidas de amplitude; - Medidas de amplitude em radianos. **Funções trigonométricas** - As funções reais de variável real seno, cosseno e tangente: domínios, contradomínios, periodicidade, paridade, zeros e extremos locais; - Fórmulas trigonométricas de "redução ao 1.º quadrante": seno e cosseno de $x \pm \frac{\pi}{2}$ e de $x \pm \pi, x \in \mathbb{R}$; - Generalização da fórmula fundamental da Trigonometria; - Equações do tipo $\sin x = k, \cos x = k$ e $\operatorname{tg} x = k$; - Inequações trigonométricas com domínio num intervalo limitado; - Funções trigonométricas inversas; - Resolução de problemas envolvendo razões trigonométricas e a determinação de distâncias; - Resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas.
GA11 **32 aulas**	**Declive e inclinação de uma reta do plano** - Inclinação de uma reta do plano e relação com o respetivo declive. **Produto escalar de vetores** - Produto escalar de um par de vetores; - Ângulo formado por um par de vetores não nulos; relação com o produto escalar; - Perpendicularidade entre vetores e relação com o produto escalar; - Simetria e bilinearidade do produto escalar; - Cálculo do produto escalar de um par de vetores a partir das respetivas coordenadas; - Relação entre o declive de retas do plano perpendiculares; - Resolução de problemas envolvendo a noção de produto escalar.

	Equações de planos no espaço - Vetores normais a um plano; - Relação entre a posição relativa de dois planos e os respetivos vetores normais; - Paralelismo entre vetores e planos; - Equações cartesianas, vetoriais e sistemas de equações paramétricas de planos; - Resolução de problemas envolvendo a noção de produto escalar de vetores; - Resolução de problemas relativos à determinação de equações de retas do plano em situações envolvendo a noção de perpendicularidade; - Resolução de problemas envolvendo a determinação de equações de planos, em situações envolvendo a perpendicularidade; - Resolução de problemas envolvendo equações de planos e de retas no espaço.
SUC11 **44 aulas**	**Conjunto dos majorantes e conjunto dos minorantes de uma parte não vazia de $\mathbb{R}$** - Conjuntos minorados, majorados e limitados; - Máximo e mínimo de um conjunto. **Generalidades acerca de sucessões** - Sucessões numéricas; sucessões monótonas, majoradas, minoradas e limitadas; - Resolução de problemas envolvendo o estudo da monotonia e a determinação de majorantes e minorantes de sucessões. **Princípio de indução matemática** - Princípio de indução matemática; - Definição de uma sucessão por recorrência; - Demonstração de propriedades utilizando o princípio de indução matemática. **Progressões aritméticas e geométricas** - Progressões aritméticas e geométricas; termos gerais e somas de N termos consecutivos; - Resolução de problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas. **Limites de sucessões** - Limite de uma sucessão (casos de convergência e de limites infinitos); unicidade do limite; caso de sucessões que diferem num número finito de termos; - Convergência e limitação; - Operações com limites e situações indeterminadas; - Levantamento algébrico de indeterminações; - Limites de polinómios e de frações racionais; - Limites $\lim_n a^n$, $\lim_n \sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$ e $\lim_n n^p$ $(p \in \mathbb{Q})$; - Resolução de problemas envolvendo limites de sucessões.

FRVR11 **56 aulas**	**Limites segundo Heine de funções reais de variável real** - Pontos aderentes a um conjunto de números reais; - Limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio; - Limites laterais; - Limites no infinito; - Operações com limites e casos indeterminados; produto de uma função limitada por uma função de limite nulo; - Limite de uma função composta; - Levantamento algébrico de indeterminações; - Resolução de problemas envolvendo o estudo dos zeros e do sinal de funções racionais dadas por expressões da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios; - Resolução de problemas envolvendo a noção de limite de uma função. **Continuidade de funções** - Função contínua num ponto e num subconjunto do respetivo domínio; - Continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas; - Continuidade das funções polinomiais, racionais, trigonométricas, raízes e potências de expoente racional. **Assíntotas ao gráfico de uma função** - Assíntotas verticais e assíntotas oblíquas ao gráfico de uma função; - Resolução de problemas envolvendo a determinação das assíntotas e da representação gráfica de funções racionais definidas analiticamente por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$; - Resolução de problemas envolvendo a determinação de assíntotas ao gráfico de funções racionais e de funções definidas pelo radical de uma função racional. **Derivadas de funções reais de variável real e aplicações** - Taxa média de variação de uma função; interpretação geométrica; - Derivada de uma função num ponto; interpretação geométrica; - Aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto: funções posição, velocidade média e velocidade instantânea de um ponto material que se desloca numa reta; unidades de medida de velocidade; - Derivada da soma e da diferença de funções diferenciáveis; - Derivada do produto e do quociente de funções diferenciáveis; - Derivada da função composta; - Derivada da função definida por $f(x) = x^p$, p inteiro; - Sinal da derivada de funções monótonas; nulidade da derivada num extremo local de uma função; - Teorema de Lagrange; interpretação geométrica; - Monotonia das funções com derivada de sinal determinado num intervalo; - Cálculo e memorização da derivada das funções dadas pelas expressões $x, x^2, x^3, \frac{1}{x}$ e $\sqrt{x}$; - Cálculo da derivada de funções dadas por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ (x não nulo se $n > 1$ ímpar, $x > 0$ se n par); - Cálculo e memorização das derivadas de funções dadas por $f(x) = x^\alpha$ (α racional, $x > 0$);

	- Cálculo de derivadas de funções utilizando as regras de derivação e as derivadas de funções de referência; - Equações de retas tangentes ao gráfico de uma dada função; - Resolução de problemas envolvendo a determinação de equações de retas tangentes ao gráfico de funções reais de variável real; - Resolução de problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas e mudanças de unidades de velocidade; - Resolução de problemas envolvendo a aplicação do cálculo diferencial ao estudo de funções reais de variável real, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos.
EST11 **8 aulas**	**Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação** - Reta de mínimos quadrados de uma sequência de pontos do plano; - Amostras bivariadas; variável resposta e variável explicativa; - Nuvem de pontos de uma amostra de dados bivariados quantitativos; - Reta dos mínimos quadrados de uma amostra de dados bivariados quantitativos; - Coeficiente de correlação; - Resolução de problemas envolvendo a determinação de retas de mínimos quadrados; - Resolução de problemas envolvendo amostras de dados bivariados quantitativos e o cálculo e interpretação dos coeficientes da reta de mínimos quadrados e do coeficiente de correlação.

12.º ano

No 12.º ano, os domínios de conteúdos são sete:

- Cálculo Combinatório (CC)
- Probabilidades (PRB)
- Funções Reais de Variável Real (FRVR)
- Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI)
- Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas (FEL)
- Primitivas e Cálculo Integral (PCI)
- Números Complexos (NC)

O *Cálculo Combinatório* é a área da Matemática dedicada à realização eficiente de contagens. Começa-se por estabelecer algumas propriedades das operações sobre conjuntos e, em seguida, estudam-se progressivamente arranjos, com ou sem repetição, permutações e combinações, o que permite, em situações muito distintas, efetuar contagens de forma expedita. É igualmente introduzido o binómio de Newton e o triângulo de Pascal, deduzindo-se algumas propriedades dos coeficientes binomiais.

Após uma primeira abordagem mais restritiva elaborada no 9.º ano, pretende-se agora, no domínio *Probabilidades*, estudar de um modo mais geral a noção de probabilidade, começando por se introduzir a noção de função de probabilidade definida no conjunto das partes de um conjunto finito, da qual a lei dita de Laplace – estudada no Ensino Básico – é um caso particular, relacionado com situações de equiprobabilidade. É igualmente abordada a noção de probabilidade condicionada e de independência de acontecimentos, apresentando-se em particular o Teorema da probabilidade total.

No domínio *Funções Reais de Variável Real*, completa-se o estudo dos limites de sucessões e de funções. Continua-se ainda o estudo das funções contínuas e das funções diferenciáveis, enunciando-se, em particular, o Teorema de Weierstrass e o Teorema dos valores intermédios (ou de Bolzano-Cauchy). Relaciona-se também o sinal da derivada de segunda ordem de uma função com o sentido da concavidade do respetivo gráfico, aproveitando-se para, no contexto da cinemática do ponto, interpretar a derivada de segunda ordem das funções posição como uma aceleração. Aborda-se a questão da utilização das calculadoras gráficas, em particular para a obtenção de valores aproximados de soluções de equações envolvendo funções reais de variável real, aproveitando-se os conhecimentos adquiridos acerca do estudo analítico de funções para justificar a validade de determinados procedimentos e analisar criticamente os diversos usos que podem ser feitos deste tipo de tecnologias neste contexto.

O domínio *Trigonometria e Funções Trigonométricas*, no 12.º ano, é dedicado ao cálculo das derivadas das funções seno e cosseno, após o estabelecimento de algumas fórmulas trigonométricas. É a oportunidade ideal para se introduzir o estudo dos osciladores harmónicos, analisando-se uma equação diferencial característica que rege o respetivo comportamento e verificando-se que, em particular, uma tal equação pode ser deduzida da Lei de Hooke, desde que se admita a Relação Fundamental da Dinâmica, o que permite evidenciar o caráter de oscilador harmónico de uma mola não submetida a atrito.

No domínio *Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas* começa-se pelo estudo do cálculo de juros compostos, com o intuito de introduzir o número de Neper. Estudam-se em seguida, de forma sistemática, as propriedades da função $f(x) = a^x$ definida no conjunto dos números racionais (onde $a > 0$), argumentando-se, com determinadas passagens ao limite, e admitindo alguns resultados intuitivos, mas de demonstração mais delicada, que esta função se pode estender ao conjunto dos números reais mantendo, no essencial, as mesmas propriedades algébricas. Propõe-se depois o cálculo da derivada da função exponencial, partindo do limite $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$, que é admitido, embora se abordem algumas propriedades de aproximação sequencial da exponencial que podem ser utilizadas na respetiva justificação. As funções logarítmicas são introduzidas como funções inversas das funções exponenciais, tomadas como bijeções sobre os respetivos contradomínios, já que se demonstra tratar-se de funções injetivas. Esta abordagem permite estabelecer facilmente, a partir das propriedades conhecidas das funções exponenciais, as propriedades algébricas e analíticas das funções logarítmicas. Aborda-se ainda o cálculo de alguns limites que comparam o crescimento das funções polinomiais, exponenciais e logarítmicas e que os alunos devem conhecer.

De forma análoga ao caso dos osciladores harmónicos, também o estudo de certas equações diferenciais lineares de primeira ordem permite justificar a utilização de funções exponenciais na modelação de inúmeros fenómenos, como a evolução de algumas populações, da temperatura de determinados sistemas ou o decaimento de uma substância radioativa.

Considera-se relevante que os alunos terminem o Ensino Secundário com algumas noções, ainda que não inteiramente formalizadas, de Cálculo Integral, já que, em certo sentido, se trata de um complemento essencial do Cálculo Diferencial. Poderão dessa forma construir uma visão mais unificada e abrangente da Análise elementar. É nesse espírito que foi concebido o domínio *Primitivas e Cálculo Integral*. Após a introdução da definição de primitiva de uma função e do estudo de algumas das respetivas propriedades imediatas, é abordada a noção de integral de uma função contínua e não negativa num intervalo limitado, de forma intuitiva e visual, recorrendo à noção de área e, utilizando-se propriedades elementares admitidas para esta noção, demonstra-se o Teorema fundamental do cálculo e a fórmula de Barrow. A definição é posteriormente estendida às funções contínuas que alternam de sinal um número finito de vezes, bem como os referidos resultados fundamentais. Neste domínio são, de modo geral, estudadas as principais propriedades dos integrais definidos e analisadas algumas técnicas de primitivação e de integração.

Finalmente, no domínio *Números Complexos*, apresenta-se a motivação histórica para a introdução dos números imaginários, relacionada com a fórmula de Cardano para a resolução de equações do terceiro grau. Introduz-se em seguida o corpo dos números complexos, tendo-se optado por efetuar uma construção algébrica que consiste em munir o conjunto $\mathbb{R}^2$ da operação de adição usual e de uma multiplicação adequada. Começa-se por motivar estas definições, estabelecendo-se previamente determinadas propriedades que resultam necessariamente das características que se pretende atribuir aos números complexos, em particular a existência de um número cujo quadrado é igual a -1. Trata-se de uma construção concreta que pretende evitar algumas das reticências evidenciadas geralmente pelos alunos quanto à "verdadeira existência" dos números imaginários e que está estreitamente relacionada com o habitual conceito de "plano complexo". Após a análise das propriedades operatórias dos números complexos, é estudado em pormenor o grupo multiplicativo dos complexos de módulo 1, estabelecendo-se assim uma base sólida para a representação dos números complexos na forma trigonométrica e, posteriormente, para a radiciação complexa. É ainda estudada a representação complexa de algumas transformações do plano, como rotações, reflexões, translações e homotetias, e aproveitam-se as fórmulas de De Moivre para linearizar polinómios trigonométricos, o que permite estabelecer rapidamente diversas fórmulas de trigonometria e primitivar algumas funções.

12.º ano – Tabela de conteúdos

Domínio	Conteúdos
CC12 **18 aulas**	**Propriedades das operações sobre conjuntos** - Propriedades comutativa, associativa, de existência de elemento neutro e elemento absorvente e da idempotência da união e da interseção e propriedades distributivas da união em relação à interseção e da interseção em relação à união; - Distributividade do produto cartesiano relativamente à união. **Introdução ao cálculo combinatório** - Conjuntos equipotentes e cardinais; cardinal da união de conjuntos disjuntos; - Cardinal do produto cartesiano de conjuntos finitos; - Arranjos com repetição; - Número de subconjuntos de um conjunto de cardinal finito; - Permutações; fatorial de um número inteiro não negativo; - Arranjos sem repetição; - Número de subconjuntos de p elementos de um conjunto de cardinal n; combinações; - Resolução de problemas envolvendo cardinais de conjuntos, contagens, arranjos e combinações. **Triângulo de Pascal e Binómio de Newton** - Fórmula do binómio de Newton; - Triângulo de Pascal: definição e construção; - Resolução de problemas envolvendo o triângulo de Pascal e o binómio de Newton.
PRB12 **20 aulas**	**Espaços de probabilidade** - Probabilidade no conjunto das partes de um espaço amostral finito; espaço de probabilidades; - Acontecimento impossível, certo, elementar e composto; acontecimentos incompatíveis, acontecimentos contrários, acontecimentos equiprováveis e regra de Laplace; - Propriedades das probabilidades: probabilidade do acontecimento contrário, probabilidade da diferença e da união de acontecimentos; monotonia da probabilidade; - Resolução de problemas envolvendo a determinação de probabilidades em situações de equiprobabilidade de acontecimentos elementares; - Resolução de problemas envolvendo espaços de probabilidade e o estudo de propriedades da função de probabilidade. **Probabilidade condicionada** - Probabilidade condicionada; - Acontecimentos independentes; - Teorema da probabilidade total; - Resolução de problemas envolvendo probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e o Teorema da probabilidade total.

FRVR12 **34 aulas**	**Limites e Continuidade** - Teoremas de comparação para sucessões e teorema das sucessões enquadradas; - Teoremas de comparação envolvendo desigualdades entre funções e os respetivos limites; - Teorema das funções enquadradas; - Utilização dos teoremas de comparação e do teorema das funções enquadradas para determinar limites de funções reais de variável real; - Teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy); - Teorema de Weierstrass; - Resolução de problemas envolvendo os teoremas de comparação para o cálculo de limites de sucessões e de funções e a continuidade de funções. **Derivada de segunda ordem, extemos, sentido das concavidades e pontos de inflexão** - Derivada de segunda ordem de uma função; - Sinal da derivada de segunda ordem num ponto crítico e identificação de extremos locais; - Pontos de inflexão e concavidades do gráfico de funções duas vezes diferenciáveis; - Interpretação cinemática da derivada de segunda ordem de uma função posição: aceleração média e aceleração; unidades de medida de aceleração; - Estudo e traçados de gráficos de funções diferenciáveis; - Resolução de problemas envolvendo propriedades de funções diferenciáveis. **Aplicação do cálculo diferencial à resolução de problemas** - Resolução de problemas de otimização envolvendo funções diferenciáveis; - Resolução de problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas, acelerações médias e acelerações instantâneas e mudanças de unidades de aceleração; - Resolução de problemas envolvendo a resolução aproximada de equações da forma $f(x) = g(x)$ utilizando uma calculadora gráfica.
TRI12 **26 aulas**	**Diferenciação de funções trigonométricas** - Fórmulas trigonométricas da soma, da diferença e da duplicação; - Limite notável $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$; - Diferenciabilidade das funções seno, cosseno e tangente; - Resolução de problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções trigonométricas. **Aplicações aos osciladores harmónicos** - Osciladores harmónicos: amplitude, pulsação, período, frequência e fase; - Estudo das funções definidas analiticamente por $a\sin(bx + c) + d$, $a\cos(bx + c) + d$, $a\,\mathrm{tg}(bx + c) + d$, $(a \neq 0)$; - Os osciladores harmónicos como soluções de equações diferenciais da forma $f'' = -\omega^2 f$; relação com a segunda lei de Newton e com a lei de Hooke; - Resolução de problemas envolvendo osciladores harmónicos.

FEL12 **40 aulas**	**Juros compostos e Número de Neper** - Cálculo de juros compostos; - Resolução de problemas envolvendo juros compostos. - Sucessão de termo geral $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e relação com juros compostos; capitalização contínua de juros e definição do número de Neper. **Funções exponenciais** - Propriedades da função definida nos números racionais pela expressão $f(x) = a^x, (a > 0)$: monotonia, continuidade, limites e propriedades algébricas; - Extensão ao caso real: definição das funções exponenciais de base a e respetivas propriedades; - Função exponencial e^x e relação com o limite da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, x \in \mathbb{R}$; - Limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ e derivada da função exponencial. **Funções logarítmicas** - Função logarítmica de base $a \neq 1$ enquanto bijeção recíproca da função exponencial de base a; logaritmo decimal e logaritmo neperiano; - Monotonia, sinal, limites e propriedades algébricas dos logaritmos; - Derivadas das funções logarítmicas e da função a^x, $a > 0$; - Derivada da função x^α, α real, $x > 0$. **Limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas** - Limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^k}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$. - Resolução de problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, as respetivas propriedades algébricas e limites notáveis. **Modelos exponenciais** - A equação $f' = kf$, $k \in \mathbb{R}$, enquanto modelo para o comportamento da medida de grandezas cuja taxa de variação é aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente num dado instante (evolução de uma população, da temperatura de um sistema ou do decaimento de uma substância radioativa); - Soluções da equação $f' = kf$, $k \in \mathbb{R}$; - Resolução de problemas de aplicação, envolvendo a equação $f' = kf$, $k \in \mathbb{R}$.
PCI12 **20 aulas**	**Primitivas** - Primitiva de uma função num intervalo; família das primitivas de uma dada função num intervalo; - Primitivas de funções de referência: 1, x^α $(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\})$, $\frac{1}{x}$, e^x, $\sin x$ e $\cos x$; - Linearidade da primitivação; - Primitivas de funções da forma $u'(x)f\big(u(x)\big)$. **Cálculo Integral** - Definição intuitiva da noção de integral de funções contínuas não negativas ou não positivas num intervalo limitado e fechado; extensão a funções contínuas que alternam de sinal um número finito de vezes; - Origem histórica do símbolo de integral;

	- Teorema fundamental do cálculo integral e Fórmula de Barrow; - Linearidade e monotonia do integral definido; aditividade do integral em relação ao domínio. **Resolução de problemas** - Resolução de problemas envolvendo o cálculo de medidas de área de regiões do plano; - Resolução de problemas envolvendo a primitivação e a integração de funções contínuas; - Resolução de problemas envolvendo funções posição, velocidade e aceleração e a primitivação e integração de funções.
NC12 **26 aulas**	**Introdução aos números complexos** - A fórmula de Cardano e a origem histórica dos números complexos; - Motivação da definição dos números complexos e das operações de soma e produto de números complexos; - Propriedades das operações $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ e $(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ definidas em $\mathbb{R}^2$: associatividade, comutatividade, distributividade de $\times$ relativamente a $+$ e respetivos elementos neutros; definição do corpo dos números complexos $\mathbb{C}$, enquanto $\mathbb{R}^2$ munido destas operações; - $\mathbb{R}$ enquanto subconjunto de $\mathbb{C}$; a unidade imaginária $i=(0,1)$; - Representação dos números complexos na forma $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$. Parte real e parte imaginária dos números complexos; o plano complexo e os eixos real e imaginário; ponto afixo de um número complexo. **Complexo conjugado e módulo dos números complexos** - Conjugado de um número complexo; propriedades algébricas e geométricas; expressão da parte real e da parte imaginária de um número complexo z em função de z e $\bar{z}$; - Módulo de um número complexo; propriedades algébricas e geométricas. **Quociente de números complexos** - Inverso de um número complexo não nulo e quociente de números complexos. **Exponencial complexa e forma trigonométrica dos números complexos** - Complexos de módulo 1; a exponencial complexa $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$, e respetivas propriedades algébricas e geométricas; argumento de um número complexo e representação trigonométrica dos números complexos; - Fórmulas de De Moivre. **Raízes n-ésimas de números complexos** - Soluções das equações da forma $z^n=w$, $n\in\mathbb{N}$ e $w\in\mathbb{C}$; raízes em $\mathbb{C}$ de polinómios do segundo grau de coeficientes reais. **Resolução de problemas** - Resolução de problemas envolvendo propriedades algébricas e geométricas dos números complexos, a respetiva forma trigonométrica, raízes n-ésimas de números complexos e as fórmulas de De Moivre.

5. NÍVEIS DE DESEMPENHO

Os descritores especificados na tabela seguinte, que dizem respeito a propriedades que os alunos devem **reconhecer**, a **procedimentos que devem efetuar** ou a **problemas que devem resolver**, foram assinalados, nas Metas Curriculares, com o símbolo «+». Para estes descritores especificaram-se, no Caderno de Apoio, diferentes níveis de desempenho, materializados em exemplos de complexidade variada que poderão ser propostos aos alunos. Os exemplos que no Caderno de Apoio se encontram assinalados com um ou dois asteriscos correspondem a desempenhos progressivamente mais avançados que não serão exigíveis à totalidade dos alunos, estando os restantes associados a um desempenho considerado regular. Pretende-se assim estabelecer, para estes descritores, um referencial que permita ao professor apreender o grau de exigência requerido.

Ano de escolaridade	Descritores
10.º ano	**LTC10** 1.16, 2.19, 3.1, 3.2. **ALG10** 1.1, 1.2, 1.11, 2.1, 2.2, 2.4, 2.5, 3.1, 4.2, 4.5, 4.11, 5.1, 5.2, 5.3. **GA10** 1.2, 1.4, 1.10, 1.11, 2.1, 3.5, 3.6, 4.1, 6.1, 6.2, 6.3, 7.5, 7.6, 10.1, 11.1, 11.2. **FRVR10** 1.11, 2.6, 2.7, 2.8, 2.10, 4.8, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4. **EST10** 3.2, 3.3, 5.1, 5.2.
11.º ano	**TRI11** 1.6, 8.1, 9.1, 9.2, 9.3, 9.4. **GA11** 4.1, 4.2, 4.3, 4.4. **SUC11** 3.3, 5.2, 5.3, 6.3, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4. **FRVR11** 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 7.13, 9.1, 9.2, 9.3. **EST11** 1.3, 2.1, 2.2, 2.3.
12.º ano	**CC12** 2.4, 2.5, 2.8, 2.10, 3.3, 3.4, 4.1, 4.2, 4.3. **PRB12** 3.1, 3.2, 3.3. **FRVR12** 3.1 , 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5. **TRI12** 1.1, 1.2, 2.1, 4.1, 4.2. **FEL12** 4.3, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4. **PCI12** 1.7, 3.1, 3.2, 3.3. **NC12** 1.3, 4.3, 5.1, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6.

Por outro lado, alguns descritores (LTC10 2.9; ALG10 1.4; GA10 1.9, 8.3; TRI11 1.4; GA11 2.8, 2.9, 3.8; SUC11 6.8, 6.29, 6.30; FRVR11 7.8, 7.11; CC12 2.3; FRVR12 4.3, 4.4; FEL12 1.4, 2.1, 2.2, 2.3, 3.11, 4.1), relativos a propriedades que os alunos devem provar, encontram-se igualmente assinalados, nas Metas Curriculares, com o símbolo «+». Entende-se, neste caso, que embora todos os alunos devam conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos. Finalmente, nos domínios LTC10, ALG10, SUC11, FRVR11, FRVR12, CC12, PRB12 e FEL12 encontram-se assinalados com o símbolo «#» alguns descritores relativos a conjuntos de demonstrações muito semelhantes entre si, ficando ao critério do professor quais devem ser tratadas como exemplo.

6. INDICAÇÕES METODOLÓGICAS

Tendo em consideração, tal como para os níveis de desempenho, as circunstâncias de ensino (e, de modo muito particular, as características das turmas e dos alunos), as escolas e os professores devem decidir quais as metodologias e os recursos mais adequados para auxiliar os seus alunos a alcançar os desempenhos definidos nas Metas Curriculares.

A experiência acumulada das escolas e dos professores constitui um elemento fundamental no sucesso de qualquer projeto educativo, não se pretendendo, por isso, espartilhar e diminuir a sua liberdade pedagógica nem condicionar a sua prática letiva. Pelo contrário, o presente Programa reconhece e valoriza a autonomia das escolas e dos professores, não impondo portanto metodologias específicas.

Sem constituir ingerência no seu trabalho, nota-se, contudo, que a aprendizagem matemática é estruturada em patamares de crescente complexidade, pelo que na prática letiva deverá ter-se em atenção a progressão dos alunos, sendo muito importante proceder-se a revisões frequentes de conteúdos já lecionados com vista à sua consolidação, incluindo alguns já conhecidos do Ensino Básico.

Utilização da tecnologia

As salas de aulas estão, em geral, dotadas de determinados equipamentos que podem constituir uma mais-valia para a prática letiva. A tecnologia no Ensino Secundário deve, portanto, ser aproveitada para ajudar os alunos a compreender certos conteúdos e relações matemáticas e para o exercício de certos procedimentos; essa utilização deve, no entanto, ser criteriosa, já que, caso contrário, pode condicionar e comprometer gravemente a aprendizagem e a avaliação.

Os professores e os alunos têm ao seu dispor, por exemplo, um vasto conjunto de recursos que facilitam o cálculo, as representações geométricas e a representação gráfica de funções, mas importa que os alunos adquiram capacidade crítica para reconhecer as situações em que a tecnologia não permite só por si justificar a adequação dos resultados encontradas ao problema proposto ou ilustrar devidamente os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos.

A utilização da tecnologia não pode, pois, substituir a compreensão conceptual, a proficiência no cálculo e a capacidade de resolver problemas. Assim, os alunos devem dominar procedimentos como operar com polinómios, efetuar representações de gráficos de funções, resolver equações, calcular limites e derivadas sem necessitarem de utilizar recursos tecnológicos (calculadoras, computadores, etc.) que substituam algumas das capacidades matemáticas inerentes a esses procedimentos. Apenas a memorização e a compreensão cumulativa de conceitos, técnicas e relações matemáticas permitem alcançar conhecimentos progressivamente mais complexos e resolver problemas progressivamente mais exigentes.

Em particular o professor deve alertar os alunos para as limitações das calculadoras e computadores, sublinhando sempre a importância de relacionar quer as representações gráficas observadas, quer os valores encontrados, com o conhecimento teórico que permite atribuir o devido significado a essas representações e valores. É um erro grave, por exemplo, pensar que a simples consideração de resultados obtidos através de uma calculadora permite verificar se um número é irracional (já que esta apenas apresenta uma aproximação de um dado número como dízima finita até determinada ordem), concluir que uma função definida numa infinidade de pontos é monótona (teria de calcular-se o valor da função em cada ponto do respetivo domínio, e não apenas num subconjunto finito do mesmo, que é o que na realidade qualquer calculadora faz, aliás em geral apenas com determinado grau de aproximação), se uma sucessão é convergente, ou, de maneira geral, deduzir qualquer propriedade do gráfico de uma função que necessite do conhecimento dos valores da função numa infinidade de pontos do domínio (continuidade, diferenciabilidade, limites, assíntotas, resultados positivos de concavidade e monotonia, extremos, etc.). No entanto, o conhecimento prévio de propriedades analíticas de uma função ou funções pode, em muitos casos, permitir uma utilização adequada das potencialidades da calculadora para visualizar partes particularmente interessantes dos respetivos gráficos, obter valores aproximados de soluções de equações, de extremos e pontos de extremo, etc. As propriedades que, em cada caso, será necessário estabelecer antes de se poderem extrair conclusões justificadas a partir do que se observa na calculadora ou computador dependem, evidentemente, da questão que se pretende resolver, podendo mesmo resumir-se, em certos casos, à simples continuidade; apenas em casos em que o conhecimento de um número finito de pontos do gráfico permite extrair alguma conclusão segura (situações de inexistência de monotonia ou de sentido determinado de concavidade em determinado intervalo, por exemplo) é possível praticamente prescindir de um conhecimento prévio de alguma propriedade analítica da função em estudo.

Como é evidente, a calculadora gráfica pode sempre ser utilizada para ilustrar propriedades de gráficos de funções adequadamente escolhidas pelo professor, ou para que o aluno teste o resultado de variações de parâmetros em classes de funções de que já tenha algum conhecimento teórico e, de maneira geral, para uma abordagem experimental ao estudo de funções, desde que devidamente controlada e acompanhada de uma análise crítica da validade de conjeturas que essas experiências possam induzir.

Neste sentido, considera-se que no Ensino Secundário a tecnologia, e mais especificamente a calculadora gráfica, deve ser utilizada em sala de aula e consequentemente em certos instrumentos de avaliação (na resolução de problemas requerendo cálculos de valores aproximados de soluções de determinado tipo de equações ou de funções envolvendo, por exemplo, razões trigonométricas, logaritmos, ou exponenciais) mas que se deve evitar a sua utilização em outras provas de avaliação em que os conteúdos e capacidades envolvidas claramente o não justifiquem ou mesmo o desaconselhem.

7. AVALIAÇÃO

O Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho, alterado pelo Decreto-Lei n.º 91/2013 de 10 de julho, estabelece os princípios orientadores da organização, da gestão e do desenvolvimento dos currículos do Ensino Básico e do Ensino Secundário, bem como da avaliação dos conhecimentos adquiridos e das capacidades desenvolvidas pelos alunos do Ensino Básico ministradas em estabelecimentos escolares públicos, particulares e cooperativos.

Os conhecimentos a adquirir e as capacidades a desenvolver pelos alunos do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática A, têm como referência o programa dessa disciplina e as respetivas Metas Curriculares definidas por ano de escolaridade. É este documento que permitirá cumprir a função de regulação do percurso de aprendizagem que a avaliação do desempenho dos alunos deverá assumir.

Os resultados dos processos avaliativos (de caráter nacional, de escola, de turma e de aluno) devem contribuir para a orientação cientifico-pedagógica do ensino, para que se possam superar, em tempo útil e de modo apropriado, dificuldades de aprendizagem identificadas e, simultaneamente, reforçar os progressos verificados. Todos estes propósitos devem ser concretizados recorrendo a uma avaliação diversificada e frequente, contribuindo para que os alunos adquiram uma maior consciência do seu nível de conhecimentos e valorizem a avaliação como um processo promotor de melhores desempenhos.

A classificação resultante da avaliação interna no final de cada período, guiada pelos critérios de avaliação da disciplina de Matemática A definidos em cada agrupamento de escolas/escola não agrupada, deverá traduzir com fidelidade o nível de desempenho do aluno no que se refere ao cumprimento do programa e das respetivas metas curriculares.

8. BIBLIOGRAFIA

1. Alpuim, T., *Estatística*, Apontamentos de Apoio à disciplina de Estatística da Licenciatura em Matemática e Matemática Aplicada, FCUL, 2012.
2. Alpuim, T., *Probabilidade*, Apontamentos de Apoio à disciplina de Probabilidade da Licenciatura em Matemática e Matemática Aplicada, FCUL, 2008.
3. Anderson, J.R. & Schunn, C., Implications of the ACT-R learning theory: No magic bullets, Advances in instructional psychology, *Educational design and cognitive science* (pp. 1-33), Mahwah, Lawrence Erlbaum, 2000.
4. Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M.C., *Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática*, Ministério da Educação e Ciência, Direção Geral da Educação, 2013.
5. Common Core State Standards Initiative, *Common Core State Standards for Mathematics*, Common Core State Standards Initiative, Preparing America's students for college & Career, 2011.
6. Department for Education and Employment, *Mathematics – The National Curriculum for England*, Department for Education and Employment, London, 1999.
7. Fayol, M., Toom, A, Bivar, A., Santos, C., & Aires, L.M., *Fazer contas ajuda a pensar?*, Fundação Francisco Manuel dos Santos, Porto, Porto Editora, 2010.
8. Ferreira, J.C., *Introdução à Análise Matemática*, Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2008.
9. Figueira, M., *Fundamentos de Análise Infinitesimal*, Textos de Matemática, volume 5, 2ª edição, Lisboa, DM-FCUL, 1997.
10. Geary, D.C., Berch, D.B., Ooykin, W., Embretson, S., Reyna, V., & Siegler, R., Learning mathematics: Findings from The National (United States) Mathematics Advisory Panel, in N. Crato (Org.), *Ensino da Matemática: Questões e soluções*, (pp. 175-221), Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2008.
11. Geary, D.C., Development of mathematical understanding, in D. Kuhl & R.S. Siegler (Vol. Eds.), *Cognition, perception, and language,* Vol. 2., W. Damon (Gen. Ed.), *Handbook of child psychology*, 6th ed., (pp. 777-810), New York, John Wiley & Sons, 2006.
12. Guerreiro, J.S., *Curso de Análise Matemática*, Lisboa, Escolar Editora, 2008.
13. International Association for the Evaluation of Educational Achievement, Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS Advanced Assessment Frameworks, International Association for the Evaluation of Educational Achievement, 2008.
14. Kaminsky, J., Sloutsky, V. & Heckler, A., The advantage of abstract examples in learning math, *Education Forum*, 320 (pp. 454-455), 2008.
15. Karpicke, J.D. & Roediger, H.L., The critical importance of retrieval for learning, *Science*, 319, (pp. 966-968), 2008.
16. Katz, V.J., *História da Matemática*, Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.
17. Kirschener, P. & Merriënboer, J., Do learners really know best? Urban legends in education, *Educational Psychologist, 48* (3), (pp. 169-183), 2013.

18. Kirschener, P., Sweller, J. & Clark, R., Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching, *Educational Psychologist,* 41 (2), (pp. 75-86), 2006.

19. Loura, L.C.C. & Martins, M.E.G., *Introdução à Probabilidade*, Projecto REANIMAT, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.

20. Loura, L.C.C. & Martins, M.E.G., *Cálculo Combinatório*, Projecto REANIMAT, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.

21. Machado, A., Abrantes, P., &Carvalho, R.F., *Matemática: 12.º ano: M12*, Lisboa, Texto Editora, 1986.

22. Machado A., *Iniciação à Lógica Matemática 10.º ano*, Projecto REANIMAT, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.

23. Machado A., *Geometria 10.º ano*, Projecto REANIMAT, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.

24. Machado A., *Geometria 11.º ano*, Projecto REANIMAT, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.

25. Machado A., *Números Complexos 12.º ano*, Projecto REANIMAT, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, 2004.

26. Ministère de la Communauté Française*, Compétences Terminales et savoirs requis en Mathématiques, Humanités générales et technologiques,* Ministère de la Communauté Française, Bélgica, 1999.

27. Ministère de L'Éducation Nationale Mathématiques, classe de seconde, *Bulletin Officiel*, n.º 30, Ministère de L'Éducation Nationale, France, 2009.

28. Ministère de L'Éducation Nationale Mathématiques, cycle terminal de la série scientifique, classe de Première, *Bulletin Officiel Spécial*, n.º 9, Ministère de L'Éducation Nationale, France, 2010.

29. Ministère de L'Éducation Nationale, Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques, Classe terminale de la série scientifique, *Bulletin Officiel Spécial*, n.º 8, Ministère de L'Éducation Nationale, França, 2011.

30. Ministero dell'Instuzione, dell'Università e della Ricerca*, Curricula Liceo Scientifico – Indicazioni,* Ministero dell'Instuzione, dell'Università e della Ricerca, Itália, 2010.

    (http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010///indicazioni_nuovo_impaginato/_Liceo%20scientifico.pdf)

31. Murteira, B. & Ribeiro, C., *Introdução à Estatística*, Lisboa, Escolar Editora, 2007.

32. National Mathematics Advisory Panel, *Foundations for success: Final Report*, U.S. Department of Education, 2008.

33. Paas, F., Renkl, A., & Sweller, J., Cognitive load theory: Instructional implications of the interaction between information structures and cognitive architecture, *Instructional Science, 32*, 1-8, 2004.

34. Pestana, D., *Introdução à Probabilidade e Estatística*, Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2008.

35. Rittle-Johnson, B., Siegler, R.S. & Alibali, M.W., Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process, *Journal of Educational Psychology*, 93, (pp. 346-362), 2001.

36. Roediger, H.L., Karpicke, J.D., Test-enhanced learning: Taking memory tests improves long-term retention, *Psychological Science*, 17, (pp. 249-255), 2006.

37. Roediger, H.L., Karpicke, J.D., The power of testing memory: Basic research and implications for educational practice, *Perspectives on Psychological Science*, 1, (pp. 181-210), 2006.

38. Rohder, D. & Taylor, K., The effects of overlearning and distributed practice on the retention of mathematics knowledge, *Applied Cognitive Psychology*, 20, 2006.

39. Sanchez L., *Iniciação ao estudo das funções reais de variável real, 10.º ano, 11.º ano e 12.º ano*, Projecto REANIMAT, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.

40. Sarrico, C., *Análise Matemática – Leituras e exercícios*, Projectos Ciência, Lisboa, Gradiva, 1997.

41. Sebastião e Silva, J., *Compêndio de Matemática* (5 volumes), GEP, MEC, 1975-78.

42. Sebastião e Silva, J., *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (3 volumes), GEP-MEC, 1975-77.

43. Silva, J.C., Fonseca, C.M., Fonseca, M.G., Lopes, I. & Martins, A., *Programa de Matemática A, 10.º ano*, Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, 2001.

44. Silva, J.C. , Fonseca, C.M., Fonseca, M.G., Lopes, I. & Martins, A., *Programa de Matemática A, 11.º ano*, Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, 2002.

45. Silva, J.C. , Fonseca, C.M., Fonseca, M.G., Lopes, I. & Martins, A., *Programa de Matemática A, 12.º ano*, Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, Lisboa, 2002.

46. Struik, D., *História concisa das Matemáticas*, Colecção Ciência Aberta, Lisboa, Gradiva, 1997.

47. Sweller, J., Clark, R. & Kirschener, P., Teaching general problem-solving skills is not a substitute for, or a viable addition to, teaching mathematics (pp. 1303-1304), *Doceamus*, 57 (10), 2010.

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares
Matemática A

Ensino Secundário

Cursos Científico-Humanísticos de
Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira, Luísa Loura, Maria Clementina Timóteo

METAS CURRICULARES PARA O ENSINO SECUNDÁRIO
MATEMÁTICA A

O presente documento descreve o conjunto das metas curriculares da disciplina de Matemática A que os alunos devem atingir durante o Ensino Secundário. Os objetivos gerais, completados por descritores mais precisos, encontram-se organizados em cada ano de escolaridade, por domínios e subdomínios, segundo a seguinte estrutura:

Domínio

Subdomínio

1. *Objetivo geral*
    1. Descritor
    2. Descritor

    …………

Os diferentes descritores estão redigidos de forma objetiva, numa linguagem rigorosa destinada ao professor, devendo este selecionar uma estratégia de ensino adequada à respetiva concretização, incluindo uma adaptação da linguagem, sempre que seja necessária. O significado preciso de certos verbos com que se iniciam alguns descritores («identificar», «designar», «referir», «representar», «reconhecer», «saber», «provar», «demonstrar», «justificar») encontra-se definido no parágrafo intitulado «Leitura das Metas Curriculares».

A prática letiva obriga, naturalmente, a frequentes revisões de objetivos gerais e descritores correspondentes a anos de escolaridade anteriores. Estes pré-requisitos não se encontram explicitados no texto, devendo o professor identificá-los consoante a necessidade, a pertinência e as características próprias de cada grupo de alunos.

Optou-se por formar uma sequência de objetivos gerais e de descritores, dentro de cada subdomínio, que corresponde a uma progressão de ensino adequada, podendo no entanto optar-se por alternativas coerentes que cumpram os mesmos objetivos e respetivos descritores. De um modo mais geral, as Metas Curriculares não devem ser entendidas como um sumário sequencial dos conteúdos a lecionar, podendo em particular ser proveitoso o tratamento em simultâneo de descritores pertencentes a objetivos gerais ou mesmo a domínios distintos. Existem mesmo circunstâncias em que se torna necessário um tal procedimento; com efeito, a arrumação dos tópicos por domínios temáticos, e simultaneamente respeitando dentro de cada domínio uma determinada progressão, a isso pode levar, dada a própria natureza e interligação dos conteúdos e capacidades matemáticas.

São também disponibilizados aos professores Cadernos de Apoio às presentes metas curriculares (um por ano de escolaridade) contendo, em alguns casos, suportes teóricos aos objetivos e descritores, bem como exemplos de concretização de alguns deles. Nesses documentos, os níveis de desempenho esperados foram objeto de especificação.

Leitura das Metas Curriculares

«Identificar»/«Designar»/«Referir»/ O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.

«Reconhecer»: O aluno deve apresentar uma argumentação coerente, ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.

«Saber»: O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

«Provar»/«Demonstrar»: O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.

«Justificar»: O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.

Certos descritores encontram-se assinalados com o símbolo «**+**».

- Relativamente aos que correspondem a propriedades que os alunos devem reconhecer, a procedimentos que devem efetuar ou a problemas que devem resolver, especificaram-se nos Cadernos de Apoio diferentes níveis de desempenho.
- Quanto aos relativos a propriedades que os alunos devem provar, entende-se que, embora todos devam conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, a elaboração da respetiva demonstração é facultativa, não sendo portanto exigível aos alunos.

Por outro lado, certos grupos de descritores de um mesmo objetivo geral, relativos a conjuntos de demonstrações muito semelhantes entre si, encontram-se assinalados com o símbolo «**#**», ficando ao critério do professor quais devem ser tratadas como exemplo.

10.º ANO

Lógica e Teoria dos Conjuntos LTC10

Introdução à Lógica bivalente e à Teoria dos conjuntos

1. *Operar com proposições*

1. Designar por «proposição» toda a expressão p suscetível de ser «verdadeira» ou «falsa» e designar estes atributos por «valores lógicos».
2. Saber que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa e designar esta propriedade por «Princípio de não contradição».
3. Saber, dadas proposições p e q, que «p é equivalente a q» é uma proposição, designada por «equivalência entre p e q», que é verdadeira se e somente se p e q tiverem o mesmo valor lógico e representá-la também por «$p \Leftrightarrow q$».
4. Saber, dada uma proposição p, que «não p» é uma proposição, designada por «negação de p», que é verdadeira se p for falsa e é falsa se p for verdadeira e representá-la também por «$\sim p$».
5. Justificar, dada uma proposição p, que $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$, designando esta propriedade por «lei da dupla negação».
6. Saber, dadas proposições p e q, que «p e q» é uma proposição, designada por «conjunção de p e q», que é verdadeira se e somente se p e q forem simultaneamente verdadeiras, e representá-la também por «$p \wedge q$».
7. Saber, dadas proposições p e q, que «p ou q» é uma proposição, designada por «disjunção de p e q», que é falsa se e somente se p e q forem simultaneamente falsas, representá-la também por «$p \vee q$» e justificar que $p \vee \sim p$ é uma proposição verdadeira, designando esta propriedade por «Princípio do terceiro excluído».
8. Saber, dadas proposições p e q, que «p implica q» é uma proposição, designada por «implicação entre p e q», que é falsa se e somente se p for verdadeira e q for falsa, representá-la também por «$p \Rightarrow q$», designar p por «antecedente» e q por «consequente» da implicação e reconhecer, dada uma proposição r, que se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$ então $p \Rightarrow r$.
9. Saber que, por convenção, em qualquer sequência de operações lógicas, a menos de utilização de parênteses, se respeitam as seguintes prioridades: negação; conjunção e disjunção; implicação e equivalência.
10. #Provar, dadas proposições p e q, que a proposição $\sim(p \Rightarrow q)$ é equivalente à proposição $p \wedge \sim q$.
11. #Provar, dadas proposições p e q, que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira se e somente se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ forem ambas proposições verdadeiras e designar esta propriedade por «princípio da dupla implicação».
12. #Provar, dada uma proposição p e representando por V (respetivamente F) uma qualquer proposição verdadeira (respetivamente falsa), que $p \wedge V \Leftrightarrow p$, $p \vee V \Leftrightarrow V$, $p \vee F \Leftrightarrow p$ e $p \wedge F \Leftrightarrow F$.
13. #Provar, dadas proposições p e q, que $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ e que $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ e designar estas equivalências por «Primeiras Leis de De Morgan».

14. #Provar, dadas proposições p, q e r, que $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$, $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ e que $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$, bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos «$\wedge$» e «$\vee$», e designá-las respetivamente por «associatividade», «comutatividade» e «distributividade».
15. #Provar, dadas duas proposições p e q, que a proposição $p \Rightarrow q$ é equivalente à proposição $\sim q \Rightarrow \sim p$, designar esta última implicação por «implicação contrarrecíproca da implicação $p \Rightarrow q$».
16. +Simplificar expressões envolvendo operações com proposições, substituindo-as por proposições equivalentes envolvendo menos símbolos, e determinar o respetivo valor lógico sempre que possível.

2. *Relacionar condições e conjuntos*

1. Designar por «expressão proposicional» ou por «condição» uma expressão $p(x)$ envolvendo uma variável x tal que, substituindo x por um objeto a, se obtém uma proposição $p(a)$.
2. Saber, dada uma condição $p(x)$, que «qualquer que seja x, $p(x)$» é uma proposição que é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira sempre que se substitui x em $p(x)$ por um objeto arbitrário, representá-la por «$\forall x, p(x)$», e designar o símbolo «$\forall$» por «quantificador universal».
3. Identificar uma condição $p(x)$ como «universal» se $\forall x, p(x)$ for uma proposição verdadeira e reconhecer que a disjunção de qualquer condição com uma condição universal é uma condição universal.
4. Saber, dada uma condição $p(x)$, que «existe x tal que $p(x)$» é uma proposição que é verdadeira se e somente se, para pelo menos um objeto a, $p(a)$ for verdadeira, representá-la por «$\exists x: p(x)$» e designar o símbolo «$\exists$» por «quantificador existencial».
5. Identificar uma condição $p(x)$ como «possível» se $\exists x: p(x)$ for uma proposição verdadeira, como «impossível» se não for possível e reconhecer que a disjunção de qualquer condição com uma condição possível é uma condição possível e a conjunção de qualquer condição com uma condição impossível é uma condição impossível.
6. Saber, dada uma condição $p(x)$, que a negação da proposição $\forall x, p(x)$ é equivalente à proposição $\exists x: \sim p(x)$, que a negação da proposição $\exists x: p(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \sim p(x)$, designar estas propriedades por «Segundas Leis de De Morgan», reconhecendo-as informalmente em exemplos, e justificar que a negação de uma condição universal é uma condição impossível e vice-versa.
7. Representar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U, a proposição $\forall x, x \in U \Rightarrow p(x)$ por «$\forall x \in U, p(x)$», e, no caso de ser verdadeira, designar $p(x)$ por «condição universal em U».
8. Representar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U, a proposição $\exists x: x \in U \wedge p(x)$ por «$\exists x \in U: p(x)$», no caso de ser verdadeira designar $p(x)$ por «condição possível em U» e, no caso contrário, por «condição impossível em U».
9. +Reconhecer, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U, que a negação da proposição $\forall x \in U,\ p(x)$ é equivalente à proposição $\exists\, x \in U: \sim p(x)$, que a negação da proposição $\exists\, x \in U: p(x)$ é equivalente à proposição $\forall x \in U, \sim p(x)$ e designar um elemento $a \in U$ tal que $\sim p(a)$ como um «contraexemplo» para a proposição $\forall x \in U,\ p(x)$.

10. Representar, dada uma condição $p(x)$, por «$\{x : p(x)\}$» um conjunto A tal que $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$, designando a igualdade $A = \{x : p(x)\}$ por «definição em compreensão do conjunto A pela condição $p(x)$».
11. Saber, dados conjuntos A e B, que $A = B$ se e somente se $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$.
12. Designar, dado um objeto a e um conjunto A, a por «elemento de A» quando $a \in A$, dados objetos $a_1, \dots, a_k$ ($k \in \mathbb{N}$), representar por «$\{a_1, \dots, a_k\}$» o conjunto A cujos elementos são exatamente $a_1, \dots, a_k$ e designar a igualdade $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ por «definição em extensão do conjunto A de elementos $a_1, \dots, a_k$».
13. Identificar, dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U, o conjunto $\{x : x \in U \wedge p(x)\}$ como «conjunto definido por $p(x)$ em U» (ou «conjunto-solução de $p(x)$ em U») e representá-lo também por «$\{x \in U : p(x)\}$».
14. Identificar, dados conjuntos A e B, o «conjunto união (ou reunião) de A e B» e o «conjunto interseção de A e B» respetivamente como $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ e $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.
15. Identificar, dados conjuntos A e B, A como estando «contido em B» («$A \subset B$») quando $\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$ e, nesse caso, designar A por «subconjunto de B» ou por «uma parte de B».
16. Designar, dados conjuntos A e B, por «diferença entre A e B» o conjunto $\{x \in A : x \notin B\}$ e representá-lo por $A \backslash B$ ou simplesmente por $\bar{B}$ quando $B \subset A$ e esta notação não for ambígua, designando-o então por «complementar de B em A».
17. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a proposição $\forall x, p(x) \Leftrightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x,\ (p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \Rightarrow p(x))$ e designar uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por dupla implicação» da primeira.
18. Reconhecer, dados conjuntos A e B, que $A = B$ se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$, e designar esta propriedade por «princípio da dupla inclusão».
19. +Reconhecer, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a negação da proposição «$\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$» é equivalente à proposição «$\exists x: p(x) \wedge \sim q(x)$», isto é, que essa proposição é falsa se e somente se existir a tal que $p(a)$ é verdadeira e $q(a)$ é falsa.
20. Justificar, dadas condições $p(x)$ e $q(x)$, que a proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$, designar a segunda proposição por «contrarrecíproco» da primeira e uma demonstração da segunda proposição por «demonstração por contrarrecíproco» da primeira.

3. *Resolver problemas*

   1. +Resolver problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições.
   2. +Resolver problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos.

Radicais

1. *Definir e efetuar operações com radicais*

1. +Reconhecer, dados dois números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, que se $a < b$ então $a^n < b^n$.
2. +Reconhecer, dados dois números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ par, que se $0 \leq a < b$ então $0 \leq a^n < b^n$ e se $a < b \leq 0$ então $a^n > b^n \geq 0$.
3. Saber, dado um número real a e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, que existe um número real b tal que $b^n = a$, provar que é único, designá-lo por «raiz índice n de a» e representá-lo por «$\sqrt[n]{a}$».
4. +Saber, dado um número real positivo a e um número $n \in \mathbb{N}$ par, que existe um número real positivo b tal que $b^n = a$, provar que $(-b)^n = a$ e que não existe, para além de b e de $-b$, qualquer outra solução da equação $x^n = a$, designar b por «raiz índice n de a» e representá-lo por «$\sqrt[n]{a}$».
5. Justificar, dado um número natural n, que 0 é o único número real cuja potência de expoente n é igual a 0 e, por esta razão, representá-lo também por «$\sqrt[n]{0}$» («raiz índice n de 0»).
6. #Provar, dados números reais não negativos a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ par, que $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ e reconhecer que, para $m \in \mathbb{N}$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.
7. #Provar, dados números reais a e b e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar, que $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ e reconhecer que, para $m \in \mathbb{N}$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.
8. #Provar, dados números reais a e b (respetivamente números reais a e b não negativos), $b \neq 0$, e um número $n \in \mathbb{N}$ ímpar (respetivamente um número $n \in \mathbb{N}$ par), que $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ e justificar que para $m \in \mathbb{N}$, $\left(\sqrt[n]{b}\right)^{-m} = \sqrt[n]{b^{-m}}$.
9. #Provar, dados números naturais n e m (respetivamente números naturais ímpares n e m) e um número real não negativo a (respetivamente um número real a), que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.
10. Designar também por «fração» a representação «$\frac{a}{b}$» do quociente entre números reais a e b (com $b \neq 0$), a e b, neste contexto, respetivamente por «numerador» e «denominador» e identificar duas frações como «equivalentes» quando representam o mesmo número.
11. +Racionalizar denominadores da forma $a\sqrt[n]{b}$, ou $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ (a e c números inteiros, b, d, n números naturais, $n > 1$).

Potências de expoente racional

2. *Definir e efetuar operações com potências de expoente racional*

   1. +Reconhecer, dado um número real não negativo a e um número racional não negativo q ($q \neq 0$ se $a = 0$), $q = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ (sendo m, n, m' e n' números inteiros, $m, m' \geq 0$ e $n, n' \geq 2$), que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$.
   2. +Identificar, dado um número real não negativo a e um número racional não negativo $q = \frac{m}{n}$ (m e n números inteiros, $m \geq 0$ e $n \geq 2$), $q \neq 0$ se $a = 0$, a «potência de base a e de expoente q», a^q , como $\sqrt[n]{a^m}$, reconhecendo que este número não depende da fração escolhida para representar q, e que esta definição é a única possível por forma a estender a propriedade $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ a expoentes racionais positivos.
   3. Identificar, dado um número real positivo a e um número racional positivo q, a «potência de base a e de expoente $-q$», a^{-q}, como $\frac{1}{a^q}$, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a propriedade $a^b \times a^c = a^{b+c}$ a expoentes racionais.
   4. +Reconhecer que as propriedades algébricas previamente estudadas das potências de expoente inteiro (relativas ao produto e quociente de potências com a mesma base, produto e quociente de potências com o mesmo expoente e potência de potência) podem ser estendidas às potências de expoente racional.
   5. +Simplificar expressões envolvendo radicais e potências.

3. *Resolver problemas*

   1. +Resolver problemas envolvendo operações com radicais e com potências.

Divisão inteira de polinómios

4. *Efetuar operações com polinómios*

   1. Designar um polinómio P com apenas uma variável x por «$P(x)$».
   2. +Reconhecer, dados polinómios não nulos $A(x)$ e $B(x)$, que o grau do polinómio $A(x)B(x)$ é igual à soma dos graus de $A(x)$ e de $B(x)$.
   3. Saber, dados polinómios $A(x)$ e $B(x)$, $B(x)$ não nulo, que existem dois únicos polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que $R(x)$ ou é o polinómio nulo ou tem grau inferior ao grau de $B(x)$ e $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$, e designar, neste contexto, $A(x)$ por «polinómio dividendo», $B(x)$ por «polinómio divisor», $Q(x)$ por «polinómio quociente» e $R(x)$ por «polinómio resto» da «divisão inteira» (ou «divisão euclidiana») de $A(x)$ por $B(x)$.
   4. Determinar, dados polinómios $A(x)$ e $B(x)$, $B(x)$ não nulo, as formas reduzidas dos polinómios quociente e resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.
   5. +Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ e um número $a \in \mathbb{R}$, que aplicando a «regra de Ruffini» se obtém o quociente e o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - a$.
   6. Provar, dado um polinómio $P(x)$ e um número $a \in \mathbb{R}$, que o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$ e designar esta propriedade por «Teorema do Resto».

7. Designar, dado um polinómio $P(x)$, por «raiz do polinómio» (ou «zero do polinómio») qualquer número real a tal que $P(a) = 0$.
8. Identificar um polinómio $P(x)$ como «divisível» por um polinómio $Q(x)$ não nulo se o resto da divisão euclidiana de $P(x)$ por $Q(x)$ é nulo.
9. Provar, dado um polinómio $P(x)$ de grau $n \in \mathbb{N}$ e um número real a, que a é uma raiz de $P(x)$, se e somente se $P(x)$ for divisível por $x - a$ e que, nesse caso, existe um polinómio $Q(x)$ de grau $n - 1$ tal que $P(x) = (x - a)Q(x)$.
10. Identificar, dado um polinómio $P(x)$ e uma raiz a de $P(x)$, a «multiplicidade de a» como o maior número natural n tal que existe um polinómio $Q(x)$ com $P(x) = (x - a)^n Q(x)$, justificar que nesta situação $Q(a) \neq 0$ e designar a por «raiz simples» quando a respetiva multiplicidade é igual a 1.
11. +Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ de grau $n \in \mathbb{N}$ cujas raízes (distintas) x_1, x_2,…,x_k têm respetivamente multiplicidade n_1, n_2,…,n_k , que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k \leq n$ e que existe um polinómio $Q(x)$ sem raízes tal que $P(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \ldots (x - x_k)^{n_k} Q(x)$, tendo-se $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ se e somente se $Q(x)$ tiver grau zero.
12. Reconhecer, dado um polinómio $P(x)$ de coeficientes inteiros, que o respetivo termo de grau zero é múltiplo inteiro de qualquer raiz inteira desse polinómio.

5. *Resolver problemas*

1. +Resolver problemas envolvendo a divisão inteira de polinómios e o Teorema do resto.
2. +Resolver problemas envolvendo a fatorização de polinómios de que se conhecem algumas raízes.
3. +Resolver problemas envolvendo a determinação dos zeros e do sinal de funções polinomiais de grau superior a dois.

Geometria Analítica no plano

1. *Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do plano*

    1. Designar por «referencial ortonormado» um referencial ortogonal e monométrico de um dado plano, tal que a unidade de comprimento comum aos eixos coordenados coincide com uma unidade de comprimento pré-fixada e, dados números reais a_1 e a_2, designar por «$A(a_1, a_2)$», o ponto A de abcissa a_1 e ordenada a_2 nesse referencial.
    2. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado e pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ pertencentes a esse plano, que a medida da distância entre A e B é igual a $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, e representá-la por « $d(A, B)$».
    3. Demonstrar, dada uma reta numérica e dois pontos A e B de abcissas a e b respetivamente, que a abcissa do ponto médio do segmento de reta de extremos A e B é igual a $\frac{a+b}{2}$.
    4. +Reconhecer, utilizando argumentos geométricos baseados no Teorema de Tales ou em consequências conhecidas deste Teorema, que, dado um plano munido de um referencial ortonormado e dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ pertencentes a esse plano, as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AB]$ são $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$.
    5. Designar, dado um plano munido de um referencial ortonormado, por «equação cartesiana» (respetivamente por «inequação cartesiana») de um conjunto C uma equação (respetivamente inequação) cujas soluções são as coordenadas dos pontos de C.
    6. Determinar, dado um plano munido de um referencial ortonormado e dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ desse plano, uma equação cartesiana da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ na forma $y = mx + b$ (equação reduzida da reta) ou na forma $x = c$.
    7. Justificar, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado, um ponto $A(a_1, a_2)$ pertencente a esse plano e um número $r > 0$, que a equação $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2$ é uma equação cartesiana da circunferência de centro A e de raio r, e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da circunferência».
    8. Designar, fixada uma unidade de comprimento e um plano, dados dois pontos A e B pertencentes a esse plano e um número $a > \frac{1}{2}\overline{AB}$, por «elipse» o conjunto de pontos P do plano tais que $d(P, A) + d(P, B) = 2a$, por «focos da elipse» os pontos A e B, por «centro da elipse» o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, e por «eixo maior da elipse» o número $2a$ (e a por «semieixo maior da elipse»), interpretando-o geometricamente.
    9. +Demonstrar, dada uma elipse de focos A e B e de eixo maior $2a$, que a mediatriz de $[AB]$ interseta a elipse em dois pontos C e D equidistantes do centro da elipse e que tomando $b = \frac{1}{2}\,\overline{CD}$ se tem $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, onde $c = \frac{1}{2}\overline{AB}$, designando $2b$ por «eixo menor da elipse» (e b por «semieixo menor da elipse»).
    10. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado e $0 < b < a$ que a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é uma equação

cartesiana da elipse de semieixo maior a e semieixo menor b que tem focos $A(-c,0)$ e $B(c,0)$, onde $c=\sqrt{a^2-b^2}$, e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da elipse».

11. +Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortonormado e uma reta r do plano de equação reduzida $y=ax+b$ $(a,b\in\mathbb{R})$, que os dois semiplanos abertos (respetivamente fechados) determinados por r têm por inequações cartesianas $y>ax+b$ e $y<ax+b$ (respetivamente $y\geq ax+b$ e $y\leq ax+b$) e designá-los respetivamente por «semiplano superior» e «semiplano inferior» em relação à reta r.
12. Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortonormado e uma reta r do plano de equação cartesiana $x=c$ $(c\in\mathbb{R})$, que os dois semiplanos abertos (respetivamente fechados) determinados por r têm por inequações cartesianas $x>c$ e $x<c$ (respetivamente $x\geq c$ e $x\leq c$) e designá-los respetivamente por «semiplano à direita» e «semiplano à esquerda» da reta r.
13. Justificar, fixada uma unidade de comprimento, dado um plano munido de um referencial ortonormado, que a inequação $(x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2$ $(a,b\in\mathbb{R},\ r>0)$ é uma inequação do círculo de centro $C(a,b)$ e de raio r.

2. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano, e equações e inequações cartesianas de subconjuntos do plano.

Cálculo vetorial no plano

3. Operar com vetores

1. Identificar, fixada uma unidade de comprimento e dado um vetor $\vec{v}$, a «norma do vetor $\vec{v}$» como a medida do comprimento de um segmento orientado representante de $\vec{v}$ e representá-la por «$\|\vec{v}\|$».
2. Identificar, dado um vetor $\vec{v}$ e um número real (também designado por «escalar») λ, o «produto de $\vec{v}$ por λ» («$\lambda\vec{v}$») como o vetor de norma $|\lambda|\|\vec{v}\|$ (fixada uma mesma unidade de comprimento para o cálculo das normas), com a direção e sentido de $\vec{v}$ se $\vec{v}\neq\vec{0}$ e $\lambda>0$ e com a direção de $\vec{v}$ e sentido contrário ao de $\vec{v}$ se $\vec{v}\neq\vec{0}$ e $\lambda<0$, justificar que $\lambda\vec{v}$ não depende da unidade de comprimento fixada e que $(-1)\vec{v}=-\vec{v}$, vetor simétrico de $\vec{v}$.
3. Justificar, dado um vetor $\vec{v}$ não nulo, que um vetor $\vec{u}$ é colinear a $\vec{v}$ se e apenas existir um número real λ tal que $\vec{u}=\lambda\vec{v}$, e que, nesse caso, λ é único.
4. Justificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que existe um e somente um vetor $\vec{w}$ tal que $\vec{w}+\vec{v}=\vec{u}$, provando que $\vec{w}=\vec{u}+(-\vec{v})$, designar $\vec{w}$ por «diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$» e representá-lo por «$\vec{u}-\vec{v}$».
5. +Reconhecer, dado um vetor $\vec{v}$ e números reais λ e μ, que $(\lambda+\mu)\vec{v}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{v}$.
6. +Reconhecer, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e números reais λ e μ que $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$ e $\lambda(\mu\vec{u})=(\lambda\mu)\vec{u}$.

4. *Operar com coordenadas de vetores*

    1. +Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e um vetor $\vec{v}$ do plano que, sendo $X(1,0)$, $Y(0,1)$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$, existe um e somente um par ordenado (v_1, v_2) de números reais tais que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$, por esse motivo designar o par ordenado $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ por uma «base do espaço vetorial dos vetores do plano», (v_1, v_2) por «coordenadas do vetor $\vec{v}$ (na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$)» e representar por «$\vec{v}(v_1, v_2)$» o vetor $\vec{v}$ de coordenadas (v_1, v_2).
    2. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dado um ponto A, o «vetor-posição do ponto A» como o vetor $\overrightarrow{OA}$ e justificar que as coordenadas do vetor posição de um dado ponto coincidem com as coordenadas do ponto.
    3. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ e um número real λ, que o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ (respetivamente $\vec{u} - \vec{v}$) tem coordenadas $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ (respetivamente $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$), que o vetor $\lambda\vec{u}$ tem coordenadas $(\lambda u_1, \lambda u_2)$, que o vetor simétrico do vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ tem coordenadas $(-u_1, -u_2)$ e que dois vetores não nulos são colineares se e somente se as respetivas coordenadas forem todas não nulas e os quocientes das coordenadas correspondentes forem iguais, ou as primeiras ou segundas coordenadas de ambos os vetores forem nulas.
    4. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, começando por justificar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, identificar, a «diferença entre os pontos B e A» como o vetor $\overrightarrow{AB}$, representá-la por «$B - A$» e justificar que, para todo o vetor $\vec{v}$ e para quaisquer pontos A e B do plano, $B - A = \vec{v} \Leftrightarrow B = A + \vec{v}$.
    5. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dado um ponto $A(a_1, a_2)$ e um vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$ desse plano, que o ponto $A + \vec{v}$ tem coordenadas $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$.
    6. Justificar, fixada uma unidade de comprimento e um plano munido de um referencial ortonormado que para qualquer vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$.

5. *Conhecer propriedades dos vetores diretores de retas do plano*

    1. Identificar, dado um vetor $\vec{v}$ não nulo e uma reta r, $\vec{v}$ como «tendo a direção de r» quando r tiver a direção das retas suporte dos segmentos orientados que representam $\vec{v}$.
    2. Designar por «vetor diretor» de uma dada reta r qualquer vetor não nulo com a mesma direção do que r.
    3. Provar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e uma reta r não vertical de declive m, que o vetor $\vec{v}(a, b)$ é vetor diretor de r se e somente se $a \neq 0$ e $m = \frac{b}{a}$, e que, em particular, o vetor de coordenadas $(1, m)$ é vetor diretor da reta r.
    4. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que os vetores diretores das retas verticais são os vetores $\vec{v}(0, b)$, $b \neq 0$.
    5. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que dada uma reta r de vetor diretor $\vec{v}$, os pontos de r são os pontos $P = A + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, onde A é um qualquer ponto de r, e designar esta equação por «equação vetorial da reta r».

6. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e dados $a_1, a_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, que um ponto $P(x, y)$ pertence à reta r de vetor diretor $\vec{v}(v_1, v_2)$ passando pelo ponto $A(a_1, a_2)$ se e somente se existir $t \in \mathbb{R}$ tal que $x = a_1 + tv_1 \wedge y = a_2 + tv_2$, e designar este sistema por «sistema das equações paramétricas da reta r».

6. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a determinação das coordenadas de vetores do plano.
2. +Resolver problemas envolvendo a colinearidade de vetores do plano.
3. +Resolver problemas envolvendo equações vetoriais, paramétricas e cartesianas de retas do plano.

Geometria Analítica no espaço

7. Definir referenciais cartesianos do espaço

1. Identificar um «referencial (cartesiano) ortonormado do espaço» (ou simplesmente «referencial cartesiano») como um terno ordenado de retas numéricas que se intersetam nas respetivas origens, duas a duas perpendiculares e com unidades de comprimento coincidentes com uma mesma unidade de comprimento pré-fixada, designar a origem comum das três retas por «origem do referencial», a primeira reta por «eixo das abcissas», a segunda por «eixo das ordenadas», a terceira por «eixo das cotas», genericamente cada uma delas por «eixo coordenado» e, se for representada por «O» a origem do referencial, representar estes três eixos respetivamente por «Ox», «Oy» e «Oz» e o referencial por «$Oxyz$».
2. Designar, dado um ponto P e uma reta r, por «projeção ortogonal de P sobre r» como o próprio ponto P quando P pertencer a r e como o pé da perpendicular traçada de P para r no caso contrário, reconhecendo que é a interseção com r do plano normal a r passando por P.
3. Designar, dado um referencial ortonormado e um ponto P de projeções ortogonais P_x, no eixo das abcissas, P_y, no eixo das ordenadas e P_z, no eixo das cotas, por «abcissa de P», «ordenada de P» e «cota de P» respetivamente a abcissa de P_x, de P_y e de P_z nas respetivas retas numéricas, e o terno ordenado destes três valores por «coordenadas de P».
4. Designar por «planos coordenados» os três planos determinados por dois dos eixos coordenados, representá-los por «xOy», «xOz» e «yOz» consoante os eixos coordenados que contêm, e reconhecer que são perpendiculares dois a dois.
5. +Reconhecer, dado um referencial ortonormado e um terno ordenado de números reais (x, y, z), que existe um e apenas um ponto P com essas coordenadas e representá-lo por «$P(x, y, z)$».
6. +Reconhecer, dado um referencial ortonormado e um ponto $P(a, b, c)$ de projeção ortogonal P' no plano xOy, que, nesse plano, munido do referencial constituido pelos eixos Ox e Oy, P' tem coordenadas (a, b) e enunciar resultados análogos para os planos xOz e yOz.

8. Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do espaço

1. Justificar, dado um referencial ortonormado do espaço e $a \in \mathbb{R}$, que $x = a$ é uma equação cartesiana do plano paralelo ao plano coordenado yOz que interseta o eixo das abcissas no ponto $A(a, 0,0)$ e determinar as equações dos planos paralelos aos planos coordenados $x0z$ e xOy.
2. Justificar, dado um referencial cartesiano do espaço e $a, b \in \mathbb{R}$ que o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ cujas coordenadas satisfazem o «sistema de equações cartesianas» $x = a \wedge y = b$ é a reta paralela ao eixo das cotas que interseta o plano coordenado xOy no ponto $A(a, b, 0)$ e determinar sistemas de equações cartesianas de retas paralelas ao eixo das abcissas e ao eixo das ordenadas.
3. +Provar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço e pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$, que a medida da distância entre A e B é igual a $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$ e representá-la por «$d(A, B)$».
4. Determinar, dado um referencial ortonormado do espaço e as coordenadas de dois pontos A e B do espaço, uma equação do plano mediador do segmento de reta $[AB]$ na forma $ax + by + cz + d = 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
5. Justificar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço, um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e um número $r > 0$, que $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = r^2$ é uma equação cartesiana da superfície esférica de centro A e de raio r, e designá-la por «equação (cartesiana) reduzida da superfície esférica».
6. Justificar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço, um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e um número $r > 0$, que $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \leq r^2$ é uma inequação cartesiana da esfera de centro A e de raio r, e designá--la por «inequação (cartesiana) reduzida da esfera».

Cálculo vetorial no espaço

9. Definir vetores do espaço

1. Designar um par de segmentos orientados do espaço por «equipolentes» quando são complanares e equipolentes num plano que os contenha.
2. Saber que um «vetor do espaço» fica determinado por um segmento orientado do espaço de tal modo que segmentos de reta equipolentes determinam o mesmo vetor e segmentos de reta não equipolentes determinam vetores distintos.
3. Estender do plano ao espaço a definição de norma de um vetor, de adição de um ponto com um vetor, de translação de um dado vetor e as operações de subtração de dois pontos, de adição e subtração de vetores, de multiplicação de um vetor por um escalar e as respetivas propriedades geométricas e algébricas.

10. Operar com coordenadas de vetores do espaço

1. +Reconhecer, fixado um referencial ortonormado no espaço de origem O e um vetor $\vec{v}$ que, sendo $X(1,0,0)$, $Y(0,1,0)$, $Z(0,0,1)$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OX}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OY}$ e $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OZ}$, existe um e somente um terno ordenado (v_1, v_2, v_3) de números reais tais que $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$, designar o terno ordenado $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ por uma «base do espaço vetorial dos vetores do espaço», (v_1, v_2, v_3) por «coordenadas do vetor $\vec{v}$ (na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$)» e representar por «$\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$» o vetor $\vec{v}$ de coordenadas (v_1, v_2, v_3).

2. Estender do plano ao espaço a definição do vetor posição de um ponto e a identificação das respetivas coordenadas, as fórmulas para o cálculo das coordenadas da soma e da diferença de vetores, do produto de um vetor por um escalar, do simétrico de um vetor, da diferença de dois pontos, da soma de um ponto com um vetor e da norma de um vetor, e o critério de colinearidade de vetores através das respetivas coordenadas.
3. Estender do plano ao espaço a definição e propriedades das equações vetoriais e sistemas de equações paramétricas de retas.

11. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do espaço, equações e inequações cartesianas de subconjuntos do espaço.
2. +Resolver problemas envolvendo cálculo vetorial no espaço.

Generalidades acerca de funções

1. *Definir a composição de funções e a função inversa de uma função bijetiva*

    1. Identificar, dados conjuntos A e B, o «produto cartesiano de A por B» como o conjunto $\{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$ dos pares ordenados (a,b) tais que a e b pertencem, respetivamente a A e a B e representá-lo por «$A \times B$».
    2. Reconhecer que um conjunto $G \subset A \times B$ é o gráfico de uma função de A em B quando e apenas quando para todo o $a \in A$ existir um e somente um elemento $b \in B$ tal que $(a,b) \in G$.
    3. Identificar, dados conjuntos A e B, uma função $f : A \rightarrow B$ e um conjunto C, a «restrição de f a C» como a função $f|_C : C \cap A \rightarrow B$ tal que, $\forall x \in C \cap A$, $f|_C(x) = f(x)$.
    4. Identificar, dados conjuntos A e B, uma função $f : A \rightarrow B$ e $C \subset A$, o «conjunto imagem de C por f» como o conjunto $f(C) = \{y \in B : \exists x \in C : y = f(x)\}$ das imagens por f dos elementos de C, representá-lo também por «$\{f(x) : x \in C\}$».
    5. Identificar, dados conjuntos A e B, uma função $f : A \rightarrow B$ como «injetiva» se para todos os x_1 e x_2 pertencentes a A, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (ou, de modo equivalente, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$) e designar também uma tal função por «injeção de A em B».
    6. Identificar, dados conjuntos A e B, uma função $f : A \rightarrow B$ como «sobrejetiva» se para todo o y pertencente a B, existir um elemento x pertencente a A tal que $y = f(x)$ e reconhecer que uma função é sobrejetiva se e somente se coincidirem os respetivos contradomínio e conjunto de chegada e designar também uma tal função por «sobrejeção de A em B» ou por «função de A sobre B».
    7. Identificar, dados conjuntos A e B, uma função $f : A \rightarrow B$ como «bijetiva» se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva e designar também uma tal função por «bijeção de A em B».
    8. Identificar, dadas funções $f : D_f \rightarrow A$ e $g : D_g \rightarrow B$, a «função composta de g com f» como a função $gof : D_{gof} \rightarrow B$, tal que $D_{gof} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ e $\forall x \in D_{gof}$, $gof(x) = g(f(x))$ e designá-la também por «g composta com f», «g após f» ou «f seguida de g».
    9. Designar, dado um conjunto A, por «função identidade em A» a função $Id_A : A \rightarrow A$ tal que $\forall x \in A$, $Id_A(x) = x$ e justificar que se trata de uma função bijetiva.
    10. Justificar, dados conjuntos A e B e uma função $f : A \rightarrow B$ bijetiva, que para todo o y pertencente a B existe um e apenas um elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$ e, representando-o por x_y , designar por «função inversa de f» a função $f^{-1} : B \longrightarrow A$ tal que $\forall y \in B$, $f^{-1}(y) = x_y$.
    11. +Reconhecer, dada uma função $f : A \rightarrow B$ bijetiva, que f^{-1} é bijetiva e que $(f^{-1})^{-1} = f$ e designar também f^{-1} por «bijeção recíproca de f».
    12. Reconhecer, dada uma função $f : A \rightarrow B$, que f é bijetiva se e somente se existir uma função $g : B \rightarrow A$, tal que $\forall (x,y) \in A \times B, y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$.
    13. Justificar que uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetiva se e somente se existir uma função $g : B \rightarrow A$ tal que $gof = Id_A$ e $fog = Id_B$ e que, nesse caso, $g = f^{-1}$.

Generalidades acerca de funções reais de variável real

2. *Relacionar propriedades geométricas dos gráficos com propriedades das respetivas funções*

1. Designar por «função real de variável real» uma função cujo domínio e conjunto de chegada estão contidos em $\mathbb{R}$.
2. Saber, dada uma expressão $f(x)$, que se convenciona, quando nada for indicado em contrário, que essa expressão representa a função f com conjunto de chegada igual a $\mathbb{R}$ e domínio constituído por todos os números reais a para os quais fica representado um número real pela expressão que se obtém substituindo todas as ocorrências de x em $f(x)$ por um símbolo representando o número a, designar, nesse caso, a expressão $f(x)$ por «expressão analítica de f» e este processo de caracterizar f por «definição (analítica) de f pela expressão $f(x)$».
3. Identificar uma função real de variável real f como «par» se, para todo o $x \in D_f$, $-x \in D_f$ e $f(-x) = f(x)$.
4. Identificar uma função real de variável real f como «ímpar» se, para todo o $x \in D_f$, $-x \in D_f$ e $f(-x) = -f(x)$.
5. Justificar, dada uma função real de variável real ímpar f, que, se $0 \in D_f$, então $f(0) = 0$.
6. +Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortogonal, que uma dada função é par se e somente se o eixo das ordenadas for eixo de simetria do respetivo gráfico cartesiano.
7. +Reconhecer, dado um plano munido de um referencial cartesiano, que uma dada função é ímpar se e somente se o respetivo gráfico cartesiano for «simétrico relativamente à origem O do referencial», isto é, se e somente se a imagem do gráfico pela reflexão central de centro O coincidir com o próprio gráfico.
8. +Reconhecer, dada uma função real de variável real bijetiva f e um plano munido de um referencial monométrico, que os gráficos cartesianos das funções f e f^{-1} são a imagem um do outro pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$.
9. Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = f(x) + c$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(0, c)$.
10. +Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g definida por $g(x) = f(x - c)$ no conjunto $D_g = \{x + c : x \in D_f\}$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(c, 0)$.
11. Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) , por «contração vertical (respetivamente dilatação vertical) de coeficiente a» a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (x, ay).
12. Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em D_f por $g(x) = af(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela contração vertical (respetivamente pela dilatação vertical) de coeficiente a.

13. Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por «contração horizontal (respetivamente dilatação horizontal) de coeficiente a» a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (ax, y).
14. Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_{g=}\left\{\frac{x}{a} : x \in D_f\right\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela dilatação horizontal (respetivamente pela contração horizontal) de coeficiente $\frac{1}{a}$.
15. Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = -f(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão de eixo Ox.
16. Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \{-x : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(-x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão de eixo Oy.

3. *Identificar intervalos de monotonia de funções reais de variável real*

1. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «(estritamente) crescente em A» (ou simplesmente «(estritamente) crescente» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «(estritamente) decrescente em A» (ou simplesmente «(estritamente) decrescente» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$.
3. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «crescente, em sentido lato, em A» (ou simplesmente «crescente, em sentido lato» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$.
4. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «decrescente, em sentido lato, em A» (ou simplesmente «decrescente, em sentido lato» se $A = D_f$) se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$.
5. Identificar, dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, f como «(estritamente) monótona em A» (ou simplesmente «(estritamente) monótona» se $A = D_f$) se for (estritamente) crescente ou (estritamente) decrescente em A e f como «monótona, em sentido lato, em A» (ou simplesmente «monótona, em sentido lato» se $A = D_f$) se for crescente ou decrescente, em sentido lato, em A.
6. Identificar, dada uma função real de variável real f, um «intervalo de (estrita) monotonia de f» como um intervalo $I \subset D_f$ tal que $f|_I$ é (estritamente) monótona.
7. Identificar, dada uma função real de variável real e $A \subset D_f$, f como «constante em A» se para quaisquer elementos x_1 e x_2 de A, $f(x_1) = f(x_2)$.
8. Demonstrar que uma função afim definida por $f(x) = ax + b$ é estritamente crescente (respetivamente decrescente) em $\mathbb{R}$ se e somente se $a > 0$ (respetivamente $a < 0$).
9. Demonstrar que, dada uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2$, se $a > 0$ então f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$ e que, se $a < 0$, então f é crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.

4. *Identificar extremos de funções reais de variável real*

   1. Designar, dada uma função f de domínio D_f e valores em $\mathbb{R}$, um número real M como «majorante de f» (respetivamente «minorante de f») quando $\forall x \in D_f,\ f(x) \leq M$ (respetivamente $\forall x \in D_f,\ f(x) \geq M$), referindo a função f como «majorada» (respetivamente «minorada») quando admitir um majorante (respetivamente um minorante).
   2. Designar por «limitada» uma função simultaneamente majorada e minorada.
   3. Designar por «mínimo absoluto» (respetivamente por «máximo absoluto») de uma função real de variável real um valor $f(a)$ do contradomínio de f tal que $\forall x \in D_f, f(a) \leq f(x)$ (respetivamente $\forall x \in D_f, f(a) \geq f(x)$) e designar por «extremos absolutos de f» os máximos absolutos e os mínimos absolutos de f.
   4. Designar, dados um número real x_0 e um número real positivo r, por «vizinhança r de x_0» o intervalo $]x_0 - r, x_0 + r[$ e representá-la por «$V_r(x_0)$».
   5. Referir que uma função real de variável real «atinge um mínimo relativo (ou local)» (respetivamente «atinge um máximo relativo (ou local)») em $a \in D_f$ quando existe $r > 0$, tal que, $\forall x \in D_f \cap V_r(a),\ f(a) \leq f(x)$ (respetivamente, $\forall x \in D_f \cap V_r(a)$, $f(a) \geq f(x)$) e designar $f(a)$ por «mínimo relativo (ou local)» (respetivamente «máximo relativo (ou local)») de f e a por um «minimizante» (respetivamente por um «maximizante») de f.
   6. Identificar, dada uma função real de variável real f, o gráfico de f como «tendo a concavidade (estritamente) voltada para cima» (respetivamente como «tendo a concavidade (estritamente) voltada para baixo») num dado intervalo $I \subset D_f$ se dados quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico, de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, o declive da reta PQ é inferior (respetivamente superior) ao da reta QR.
   7. Saber que uma função real de variável real tem a concavidade (estritamente) voltada para cima (respetivamente para baixo) num dado intervalo $I \subset D_f$ se e somente se dados quaisquer dois pontos P e Q do gráfico, de abcissas em I, a parte do gráfico de f de abcissas estritamente situadas entre as abcissas de P e Q ficar "abaixo" (respetivamente "acima") do segmento de reta $[PQ]$.
   8. +Reconhecer, dado um número real não nulo a, que o gráfico da função f definida pela expressão $f(x) = ax^2$ tem, em $]-\infty, +\infty[$, a concavidade voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0$.

5. *Estudar funções elementares e operações algébricas sobre funções*

   1. Esboçar o gráfico de funções quadráticas, começando por representá-las por expressões da forma $a(x-b)^2 + c$ e identificando os intervalos de monotonia, o extremo absoluto, as eventuais raízes e o sentido da concavidade dos respetivos gráficos.
   2. Identificar uma função $f : D_f \to \mathbb{R}$ para a qual são dados um número natural $n > 1$, uma partição $A_1, A_2, \dots, A_n$ de D_f e n expressões $f_j(x)$ $(1 \leq j \leq n)$ tais que para todo o j e para todo o $x \in A_j$, $f(x) = f_j(x)$ como «estando definida por ramos pelas expressões $f_j(x)$, respetivamente nos conjuntos A_j $(1 \leq j \leq n)$».
   3. Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x) = a|x-b| + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ interpretando geometricamente os valores a, b e c.

4. Justificar que a função $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $f(x) = x^2$ é bijetiva e que para todo o $x \in \mathbb{R}_0^+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
5. Justificar que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é bijetiva e que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.
6. Determinar o domínio e esboçar o gráfico de funções definidas analiticamente por $f(x) = a\sqrt[n]{x-b} + c \ \ (a, b, c \in \ \mathbb{R},\ n \in \{2,3\},\ a \neq 0)$.
7. Identificar «função polinomial» como uma função que pode ser definida analiticamente por um polinómio com uma só variável.
8. Esboçar o gráfico de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais até ao 3.º grau, módulos e radicais quadrados e cúbicos.
9. Identificar, dadas funções $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$, um número real α e um número racional r, as funções $f+g: D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ («soma de f com g»), $fg: D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$, («produto de f por g»), $\frac{f}{g}: D_{\frac{f}{g}} \to \mathbb{R}$ («quociente de f por g», onde $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\}$), $\alpha f: D_f \to \mathbb{R}$ («produto de f pelo escalar α») e $f^r: D_{f^r} \to \mathbb{R}$ («potência de expoente r de f», onde D_{f^r} é o conjunto dos números reais x para os quais está definido $f(x)^r$), como as funções com os domínios e conjunto de chegada indicados, definidas, para cada elemento x do respetivo domínio, respetivamente por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ e $f^r(x) = f(x)^r$, podendo utilizar-se, para representar as potências de expoente racional, as notações envolvendo raízes.

6. *Resolver problemas*

1. +Resolver equações e inequações envolvendo as funções polinomiais e a composição da função módulo com funções polinomiais.
2. +Resolver equações e inequações envolvendo as funções raiz quadrada e raiz cúbica.
3. +Resolver problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real.
4. +Resolver problemas envolvendo as funções afim, quadrática, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais.
5. +Resolver problemas envolvendo a determinação do domínio de funções obtidas por aplicação de operações algébricas a funções dadas.

Características amostrais

1. *Manipular o sinal de somatório*

   1. Designar, dado $p \in \mathbb{N}$ e uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, a soma $x_1 + x_2 + \cdots + x_p$ por «somatório de 1 a p dos x_i» (ou por «soma dos p termos da sequência», quando esta designação não for ambígua), representá-la por «$\sum_{i=1}^{p} x_i$», designar o símbolo «Σ» por «sinal de somatório» e, para $1 < m \leq p$, representar também por «$\sum_{i=m}^{p} x_i$» a soma $x_m + x_{m+1} + \cdots + x_p$ («somatório de m a p dos x_i»).
   2. Reconhecer, dados $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, que a igualdade $\sum_{i=1}^{p}(\lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i$ representa, no formalismo dos somatórios, a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição aplicada ao produto de λ pela soma das p parcelas $x_1, x_2, \ldots, x_p$.
   3. Reconhecer, dados $p \in \mathbb{N}$, uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ e um número natural n tal que $n < p$, que a igualdade $\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{p} x_i$ representa, no formalismo dos somatórios, uma aplicação da propriedade associativa da adição à soma das p parcelas $x_1, x_2, \ldots, x_p$.
   4. Reconhecer, dado $p \in \mathbb{N}$ e sequências de números reais $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ e $(y_i)_{1 \leq i \leq p}$, que a igualdade $\sum_{i=1}^{p}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i + \sum_{i=1}^{p} y_i$ representa, no formalismo dos somatórios, uma aplicação das propriedades associativa e comutativa da adição à soma das p parcelas $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p$.

2. *Utilizar as propriedades da média de uma amostra*

   1. Interpretar uma dada variável estatística quantitativa em determinada população como uma função numérica definida na população, cujo valor em cada unidade estatística é o valor que mede a característica em estudo nesse elemento da população.
   2. Representar, dada uma variável estatística quantitativa x em determinada população e uma amostra A de dimensão $n \in \mathbb{N}$ dessa população cujos elementos estão numerados de 1 a n, por «x_i» o valor da variável x no elemento de A com o número i, por «$\underset{\sim}{x}$» a sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, designá-la por «amostra da variável estatística x» ou simplesmente por «amostra» e por «valores da amostra» os valores x_i ,$1 \leq i \leq n$, sempre que estes abusos de linguagem não forem ambíguos.
   3. Representar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de uma variável estatística, por «$\bar{x}$» a média $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, designando-a igualmente por «média da amostra $\underset{\sim}{x}$» sempre que este abuso de linguagem não for ambíguo.
   4. Representar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ com m valores $(1 \leq m \leq n)$, por «$\tilde{x}$» o conjunto dos valores da amostra, por $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_m$ os elementos de $\tilde{x}$, por

«n_j» ($1 \leq j \leq m$) o cardinal do conjunto $\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i = \tilde{x}_j\}$, designar n_j por «frequência absoluta do valor $\tilde{x}_j$», e justificar que $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$ e que $\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \tilde{x}_j n_j}{n}$, designando esta última igualdade por «fórmula da média para dados agrupados».

5. Representar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e a, por «$a\underset{\sim}{x} + h$» a amostra $\underset{\sim}{y} = (ax_1 + h, ax_2 + h, \dots, ax_n + h)$ e justificar que $\bar{y} = a\bar{x} + h$.
6. Interpretar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, a média de $\underset{\sim}{x}$ como a abcissa do centro de gravidade de um segmento de reta no qual se colocou, para cada valor $\tilde{x}_j$ da amostra, um ponto material no ponto de abcissa $\tilde{x}_j$ de massa igual à respetiva frequência absoluta n_j.
7. Reconhecer que o valor da média de uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nunca se mantém quando, para um dado $i \in \{1, \dots, n\}$, se altera o valor x_i , e referir, por essa razão, que a média é uma característica amostral «com pouca resistência».

3. *Definir e conhecer propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra*

1. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, por «desvio de x_i em relação à média» a quantidade $x_i - \bar{x}$, representá-la por «d_i» e provar que $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$.
2. +Representar dado $n \in \mathbb{N}$ *e uma amos*tra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, por «$SS_x$» a soma $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ dos quadrados dos desvios dos x_i em relação à média e reconhecer que $SS_x = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\bar{x}^2$.
3. +Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que é possível calcular d_n em função de $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ mas que d_n só fica determinado se for conhecida a totalidade desses $n-1$ desvios, e referir, por esta razão, que «SS_x tem $n-1$ graus de liberdade».
4. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que $SS_x = 0$ se e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.
5. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e α, que se $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} + h$ (respetivamente $\underset{\sim}{y} = \alpha\underset{\sim}{x}$) então $SS_y = SS_x$ (respetivamente $SS_y = \alpha^2 SS_x$).
6. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que $SS_x = \sum_{j=1}^{m}(\tilde{x}_j - \bar{x})^2 n_j$, onde $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$ representam os m valores da amostra $\underset{\sim}{x}$ e n_j a frequência absoluta de $\tilde{x}_j$.
7. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ${s_x}^2 = \frac{SS_x}{n-1}$ por «variância da amostra $\underset{\sim}{x}$» e $s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$ por «desvio-padrão da amostra $\underset{\sim}{x}$».

8. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que $s_x = 0$ se e somente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
9. Justificar, dados $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$, uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e números reais h e α, que se $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} + h$ (respetivamente $\underset{\sim}{y} = \alpha \underset{\sim}{x}$) então $s_y = s_x$ (respetivamente $s_y = |\alpha|\, s_x$).
10. Reconhecer, dada uma variável estatística quantitativa x em determinada população, uma amostra A de dimensão $n > 1$ dessa população e sendo $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra correspondente da variável estatística x, que para todo o $k > 0$ a percentagem dos elementos da amostra A nos quais os valores da variável estatística têm desvios em relação à média superiores a k desvios-padrão é inferior a $\frac{1}{k^2}$ e interpretar este resultado como tradução quantitativa da afirmação segundo a qual o par $(\bar{x}, s_x)$ reflete a distribuição dos valores da amostra $\underset{\sim}{x}$ em termos de "localização" e de "dispersão".
11. Reconhecer que para comparar a "dispersão" dos valores dos elementos de duas ou mais amostras em torno da média, faz sentido comparar as respetivas variâncias (ou os respetivos desvios-padrão), sempre que a característica quantitativa em análise seja a mesma nas diversas amostras e que a respetiva medida esteja calculada na mesma unidade.
12. Saber, dada uma população, que existem critérios que conduzem à recolha de amostras cujas médias e desvios-padrão são consideradas boas estimativas da média e do desvio--padrão da população.

4. *Definir e conhecer propriedades do percentil de ordem k*

1. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, por «amostra $\underset{\sim}{x}$ ordenada» a sequência $\left(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\right)$ tal que $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$, com os mesmos valores que a amostra $\underset{\sim}{x}$, cada um deles figurando na sequência um número de vezes igual à respetiva frequência absoluta enquanto valor da amostra $\underset{\sim}{x}$.
2. Designar, dado $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e um número natural k do intervalo $]0,100]$, por «percentil de ordem k» o valor máximo da amostra se $k = 100$, a média dos elementos de ordem $\frac{kn}{100}$ e $\frac{kn}{100} + 1$ na amostra ordenada se $k \neq 100$ e $\frac{kn}{100}$ for inteiro, e nos restantes casos, o elemento de ordem $\left[\frac{kn}{100}\right] + 1$ na amostra ordenada, (onde, para $x \in \mathbb{R}$, «$[x]$» designa a «parte inteira de x», ou seja, o maior número natural inferior ou igual a x) e representá-lo por «P_k».
3. Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, que P_{50} é igual à mediana de $\underset{\sim}{x}$ e saber que também é usual definir o primeiro e o terceiro quartil de modo a coincidirem, respetivamente, com P_{25} e P_{75}.

4. Designar, dados números naturais n e k, $k \leq 100$, uma sequência crescente de números reais $(a_{1,}a_2, \dots, a_m)$ e um conjunto de dados quantitativos organizados nos intervalos de classe $[a_i, a_{i+1}[$, que se supõem de igual amplitude $h > 0$, por «percentil de ordem k», o número x tal que $\sum_{i=1}^{L-1}(a_{i+1} - a_i)n_i + (x - a_L)n_L = \frac{k}{100}\sum_{i=1}^{m}(a_{i+1} - a_i)\, n_i$, ou seja, tal que $h\sum_{i=1}^{L-1} n_i + (x - a_L)n_L = \frac{khn}{100}$ onde n_i é a frequência absoluta do intervalo de classe $[a_i, a_{i+1}[$ e L é o maior número natural tal que $\sum_{i=1}^{L-1} n_i \leq \frac{kn}{100}$.

5. *Resolver problemas*

1. +Resolver problemas envolvendo a média e o desvio-padrão de uma amostra.
2. +Resolver problemas envolvendo os percentis de uma amostra.

11.º ANO

Trigonometria e Funções Trigonométricas TRI11

Extensão da Trigonometria a ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos

1. *Definir as razões trigonométricas dos ângulos retos e obtusos e resolver triângulos*

   1. Provar, dado um triângulo acutângulo $[ABC]$, de ângulos internos $\alpha = B\hat{A}C, \beta = A\hat{B}C$ e $\gamma = A\hat{C}B$ e de lados de medida $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, fixada uma unidade de comprimento, que $\frac{\sin\,\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\,\gamma}{c}$, e designar estas igualdades por «Lei dos senos» ou «Analogia dos senos».
   2. Estender a definição do seno aos ângulos retos, tomando $\sin\ \alpha = 1$ quando o ângulo α é reto, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos senos a triângulos retângulos.
   3. Estender a definição do seno aos ângulos obtusos tomando, para um ângulo α obtuso, $\sin\ \alpha = \sin\ \alpha'$, onde α' é suplementar a α, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos senos a triângulos obtusângulos.
   4. +Provar, dado um triângulo $[ABC]$, de lados de medida $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$, fixada uma unidade de comprimento, e sendo agudo o ângulo interno em A, que, se $\alpha = B\hat{A}C$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, e designar este resultado por «Teorema de Carnot» ou «Lei dos cossenos».
   5. Estender a definição do cosseno aos ângulos retos, tomando $\cos\ \alpha = 0$ quando o ângulo α é reto, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos cossenos ao caso de um ângulo interno reto, reconhecendo que neste caso se reduz ao Teorema de Pitágoras.
   6. +Estender a definição do cosseno aos ângulos obtusos tomando, para um ângulo α obtuso, $\cos\ \alpha = -\cos\ \alpha'$, onde α' é suplementar a α, reconhecendo que esta definição é a única possível por forma a estender a Lei dos cossenos ao caso de um ângulo interno obtuso.
   7. Estender a todos os ângulos convexos a propriedade segundo a qual, dados ângulos α e α' com a mesma amplitude $\hat{\alpha} = \widehat{\alpha'}$, o seno e o cosseno de α são respetivamente iguais ao seno e ao cosseno de α' e designá-los também respetivamente por seno e cosseno de $\hat{\alpha}$.
   8. Determinar, dado um triângulo $[ABC]$, fixadas unidades de comprimento e de amplitude de ângulos e conhecidas as medidas dos comprimentos dos três lados (LLL), as medidas do comprimento de dois dos lados e da amplitude do ângulo interno por eles formado (LAL) ou as medidas do comprimento de um dos lados e das amplitudes dos dois ângulos internos que lhe são adjacentes (ALA), as medidas dos comprimentos dos restantes lados e as medidas das amplitudes dos restantes ângulos internos do triângulo, designar este procedimento por «resolução do triângulo $[ABC]$» e obter valores aproximados destas medidas na forma de dízimas finitas até uma dada ordem, utilizando uma máquina de calcular.

Orientação de ângulos num plano e rotações

2. *Definir ângulos orientados e as respetivas medidas de amplitude*

    1. Identificar «ângulo orientado» como um ângulo não nulo nem giro no qual se fixa um dos lados para «lado origem», designando o outro por «lado extremidade».
    2. Identificar um ângulo orientado de um plano como tendo «orientação negativa» quando, imaginando os movimentos dos ponteiros de um relógio cujo mostrador se supõe situado nesse plano π, os ponteiros podem descrever o ângulo começando no lado origem e terminando no lado extremidade, identificar um ângulo orientado como tendo «orientação positiva» no caso contrário, e afetar do sinal «$-$» as amplitudes dos primeiros enquanto ângulos orientados, bem como as respetivas medidas.

3. *Definir rotações segundo ângulos orientados*

    1. Designar, dados dois pontos O e M e um ângulo orientado α em determinado plano, um ponto M' por «imagem do ponto M pela rotação de centro O e de ângulo orientado α» quando $\overline{OM} = \overline{OM'}$ e $\dot{O}M'$ for o lado extremidade do ângulo orientado de lado origem $\dot{O}M$ e com a mesma amplitude de α enquanto ângulos orientados.

4. *Definir ângulos generalizados*

    1. Identificar um «ângulo generalizado» (ou «ângulo trigonométrico») como um par ordenado (α, n), onde α é um ângulo orientado ou um ângulo nulo e n é um número inteiro, que é positivo ou nulo se α tiver orientação positiva e negativo ou nulo se α tiver orientação negativa, interpretando-o intuitivamente como o resultado de rodar o lado extremidade do ângulo α (ou, no caso de α ser nulo, o único lado, coincidente com α), realizando $|n|$ voltas completas, no sentido determinado pelo sinal de n.
    2. Designar o lado origem (respetivamente extremidade) de um ângulo orientado α também por «lado origem (respetivamente extremidade) dos ângulos generalizados (α, n)» e um ângulo nulo ω também como «lado origem e extremidade dos ângulos generalizados (ω, n)».
    3. Identificar, fixado um ângulo unidade e sendo g a medida de amplitude dos ângulos giros, a medida de amplitude do ângulo generalizado (α, n) como $a + ng$, onde a é a medida de amplitude do ângulo orientado ou nulo α.
    4. Reconhecer que dois ângulos generalizados (α, n) e (α', n') têm a mesma amplitude se e somente α e α' tiverem a mesma amplitude e $n = n'$ e justificar, fixado um ângulo unidade que, dado um número real x e fixada uma semirreta para lado origem, existe um e apenas um ângulo generalizado cuja medida de amplitude é igual a x.
    5. Identificar, fixado um ponto O e um ângulo generalizado (α, n), a «rotação de centro O e ângulo generalizado (α, n)», no caso de α ser um ângulo nulo, como a aplicação identidade no plano e nos restantes casos como a aplicação do plano sobre si próprio que a cada ponto distinto de O associa a imagem desse ponto pela rotação de centro O e ângulo orientado α e ao ponto O associa o próprio ponto O.
    6. Reconhecer, dado um ponto O e ângulos generalizados (α, n) e (α', n'), α, α' ângulos orientados, que as rotações de centro O e ângulos generalizados (α, n) e (α', n') coincidem se e somente se α e α' tiverem a mesma amplitude ou se tiverem sentidos contrários e os valores absolutos das respetivas amplitudes tiverem soma igual à medida de um ângulo giro.

5. *Definir as razões trigonométricas dos ângulos generalizados*

    1. Designar um referencial ortonormado num dado plano como «direto» quando o primeiro quadrante, considerado como ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e lado extremidade coincidente com semieixo positivo Oy, tem orientação positiva.
    2. Designar, dado um referencial ortonormado em dado plano, a circunferência centrada na origem e de raio 1 desse plano também por «circunferência trigonométrica» (ou, por abuso de linguagem, por «círculo trigonométrico»).
    3. Identificar, dado um referencial ortonormado direto em dado plano e um ângulo orientado α desse plano, o «seno de α» (respetivamente o «cosseno de α») como a ordenada (respetivamente a abcissa) do ponto P, interseção da circunferência trigonométrica com o lado extremidade do ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e de amplitude igual a α, representá-lo por $\sin(\alpha)$, $\operatorname{sen}(\alpha)$, $\sin \alpha$ ou $\operatorname{sen} \alpha$ (respetivamente por $\cos(\alpha)$ ou por $\cos \alpha$), reconhecer que este valor não depende da escolha do referencial, e que esta definição estende a definição de seno (respetivamente de cosseno) de ângulos geométricos convexos, se o identificarmos com o seno (respetivamente cosseno) de um ângulo orientado com a mesma amplitude.
    4. Identificar, dado um referencial ortonormado direto em dado plano, e um ângulo orientado α desse plano de lados não perpendiculares, a «tangente de α» como a ordenada do ponto P, interseção da reta de equação $x = 1$, tangente à circunferência trigonométrica no ponto de coordenadas $(1,0)$, com a reta suporte do lado extremidade do ângulo orientado de lado origem coincidente com o semieixo positivo Ox e de amplitude igual a α, representá-la por $\tan(\alpha)$, $\operatorname{tg}(\alpha)$, $\tan \alpha$ ou $\operatorname{tg} \alpha$, reconhecer que $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ e que esta definição estende a definição de tangente de um ângulo agudo, se a identificarmos com a tangente de um ângulo orientado com a mesma amplitude.
    5. Identificar, dado um ângulo generalizado $\theta = (\alpha, n)$, o «seno de θ», o «cosseno de θ» e a «tangente de θ» como, respetivamente, o seno, o cosseno e a tangente de α.
    6. Justificar, dados ângulos generalizados θ e θ' com a mesma amplitude $\hat{\theta} = \widehat{\theta'}$, que o seno, o cosseno e a tangente de θ são respetivamente iguais ao seno, ao cosseno e à tangente de θ' e designá-los também respetivamente por seno, cosseno e tangente de $\hat{\theta}$.

6. *Definir medidas de ângulos em radianos*

    1. Designar por «radiano» a amplitude de um ângulo ao centro de uma circunferência que nela determina um arco de comprimento igual ao raio e reconhecer que o radiano não depende da escolha da circunferência, aproximando o comprimento do arco de circunferência por comprimentos de linhas poligonais inscritas.
    2. Efetuar conversões de medidas de amplitude de ângulos de graus para radianos e de radianos para graus, começando por justificar que um ângulo giro tem amplitude 2π radianos.

7. *Definir funções trigonométricas e deduzir propriedades*

    1. Identificar, dado um número real x, a «tangente de x» (respetivamente o «seno de x» e o «cosseno de x») como a tangente (respetivamente o seno e o cosseno) de um ângulo generalizado de medida de amplitude igual a x, em radianos, sempre que esse valor esteja definido, e designar a função assim determinada nesse conjunto de números reais e com conjunto de chegada $\mathbb{R}$ por «(função) tangente» (respetivamente «(função) seno» e «(função) cosseno»), representando-a por «$\tan$» ou «tg» (respetivamente por «$\sin$» ou «sen» e por «$\cos$») e o respetivo valor num ponto x do domínio também por $\tan x$ ou tg x (respetivamente por «$\sin x$» ou «$\text{sen}\, x$» e por «$\cos x$»).
    2. Identificar, dado um número $P > 0$, uma função f como «periódica de período P» ou «P-periódica» se para todo o $x \in D_f$, $x + P \in D_f$ e $f(x + P) = f(x)$.
    3. Designar, dada uma função f, o número $P_0 > 0$ por «período fundamental de f ou por «período positivo mínimo de f» se f for P_0-periódica e não admitir outro período P inferior a P_0.
    4. Justificar que as funções reais de variável real seno e cosseno têm domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $[-1,1]$ e período fundamental $P_0 = 2\pi$.
    5. Provar que os zeros da função seno (respetivamente da função cosseno) são os números da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (respetivamente da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).
    6. Justificar que a função seno (respetivamente a função cosseno) admite extremos locais nos pontos de abcissa da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (respetivamente da forma x= $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).
    7. Provar que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, reconhecendo que esta igualdade generaliza a fórmula fundamental da Trigonometria, e referi-la igualmente por essa designação.
    8. Justificar que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$, $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$, $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x$ e $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x$.
    9. Justificar que a função real de variável real tangente tem domínio $D_{tan} = \mathbb{R} \backslash \{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, contradomínio $\mathbb{R}$, período fundamental $P_0 = \pi$ e que os respetivos zeros são os números da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
    10. Justificar que as funções seno e tangente são ímpares e a função cosseno é par.

8. *Definir funções trigonométricas inversas*

    1. +Reconhecer que as funções $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $\cos : [0, \pi] \to [-1,1]$ e $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, obtidas por restrição respetivamente das funções sin, cos e tan aos intervalos indicados e tomando para conjuntos de chegada os respetivos contradomínios, são bijetivas e designar as bijeções recíprocas por «(função) arco--seno» (arcsin ou arcsen), «(função) arco-cosseno» (arccos) e «(função) arco-tangente» (arctan ou arctg), respetivamente, sabendo que são valores aproximados destas funções que as calculadoras fornecem, associados às teclas, respetivamente, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$, desde que esteja selecionado o radiano para unidade de medida dos ângulos.
    2. Reconhecer, dados números reais x e α, que $\cos x = \cos \alpha$ se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$.

3. Reconhecer, dados números reais x e α, que $\sin x = \sin \alpha$ se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$.
4. Reconhecer, dados números reais x e α do domínio da função tangente, que $\tan x = \tan \alpha$ se e somente se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + k\pi$.
5. Resolver equações da forma $\sin x = a$, $\cos x = a$ e $\tan x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

9. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a resolução de triângulos.
2. +Resolver problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando ângulos e as respetivas razões trigonométricas.
3. +Resolver equações trigonométricas e problemas envolvendo fórmulas trigonométricas e a determinação de razões trigonométricas.
4. +Resolver problemas envolvendo funções trigonométricas.

Declive e inclinação de uma reta

1. Definir a inclinação de uma reta

1. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dada uma reta r que passa pela origem e é distinta do eixo Ox, a «inclinação de r» como a amplitude do ângulo convexo formado pelo semi-eixo positivo das abcissas e a semirreta $\dot{O}P$, onde P é um qualquer ponto de r de ordenada positiva, e identificar a inclinação do eixo das abcissas como a amplitude nula.
2. Identificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O, a inclinação de uma reta r como a inclinação da reta paralela a r que passa por O.
3. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que o declive de uma reta não vertical é igual à tangente trigonométrica da respetiva inclinação.

Produto escalar

2. Definir e conhecer propriedades do produto escalar de vetores

1. Identificar, fixada uma unidade de comprimento, dados vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o «produto escalar (ou interno) de $\vec{u}$ e $\vec{v}$» como o número $\overline{OP} \times \overline{OQ'}$, (respetivamente o número $-\overline{OP} \times \overline{OQ'}$) onde, fixado um ponto O, $P = O + \vec{u}$, $Q = O + \vec{v}$, Q' é a projeção ortogonal de Q na reta OP, se $\overrightarrow{OQ'}$ e $\overrightarrow{OP}$ tiverem o mesmo sentido (respetivamente se tiverem sentidos contrários), reconhecendo que este valor é independente da escolha do ponto O, identificar o produto escalar de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como nulo se um dos vetores for nulo e representar o produto escalar de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por «$\vec{u} \,.\, \vec{v}$».
2. Identificar, dados vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, «ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$» como qualquer ângulo convexo, nulo ou raso POQ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, reconhecendo que têm todos a mesma amplitude, designar também essa amplitude por «ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$» quando essa designação não for ambígua, e representá-la por «$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$».
3. Provar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, que $\vec{u} \,.\, \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.
4. Identificar vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como «perpendiculares» quando um deles for nulo ou quando, não sendo nulo nenhum dos dois, forem perpendiculares duas retas de vetores diretores respetivamente iguais a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, e indicar que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares escrevendo «$\vec{u} \perp \vec{v}$».
5. Justificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.
6. Justificar, dado um vetor $\vec{u}$, que $\vec{u} \,.\, \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
7. Justificar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que $\vec{u} \,.\, \vec{v} = \vec{v} \,.\, \vec{u}$.
8. +Provar, dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e um número real λ, que $(\lambda \vec{u}) \,.\, \vec{v} = \lambda(\vec{u} \,.\, \vec{v})$.
9. +Provar, dados vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, que $(\vec{u} + \vec{v}) \,.\, \vec{w} = \vec{u} \,.\, \vec{w} + \vec{v} \,.\, \vec{w}$.
10. Justificar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado e vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$, que $\vec{u} \,.\, \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$, começando por justificar que $\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_2} = 1$ e $\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2} = 0$.

11. Provar, fixado um plano munido de um referencial ortonormado, que duas retas de declives respetivamente iguais a m e a m' são perpendiculares se e somente se $mm' = -1$.
12. Justificar, fixado um referencial ortonormado do espaço e dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ do espaço, que $\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, começando por justificar que $\vec{e_1}.\vec{e_1} = \vec{e_2}.\vec{e_2} = \vec{e_3}.\vec{e_3} = 1$ e $\vec{e_1}.\vec{e_2} = \vec{e_1}.\vec{e_3} = \vec{e_2}.\vec{e_3} = 0$.

3. *Determinar equações de planos no espaço*

1. Identificar um vetor $\vec{v}$ como «normal a um plano α» se for nulo ou, não sendo nulo, se as retas de vetor diretor $\vec{v}$ forem perpendiculares a α .
2. Justificar, dados planos α e β e vetores $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ não nulos, normais respetivamente a α e β, que α e β são (estritamente) paralelos ou coincidentes se e somente se $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ forem colineares e α e β são perpendiculares se e somente se $\vec{v}_\alpha$ e $\vec{v}_\beta$ forem perpendiculares.
3. Justificar, dado um vetor não nulo $\vec{v}$ normal a um plano α e um ponto $P_0 \in \alpha$, que para todo o ponto P do plano, $P \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}.\vec{v} = 0$.
4. Reconhecer, fixado um referencial ortonormado do espaço e dado um vetor não nulo $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ e um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, que existe um único plano α que passa por P_0 tal que $\vec{v}$ é normal a α e provar que $P(x, y, z) \in \alpha$ se e somente se $v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0$.
5. Justificar que as equações da forma $ax + by + cz + d = 0$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0,0,0)$, são equações de planos e, reciprocamente, que qualquer plano admite uma equação cartesiana daquela forma.
6. Justificar, dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0,0,0)$, que o vetor de coordenadas (a, b, c) é normal ao plano de equação $ax + by + cz + d = 0$.
7. Identificar, dado um plano α, um vetor $\vec{v}$ como «paralelo a α» se $\vec{v}$ for nulo ou, não sendo nulo, se for vetor diretor de uma reta de α.
8. +Provar, dado um plano α, um ponto $P_0 \in \alpha$ e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares paralelos a α, que para todo o ponto P do espaço, $P \in \alpha \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}, P = P_0 + s\vec{u} + t\vec{v}$ e designar esta equação por «equação vetorial do plano α».
9. Justificar, dado um plano α, um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ e dois vetores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ não colineares paralelos a α, que para todo o ponto $P(x, y, z)$ do espaço, $P \in \alpha \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}, x = x_0 + su_1 + tv_1 \wedge y = y_0 + su_2 + tv_2 \wedge z = z_0 + su_3 + tv_3$ e designar este sistema de equações por «sistema das equações paramétricas do plano α».

4. *Resolver problemas*

1. +Resolver problemas envolvendo a noção de produto escalar de vetores.
2. +Resolver problemas relativos à determinação de equações de retas do plano em situações diversas envolvendo a noção de perpendicularidade.
3. +Resolver problemas relativos à determinação de equações de planos em situações diversas envolvendo a noção de perpendicularidade e de paralelismo.
4. +Resolver problemas envolvendo equações de planos e de retas no espaço.

Generalidades sobre sucessões

1. *Caracterizar o conjunto dos majorantes e dos minorantes de um conjunto de números reais*

    1. Identificar um subconjunto A de $\mathbb{R}$ como «majorado» quando existe um número real M tal que $\forall a \in A, a \leq M$ e designar M por «majorante de A».
    2. Identificar um subconjunto A de $\mathbb{R}$ como «minorado» quando existe um número real m tal que $\forall a \in A, a \geq m$ e designar m por «minorante de A».
    3. Identificar um subconjunto A de $\mathbb{R}$ como «limitado» quando for majorado e minorado.
    4. Designar por «máximo» (respetivamente por «mínimo») de um subconjunto A de $\mathbb{R}$ um majorante (respetivamente um minorante) de A pertencente a A e justificar que se existir é único.

2. *Estudar propriedades elementares de sucessões reais*

    1. Identificar uma «sucessão real» (ou simplesmente «sucessão» quando esta designação não for ambígua) como uma função u de domínio $\mathbb{N}$ e de conjunto de chegada $\mathbb{R}$, e representar por «u_n», dito «termo geral da sucessão», a imagem $u(n)$ de $n \in \mathbb{N}$ por u e por «$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$» (ou simplesmente por «(u_n)», ou ainda por «u_n», quando estas notações não forem ambíguas) a própria sucessão u.
    2. Identificar uma sucessão (u_n) como «crescente» (respetivamente «decrescente») quando o for como função real de variável real, ou seja, quando para quaisquer $p_1, p_2 \in \mathbb{N}, p_1 > p_2 \Longrightarrow u_{p_1} > u_{p_2}$ (respetivamente $p_1 > p_2 \Longrightarrow u_{p_1} < u_{p_2}$) e reconhecer que (u_n) é crescente (respetivamente decrescente) se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ (respetivamente $u_{n+1} < u_n$).
    3. Identificar uma sucessão (u_n) como «crescente (respetivamente decrescente) em sentido lato» quando para quaisquer $p_1, p_2 \in \mathbb{N}, p_1 > p_2 \Longrightarrow u_{p_1} \geq u_{p_2}$ (respetivamente $p_1 > p_2 \Longrightarrow u_{p_1} \leq u_{p_2}$) e reconhecer que (u_n) é crescente (respetivamente descrescente) em sentido lato se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (respetivamente $u_{n+1} \leq u_n$).
    4. Identificar uma sucessão (u_n) como «majorada» se o conjunto $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos respetivos termos for majorado e designar os majorantes deste conjunto também por «majorantes da sucessão».
    5. Identificar uma sucessão (u_n) como «minorada» se o conjunto $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos respetivos termos for minorado e designar os minorantes deste conjunto também por «minorantes da sucessão».
    6. Designar por «limitada» uma sucessão (u_n) simultaneamente majorada e minorada.

Princípio de Indução matemática

3. *Utilizar o princípio de indução matemática*

    1. Saber, dada uma condição $T(n)$, que a proposição $\forall n \in \mathbb{N},\ T(n)$ é verdadeira se $T(1)$ for verdadeira e se, além disso, para todo o $n \in \mathbb{N},\ T(n) \Rightarrow T(n+1)$, designar este resultado por «princípio de indução (matemática)», $T(n)$, enquanto antecedente da

implicação $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, por «hipótese de indução» e a proposição $\forall n \in \mathbb{N}$, $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ por «hereditariedade» da propriedade $T(n)$ e saber que o princípio de indução pode estender-se, *mutatis mutandis*, fixado um número inteiro p e uma condição $T(n)$, à demonstração da proposição $\forall n \in \mathbb{N}_p \; T(n)$, onde $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{Z} : \; n \geq p\}$.

2. Saber, dada uma função $f: A \longrightarrow A$ e $a \in A$, que existe uma única sucessão (u_n) de elementos de A tal que $u_1 = a$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, referir que estas condições definem a sucessão (u_n) «por recorrência» e saber que estes resultados podem estender-se, *mutatis mutandis*, à definição de funções de $\mathbb{N}_p$ em A, onde $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{Z} : \; n \geq p\}$, também designadas por «sucessões (indiciadas em $\mathbb{N}_p$)».
3. +Utilizar o princípio de indução para efetuar demonstrações.

Progressões aritméticas e geométricas

4. *Calcular o termo geral de progressões aritméticas e geométricas*

1. Designar, dados $a, r \in \mathbb{R}$, por «progressão aritmética de primeiro termo a e razão r» a sucessão definida por recorrência por $u_1 = a$ e, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
2. Justificar que o termo geral da progressão aritmética de primeiro termo $a \in \mathbb{R}$ e de razão $r \in \mathbb{R}$ é dado por $u_n = a + (n-1)r$.
3. Designar, dados $a, r \in \mathbb{R}$, por «progressão geométrica de primeiro termo a e razão r» a sucessão definida por recorrência por $u_1 = a$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times r$.
4. Justificar que o termo geral da progressão geométrica de primeiro termo a e razão r não nula é dado por $u_n = ar^{n-1}$.

5. *Calcular a soma de um número finito de termos de progressões aritméticas e geométricas*

1. Designar, dado $N \in \mathbb{N}$, por «progressão aritmética (finita) de comprimento N» (respetivamente «progressão geométrica (finita) de comprimento N»), a sequência $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ «dos N primeiros termos» de uma progressão aritmética (respetivamente geométrica) (u_n).
2. +Reconhecer, dado $N \in \mathbb{N}$, que a soma dos termos de uma progressão aritmética de comprimento N, $(u_1, u_2, \dots, u_N)$, é dada por $S = \sum_{i=1}^{N} u_i = \frac{u_1 + u_N}{2} \times N$.
3. +Reconhecer, dado $N \in \mathbb{N}$, que a soma dos termos de uma progressão geométrica de comprimento N, de primeiro termo u_1 e de razão r diferente de 1, é dada por $S = u_1 \frac{1-r^N}{1-r}$.

Limites de sucessões

6. *Definir o limite de uma sucessão*

1. Identificar, dada uma sucessão (u_n), um número real l como «limite da sucessão (u_n)» ou como «limite de u_n quando n tende para $+\infty$» quando, para todo o número real $\delta > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \delta$, referir, nesta situação, que «u_n tende para l» («$u_n \to l$»), e designar a sucessão (u_n) por «convergente» quando um tal limite l existe e por «divergente» quando não for convergente.

2. Provar que uma sucessão convergente (u_n) admite um único limite e representá-lo por «$\lim_{n\to+\infty} u_n$», «$\lim_n u_n$» ou simplesmente por «$\lim u_n$».
3. +Reconhecer que as sucessões convergentes são limitadas.
4. Saber que uma sucessão crescente (respetivamente decrescente) em sentido lato e majorada (respetivamente minorada) é convergente.
5. Identificar uma sucessão (u_n) como «tendo limite $+\infty$» ($\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim_n u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$) quando, para todo o $L > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$, referir, nesta situação, que «u_n tende para $+\infty$» («$u_n \to +\infty$») e reconhecer que uma tal sucessão é divergente.
6. Identificar uma sucessão (u_n) como «tendo limite $-\infty$» ($\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, $\lim_n u_n = -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$) quando, para todo o $L > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n < -L$, referir, nesta situação, que «u_n tende para $-\infty$» («$u_n \to -\infty$») e reconhecer que uma tal sucessão é divergente (e não tende para $+\infty$).
7. Reconhecer, dada uma sucessão (u_n) com limite $l \in \mathbb{R}$ ou tendendo para $+\infty$ ou para $-\infty$ (respetivamente sem limite), que qualquer sucessão (v_n) que possa ser obtida de (u_n) alterando apenas um número finito de termos, tem o mesmo limite (respetivamente não tem limite).
8. +Provar, dada uma sucessão (u_n) limitada e uma sucessão (u_n) com limite nulo, que $\lim u_n v_n = 0$.
9. Provar, dados números reais a, b, c e d e utilizando a definição de limite, que o limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ $(cn + d \neq 0$ para todo o $n)$ é igual a $\frac{a}{c}$ se $c \neq 0$, a $+\infty$, se $c = 0$ e $\frac{a}{d} > 0$, a $-\infty$ se $c = 0$ e $\frac{a}{d} < 0$ e a $\frac{b}{d}$, se $a = c = 0$, ou seja, em particular, que o limite de uma sucessão constante é igual à própria constante.
10. Provar, utilizando a definição de limite, que, dado um número racional p, $\lim n^p = +\infty$ se $p > 0$ e $\lim n^p = 0$ se $p < 0$.
11. Provar, dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes, com limites respetivamente iguais a l_1 e l_2, que a sucessão $(u_n + v_n)$ é convergente e que $\lim\ (u_n + v_n) = l_1 + l_2$.
12. #Provar, dadas duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes, com limites respetivamente iguais a l_1 e l_2, que a sucessão $(u_n v_n)$ é convergente e que $\lim u_n v_n = l_1 l_2$.
13. #Provar, dada uma sucessão (u_n) convergente de termos não nulos, com limite l_1 não nulo, que $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l_1}$ e justificar que se for também dada uma sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, com limite l_2 então a sucessão $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ é convergente e $\lim \frac{v_n}{u_n} = \frac{l_2}{l_1}$.
14. #Provar, dada uma sucessão convergente (u_n) e um número real a, que a sucessão de termo geral au_n é convergente e que $\lim\ (au_n) = a \lim u_n$.
15. #Provar, dada uma sucessão convergente (u_n) e um número racional r, que, se $r \in \mathbb{N}$, ou se os termos da sucessão forem todos não negativos e r for positivo, ou ainda se os termos da sucessão forem todos positivos, então a sucessão de termo geral $(u_n)^r$ é convergente e $\lim\ (u_n)^r = (\lim u_n)^r$.
16. Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n), com limites respetivamente $+\infty$ e $l \in \mathbb{R}$ (ou ambas com limite $+\infty$), que $\lim(u_n + v_n) = +\infty$ e representar esta propriedade por «$+\infty + l = +\infty$» (ou por «$+\infty + (+\infty) = +\infty$»).
17. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n), com limites respetivamente $-\infty$ e $l \in \mathbb{R}$ (ou ambas com limite $-\infty$), que $\lim(u_n + v_n) = -\infty$ e representar esta propriedade por «$-\infty + l = -\infty$» (ou por «$-\infty + (-\infty) = -\infty$»).

18. Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n), que apenas da informação $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = -\infty$ nada se pode concluir acerca da existência de $\lim(u_n + v_n)$ e referir esta situação por «indeterminação do tipo $(+\infty) + (-\infty)$».
19. #Provar, dadas sucessões (u_n), com limite $+\infty$, e (v_n) com limite $l \in \mathbb{R}^+$ ou $+\infty$ (respetivamente com limite $l \in \mathbb{R}^-$ ou $-\infty$), que $\lim(u_n v_n) = +\infty$ (respetivamente $\lim(u_n v_n) = -\infty$) e representar estas propriedades por «$(+\infty) \times l = +\infty$» e «$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$» (respetivamente por «$(+\infty) \times l = -\infty$» e «$(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$»).
20. #Provar, dadas sucessões (u_n), com limite $-\infty$, e (v_n) com limite $l \in \mathbb{R}^+$ (respetivamente com limite $l \in \mathbb{R}^-$ ou $-\infty$), que $\lim(u_n v_n) = -\infty$ (respetivamente $\lim(u_n v_n) = +\infty$) e representar esta propriedade por «$(-\infty) \times l = -\infty$» (respetivamente por «$(-\infty) \times l = +\infty$» e «$(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$»).
21. #Provar, dada uma sucessão (u_n) com limite $+\infty$ e de termos não negativos (respetivamente com limite $-\infty$) e um número racional r positivo (respetivamente $r \in \mathbb{N}$), que a sucessão de termo geral u_n^r tem limite $+\infty$ (respetivamente tem limite $+\infty$ se r for par e limite $-\infty$ se r for ímpar) e representar esta propriedade por «$(+\infty)^r = +\infty$» (respetivamente por «$(-\infty)^r = +\infty$» se r for par e por «$(-\infty)^r = -\infty$» se r for ímpar).
22. Justificar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) que apenas da informação $\lim u_n = +\infty$ (ou $\lim u_n = -\infty$) e $\lim v_n = 0$ nada se pode concluir acerca da existência de $\lim(u_n v_n)$ e referir esta situação por «indeterminação do tipo $\infty \times 0$».
23. #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos, positiva a partir de certa ordem, com limite nulo («$\lim v_n = 0^+$»), que $\lim \frac{1}{v_n} = +\infty$ e representar esta propriedade por «$\frac{1}{0^+} = +\infty$».
24. #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos, negativa a partir de certa ordem, com limite nulo («$\lim v_n = 0^-$»), que $\lim \frac{1}{v_n} = -\infty$ e representar esta propriedade por «$\frac{1}{0^-} = -\infty$».
25. #Provar, dada uma sucessão (v_n) de termos não nulos e a tender para $+\infty$ ou para $-\infty$, que $\lim \frac{1}{v_n} = 0$ e representar esta propriedade por «$\frac{1}{\infty} = 0$».
26. Justificar, dadas sucessões (v_n) e (v_n), que apenas da informação $\lim u_n = \pm\infty$ e $\lim v_n = \pm\infty$ (respetivamente $\lim u_n = \lim v_n = 0$, onde (v_n) não se anula) nada se pode concluir acerca da existência do limite $\lim \frac{u_n}{v_n}$ e referir esta situação por «indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$» (respetivamente «indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$»).
27. Justificar, dado um polinómio $P(x)$ de grau superior ou igual a 1, que a sucessão $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $\lim P(n) = +\infty$ se o coeficiente do termo de maior grau da forma reduzida de P for positivo e que $\lim P(n) = -\infty$ no caso contrário.
28. Calcular, dadas sucessões $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios, $Q(x)$ sem raízes naturais, o limite $\lim \frac{P(n)}{Q(n)}$ e relacioná-lo com os graus de $P(n)$ e $Q(n)$ e com os coeficientes dos termos de maior grau das respetivas formas reduzidas.
29. +Provar, dado um número real $a > 0$, que $\lim a^n = +\infty$ se $a > 1$ e que $\lim a^n = 0$ se $a < 1$.

30. +Provar, dado um número real $a > 0$, que $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, começando por observar, no caso de $a \geq 1$, que $1 \leq a \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.
31. Saber de memória os limites das sucessões de termo geral n^p $(p \in \mathbb{Q})$, a^n e $\sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$.

7. *Resolver problemas*

1. +Resolver problemas envolvendo o estudo da monotonia e a determinação de majorantes e minorantes de sucessões.
2. +Resolver problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas.
3. +Calcular, por meios algébricos, o limite de sucessões em situação indeterminada e referir esse cálculo como um «levantamento da indeterminação».
4. +Resolver problemas envolvendo a noção de limite de uma sucessão.

Limites segundo Heine de funções reais de variável real

1. *Definir limite de uma função num ponto e estudar as respetivas propriedades fundamentais*

    1. Identificar, dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, a como «ponto aderente a A» quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.
    2. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como «limite de $f(x)$ quando x tende para a» quando a for aderente ao domínio D_f de f e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por «$\lim\limits_{x\to a} f(x)$», referir, nesta situação, que «$f(x)$ tende para b quando x tende para a» e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.
    3. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como o «limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a» quando $b = \lim\limits_{x\to a} f|_{]-\infty,a[}(x)$, representar b por $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, designá-lo também por «limite de $f(x)$ à esquerda de a», referir, nesta situação, que «$f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores inferiores a a» e estender esta definição ao caso de limites infinitos.
    4. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como o «limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a» quando $b = \lim\limits_{x\to a} f|_{]a,+\infty[}(x)$, representar b por $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, designá-lo também por «limite de $f(x)$ à direita de a», referir, nesta situação, que «$f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores superiores a a» e estender esta definição ao caso de limites infinitos.
    5. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto a aderente ao respetivo domínio D_f, que se $a \notin D_f$ e se os limites $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existirem e forem iguais, então existe o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
    6. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in D_f$, que se os limites $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existirem e forem ambos iguais a $f(a)$, então existe o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
    7. Identificar, dada uma função real de variável real f cujo domínio não é majorado como «limite de $f(x)$ quando x tende para mais infinito» quando para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $+\infty$, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, referir, nesta situação, que «$f(x)$ tende para b quando x tende para mais infinito» e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.
    8. Identificar, dada uma função real de variável real f cujo domínio não é minorado como «limite de $f(x)$ quando x tende para menos infinito» quando para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $-\infty$, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, referir, nesta situação, que «$f(x)$ tende para b quando x tende para menos infinito» e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.

9. Justificar que os limites da soma, do produto e do quociente de funções $f: D_f \to \mathbb{R}$ e $g: D_g \to \mathbb{R}$ e do produto por um escalar α e da potência de expoente racional r de uma função $f: D_f \to \mathbb{R}$, se calculam, em pontos aderentes aos domínios respetivamente de $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$, αf e f^r a partir dos limites de f e g nesse pontos de forma análoga ao caso das sucessões, reconhecendo que se mantêm as situações indeterminadas.
10. Justificar, dado $D \subset \mathbb{R}$, funções $f: D \to \mathbb{R}$ e $g: D \to \mathbb{R}$ e um ponto a aderente a D, que se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e se g é limitada então $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = 0$ e estender este resultado ao caso de limites por valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$.
11. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g e um ponto a aderente a D_{gof}, que se $\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to b} g(x) = c \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x \to a} (gof)(x) = c$.

2. *Definir a noção de continuidade e as respetivas propriedades fundamentais*

1. Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio que se o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe então é igual a $f(a)$.
2. Designar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, a função f por «contínua em a» quando o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
3. Designar, dada uma função real de variável real f de domínio D_f, a função f por «contínua no conjunto $A \subset D_f$» quando f é contínua em todos os pontos de A e simplesmente por «contínua» quando é contínua em todos os pontos de D_f.
4. Saber que se uma função real de variável real f de domínio D_f for contínua em $a \in D_f$ e $f(a) \neq 0$ (respetivamente $f(a) > 0$ ou $f(a) < 0$) então existe uma vizinhança V de a tal que f não se anula (respetivamente f é positiva ou f é negativa) em $V \cap D_f$.
5. Justificar que se as funções reais de variável real $f: D_f \to \mathbb{R}$ e $g: D_g \to \mathbb{R}$ são contínuas num ponto a, então as funções $f + g$, $f - g$ e $f \times g$ são contínuas em a e, se $g(a) \neq 0$, a função $\frac{f}{g}$ é contínua em a.
6. Designar por «função racional» uma função real de variável real dada por uma expressão da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios.
7. Justificar que as funções polinomiais e racionais são contínuas.
8. Justificar que as potências de expoente racional são contínuas.
9. Saber que as funções seno e cosseno são contínuas e justificar que a função tangente é contínua.
10. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g e $a \in D_{gof}$, que se f é contínua em a e g é continua em $f(a)$ então a função composta gof é contínua em a.
11. Justificar a continuidade de funções obtidas por aplicação sucessiva de operações de adição algébrica, multiplicação, divisão e composição de funções «de referência para a continuidade»: funções polinomiais, potências de expoente racional e as funções cosseno, seno e tangente.

3. Definir assíntotas ao gráfico de uma função

1. Identificar, dado um referencial cartesiano, uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, a reta de equação $x = a$ como « assíntota vertical ao gráfico de f» quando pelo menos um dos limites laterais de f no ponto a for infinito.
2. Designar, dada uma função real de variável real f e um referencial cartesiano, a reta de equação $y = mx + b$ ($m, b \in \mathbb{R}$) por «assíntota ao gráfico de f em $+\infty$» (respetivamente por «assíntota ao gráfico de f em $-\infty$») se $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - (mx + b)) = 0$ (respetivamente se $\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) - (mx + b)) = 0$) e designá-la, quando $m = 0$, por «assíntota horizontal».
3. Provar, dada uma função real de variável real f, que a condição $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ (respetivamente $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m$) é necessária (mas não suficiente) para que exista uma reta de declive m que seja assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ (respetivamente em $-\infty$).

4. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções racionais.
2. +Calcular, por meios algébricos, limites de funções reais de variável real em situação de indeterminação e referir um desses cálculos como um «levantamento da indeterminação».
3. +Resolver problemas envolvendo a noção de limite e de continuidade de uma função real de variável real.
4. +Resolver problemas envolvendo a determinação das assíntotas e da representação gráfica de funções racionais definidas em $\mathbb{R}\backslash\{c\}$ por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$.
5. +Resolver problemas envolvendo a determinação de assíntotas ao gráfico de funções racionais e de funções definidas pelo radical de uma função racional.

Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

5. Definir a noção de derivada

1. Identificar, dada uma função real de variável real f e dois pontos a e b do respetivo domínio, a «taxa média de variação de f entre a e b» como $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
2. Justificar, dada uma função real de variável real f e dois pontos a e b do respetivo domínio, que o declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ é igual à taxa média de variação de f entre a e b.
3. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto x_0 do respetivo domínio, a «taxa instantânea de variação de f no ponto x_0» como o limite $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, quando este existe e é finito, designá-lo por «derivada de f no ponto x_0», representá-lo por «$f'(x_0)$» e, nesse caso, identificar a função f como «diferenciável em x_0» ou «derivável em x_0».
4. Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto x_0 do respetivo domínio, que o limite $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe se e somente se o limite $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existir e que, nesse caso, ambos os limites são iguais.

5. Identificar, dada uma função real de variável real f diferenciável em $x_0 \in D_f$ e um referencial ortonormado, a «reta tangente ao gráfico de f no ponto $P_0(x_0, f(x_0))$» como a reta de declive $f'(x_0)$ que passa por P_0 e justificar, representando por $M(x)$, $x \in D_f$, o declive da reta secante ao gráfico de f que passa pelo ponto P_0 e pelo ponto $P(x, f(x))$, que $\lim_{x \to x_0} M(x) = f'(x_0)$.

6. *Aplicar a noção de derivada à cinemática do ponto*

1. Identificar, fixados um instante τ_0 para origem das medidas de tempo, uma unidade de tempo T, uma reta numérica r com unidade de comprimento L e um intervalo I, uma função $p : I \to \mathbb{R}$, como «função posição de um ponto P que se desloca na reta r durante o intervalo de tempo I», se, para cada $t \in I$, $p(t)$ for a abcissa do ponto de r que representa a posição que P ocupa, t unidades de tempo T depois de τ_0 se $t > 0$, ou $|t|$ unidades de tempo T antes de τ_0 se $t < 0$, designando também por «instante», neste contexto, cada $t \in I$.
2. Identificar, fixados um instante τ_0 para origem das medidas de tempo, uma unidade de tempo T, uma reta numérica r com unidade de comprimento L, um intervalo I, a função posição p de um ponto P que se desloca na reta r durante o intervalo de tempo I, e dados dois instantes $t_1 < t_2$ de I, a «velocidade média de P no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ na unidade L/T» como a taxa média de variação de p entre t_1 e t_2 , $\frac{p(t_2)-p(t_1)}{t_2-t_1}$, e, para $t \in I$, a «velocidade instantânea de P no instante t na unidade L/T» como a derivada de p em t, $p'(t)$, caso exista.

7. *Operar com derivadas*

1. Designar, dada uma função real de variável real f, a «função derivada de f» como a função de domínio $D_{f'} = \{x \in D_f : f \text{ é diferenciável em } x\}$ que a cada $x \in D_{f'}$ faz corresponder $f'(x)$.
2. Identificar uma função real de variável real como «diferenciável num conjunto A» quando é diferenciável em todos os pontos de A.
3. Justificar que se uma função real de variável real f é diferenciável num conjunto A e é crescente (respetivamente decrescente), no sentido lato, nesse conjunto, então para todo o $x \in A$, $f'(x) \geq 0$ (respetivamente $f'(x) \leq 0$).
4. Provar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, que se f é diferenciável em a, f é contínua em a e justificar que a recíproca não é verdadeira.
5. Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D e um número real k, que as funções $f + g$ e kf são diferenciáveis em a e que se tem $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ e $(kf)'(a) = kf'(a)$.
6. #Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de *D,* que a função fg é diferenciável em a e que $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

7. #Provar, dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ e funções reais de variável real $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ diferenciáveis num ponto a de D, com $g(a) \neq 0$, que a função $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a e que $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.
8. +Provar, dada uma função $f: D_f \to \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $a \in D_f$ e uma função real de variável real $g: D_g \to \mathbb{R}$ tal que $D'_f \subset D_g$, diferenciável em $f(a)$, que a função composta gof é diferenciável em a e que $(gof)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.
9. Calcular, utilizando a definição, uma expressão analítica para os valores das funções derivadas das «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» definidas por $x, x^2, x^3, \frac{1}{x}$ e $\sqrt{x}$, ou constantes, e saber de memória estes resultados.
10. Provar, dado um número natural n (respetivamente dado um número inteiro n negativo), que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}$ (respetivamente de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$) definida por $f(x) = x^n$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = nx^{n-1}$, considerando também estas funções como «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» e saber de memória este resultado.
11. +Provar, dado um número natural par n (respetivamente dado um número natural ímpar $n > 1$), que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}^+$ (respetivamente de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$) definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
12. Provar, para todo o número racional α, que uma função real de variável real f de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^\alpha$ é diferenciável e que, para todo o $x \in D_f$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, considerando também estas funções como «funções de referência (para o cálculo de derivadas)» e saber de memória este resultado.
13. +Determinar, utilizando as regras de derivação e as derivadas das funções de referência, uma expressão analítica para as derivadas de funções obtidas por aplicação sucessiva de operações de adição algébrica, multiplicação, divisão e composição a funções de referência.

8. *Aplicar a noção de derivada ao estudo de funções*

1. Provar, dada uma função real de variável real f com domínio contendo um intervalo $I =]a, b[$, $(a < b)$, e diferenciável em $x_0 \in I$, que se f atinge um extremo local em x_0 então $f'(x_0) = 0$ e dar um contraexemplo para a implicação recíproca.
2. Saber, dada uma função real de variável real f contínua em $[a, b]$, $(a < b)$, e diferenciável em $]a, b[$ que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, interpretar geometricamente este resultado e designá-lo por «Teorema de Lagrange».
3. Justificar, utilizando o Teorema de Lagrange, que se uma função real de variável real f é contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b, diferenciável em $]a, b[$ e, $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) > 0$ (respetivamente $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) < 0$) então f é estritamente crescente (respetivamente estritamente descrescente) no intervalo I.
4. Justificar, utilizando o Teorema de Lagrange, que se uma função real de variável real f é contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b, diferenciável em $]a, b[$ e $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$ (respetivamente $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) \leq 0$) então f é crescente em sentido lato (respetivamente descrescente em sentido lato) no intervalo I.

5. Justificar que se uma função real de variável real f é contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b, diferenciável em $]a, b[$ e, $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$, então f é constante em I.

9. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a determinação de equações de retas tangentes ao gráfico de funções reais de variável real.
2. +Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas e mudanças de unidades de velocidade.
3. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções reais de variável real, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos.

Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação

1. *Determinar os parâmetros da reta de mínimos quadrados*

1. Designar, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n, uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ por «desvio vertical do ponto $P_i(x_i, y_i)$ em relação à reta t» $(i \in \{1, \dots, n\})$ a quantidade $y_i - ax_i - b$, interpretá-lo geometricamente e representá-lo por «e_i».
2. Provar, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n, uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, que as condições $\sum_{i=1}^{N} e_i = 0$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$ são equivalentes, onde $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ e $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$.
3. +Reconhecer, fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n, uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano, não pertencentes a uma mesma reta vertical, e uma reta t de equação $y = ax + b$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$, ou seja, tal que é nula a soma $\sum_{i=1}^{N} e_i$ dos desvios verticais da sequência de pontos em relação à reta t, que a função definida em $\mathbb{R}$ pela expressão $f(a) = \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$ atinge um mínimo absoluto no ponto $a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$ e designar a reta t com esse declive (e ordenada na origem igual a $\bar{y} - a\bar{x}$) por «reta de mínimos quadrados» da sequência de pontos.
4. Identificar, dadas duas variáveis estatísticas quantitativas x e y em determinada população e uma amostra A de dimensão $n \in \mathbb{N}$ dessa população cujos elementos estão numerados de 1 a n, a «amostra bivariada das variáveis estatísticas x e y» (ou simplesmente «amostra de dados bivariados (quantitativos)») como a sequência $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$, representá-la por «$\underset{\sim}{(x, y)}$» e designar por «dimensão da amostra bivariada» o número natural n.
5. Determinar, em casos concretos de amostras de dados bivariados, qual das variáveis estatísticas deverá ser tomada como independente e qual deve ser tomada como dependente, utilizando argumentos que envolvam o conhecimento empírico das condicionantes físicas (ou outras) que poderão ter determinado a estrutura de relação entre as duas variáveis estatísticas.
6. Designar, dada uma amostra de dados bivariados, a variável considerada dependente por «variável resposta» e a variável considerada independente por «variável explicativa».
7. Designar, fixado um referencial ortonormado num plano, $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra de dados bivariados quantitativos $\underset{\sim}{(x, y)} = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$, por «nuvem de pontos» o conjunto $\{(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)\}$ e saber que uma análise visual e intuitiva da nuvem de pontos poderá permitir argumentar se será ou não adequada a interpretação da relação entre as duas variáveis estatísticas através do ajustamento da reta de mínimos quadrados.

8. Determinar, dada uma amostra de dados bivariados quantitativos e após a escolha da variável resposta e da variável explicativa e, ainda, da avaliação empírica da possível existência de relação linear entre as duas variáveis estatísticas mediante a observação da representação gráfica da nuvem de pontos, o declive e a ordenada na origem da reta de mínimos quadrados.
9. Designar, dado um número natural n e uma amostra de dados bivariados quantitativos $\underset{\sim}{(x,y)}$, por «coeficiente de correlação linear» o quociente $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}}$, representá-lo por «$r$» , reconhecer que $r = a\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$ onde a é o declive da reta de mínimos quadrados, justificar que r e a têm o mesmo sinal e saber que $|r|$ é sempre menor ou igual a 1, tomando o valor 1 unicamente nos casos em que todos os pontos $P_i(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq n$, estão alinhados e referir que a «associação linear entre as variáveis estatísticas» é positiva (respetivamente negativa) se $r > 0$ (respetivamente se $r < 0$) e que é tão mais «forte» quanto mais perto de 1 estiver $|r|$.

2. *Resolver problemas*

1. +Resolver problemas envolvendo a determinação da reta de mínimos quadrados.
2. +Resolver problemas cujo contexto seja o da análise de dados bivariados, envolvendo a identificação da variável resposta e da variável explicativa e a análise empírica do ajustamento da reta de mínimos quadrados.
3. +Resolver problemas envolvendo o cálculo e interpretação do coeficiente de correlação.

12.º ANO

Cálculo Combinatório CC12

Introdução ao cálculo combinatório

1. *Conhecer propriedades das operações sobre conjuntos*

    1. #Provar, dados conjuntos A e B, que $A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$ e se e somente se $A \cup B = B$ e que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
    2. Justificar, dados subconjuntos A e B de um conjunto U, que $A \subset B$ se e somente se $\bar{B} \subset \bar{A}$.
    3. #Provar, dados conjuntos A, B e C, que são verdadeiras as igualdades $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ e $A \cap A = A$, bem como as que se obtêm permutando em todas as ocorrências os símbolos «$\cap$» e «$\cup$» , e designá-las respetivamente por «associatividade», «comutatividade», «distributividade» e «idempotência» .
    4. #Provar, dado um conjunto U, que, para quaisquer subconjuntos A e B de U, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ e $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, e designar estas igualdades por «Leis de De Morgan para conjuntos».
    5. Provar, dados conjuntos A, B e C, que $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ e que $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

2. *Conhecer factos elementares da combinatória*

    1. Saber, dados conjuntos A e B, que $\#A = \#B$ se e somente se existir uma bijeção de A sobre B e nesse caso identificar os conjuntos A e B como «equipotentes».
    2. Saber, dados conjuntos A e B tais que $A \cap B = \emptyset$, que $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.
    3. +Provar, dados conjuntos A e B de cardinais respetivamente iguais a $n \in \mathbb{N}$ e a $m \in \mathbb{N}$, que o cardinal do produto cartesiano $A \times B$ é igual a $n \times m$.
    4. +Reconhecer que existem exatamente n^p sequências de $p \in \mathbb{N}_0$ elementos, não necessariamente distintos, escolhidos num conjunto de cardinal $n \in \mathbb{N}$, designar esse número por «arranjos com repetição de n elementos p a p» («${}^nA'_p$») e reconhecer que, dados n objetos, existem exatamente ${}^nA'_p$ formas distintas de efetuar p extrações sucessivas de um desses objetos, repondo o objeto escolhido após cada uma das extrações.
    5. +Designar, dado um conjunto E, por «conjunto das partes de E» o conjunto formado pelos subconjuntos de E, representá-lo por $\mathcal{P}(E)$ e reconhecer que se E tiver $p \in \mathbb{N}_0$ elementos ($\#E = p$) então $\mathcal{P}(E)$ tem 2^p elementos ($\#\mathcal{P}(E) = 2^p$).
    6. Reconhecer que existem exatamente $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ formas de ordenar os elementos de um conjunto de cardinal $n \geq 1$, designar este número por «(número de) permutações de n elementos» e representá-lo por «$n!$» («n fatorial»).
    7. Saber que, por convenção, $0! = 1$, reconhecendo que esta definição é a única para a qual a igualdade $n! = n(n-1)!$ vale também para $n = 1$.

8. +Reconhecer que existem exatamente $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ sequências de $p \in \mathbb{N}_0$ elementos distintos escolhidos num conjunto de $n \geq p$ elementos, designar este número por «(número de) arranjos (sem repetição) de n elementos p a p» («${}^nA_p$») e reconhecer que, dados n objetos, existem exatamente ${}^nA_p$ formas distintas de efetuar p extrações sucessivas de um desses objetos, sem repor o objeto escolhido após cada uma das extrações.
9. Justificar que um conjunto de $n \in \mathbb{N}_0$ elementos tem exatamente $\frac{{}^nA_p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ subconjuntos de p elementos ($0 \leq p \leq n$), e designar este número por «(número de) combinações de n elementos p a p», reconhecendo que, dado $n \in \mathbb{N}$ objetos, existem exatamente $\frac{{}^nA_p}{p!}$ formas de escolher p ($p \leq n$) de entre eles e representar este número por «${}^nC_p$», por «C_p^n» ou por «$\binom{n}{p}$», reconhecendo que se trata de um número natural.
10. +Simplificar expressões envolvendo fatoriais, arranjos e combinações.

3. Conhecer o triângulo de Pascal e o binómio de Newton

1. Justificar, dados números naturais n e p, $p \leq n$, que ${}^nC_p = {}^nC_{n-p}$ de dois modos distintos: utilizando um cálculo algébrico e um argumento combinatório.
2. Justificar, dado $n \in \mathbb{N}$, que $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k = 2^n$, interpretando esta igualdade à luz do número de subconjuntos de um conjunto de n elementos.
3. +Reconhecer, dados números naturais n e p, $p < n$, que ${}^{n+1}C_{p+1} = {}^nC_p + {}^nC_{p+1}$ e utilizar esta igualdade para construir, progressivamente, o «triângulo de Pascal», no qual figuram, na n-ésima linha, os números ${}^nC_0$, ${}^nC_1$, ${}^nC_2$, … , ${}^nC_{n-1}$ e ${}^nC_n$, por esta ordem.
4. +Reconhecer, dado $n \in \mathbb{N}$, a igualdade entre polinómios nas variáveis x e y, $(x+y)^n = \ x^n + {}^nC_1 x^{n-1}y^1 + {}^nC_2 x^{n-2}y^2 + \cdots + {}^nC_{n-1}x^1y^{n-1} + y^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k x^{n-k}y^k$, designando-a por «binómio de Newton», e por esta razão, designar os números ${}^nC_p$ igualmente por «coeficientes binomiais».

4. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo operações sobre conjuntos e cardinais de conjuntos.
2. +Resolver problemas de contagens envolvendo arranjos e combinações.
3. +Resolver problemas envolvendo o triângulo de Pascal e o binómio de Newton.

Definição de probabilidade

1. Definir espaços de probabilidade

1. Identificar, dado um conjunto finito E, uma «probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$ das partes de E» como uma função P de domínio $\mathcal{P}(E)$ e de valores não negativos tal que $P(E) = 1$ e, para $A, B \in \mathcal{P}(E)$ disjuntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, designar, neste contexto, o conjunto E por «espaço amostral» ou «universo dos resultados», $\mathcal{P}(E)$ por «espaço dos acontecimentos», os respetivos elementos por «acontecimentos», $P(A)$, para $A \in \mathcal{P}(E)$, por «probabilidade do acontecimento A» e o terno $(E, \mathcal{P}(E), P)$ por (um caso particular de) «espaço de probabilidade».
2. Designar, dado um conjunto finito E e uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$, o conjunto vazio $\emptyset$ por «acontecimento impossível», o conjunto E por «acontecimento certo», dois acontecimentos por «incompatíveis» ou por «mutuamente exclusivos» se forem disjuntos, por «complementares» ou por «contrários» se forem disjuntos e a respetiva união for igual a E e por «equiprováveis» se tiverem a mesma probabilidade.
3. Designar, dado um conjunto finito E, uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e um acontecimento $A \subset E$, por «casos favoráveis a A» os elementos de A e por «casos possíveis» os elementos do espaço amostral E.
4. Designar, dado um conjunto finito E e uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$, um acontecimento A por «elementar» quando $\#A = 1$ e por «composto» quando $\#A \geq 2$.
5. Justificar, dado um conjunto finito E, que a função P de domínio $\mathcal{P}(E)$ definida por $\forall A \in \mathcal{P}(E), P(A) = \frac{\#A}{\#E}$ é a única probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ tal que os acontecimentos elementares são equiprováveis e designar esta definição da função de probabilidade por «definição de Laplace».
6. Provar, dado um conjunto finito E, uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e um acontecimento $A \in \mathcal{P}(E)$, que $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ e que $P(\emptyset) = 0$.
7. Provar, dado um conjunto finito E, uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, que se $A \subset B$, $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$, justificando que $P(A) \leq P(B)$, e designar este último resultado por «monotonia da probabilidade».
8. Justificar, dado um conjunto finito E e uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$, que $\forall A \in \mathcal{P}(E), P(A) \in [0,1]$.
9. Provar, dado um conjunto finito E, uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
10. Saber que se podem considerar espaços amostrais E infinitos, podendo-se definir, nessa situação, uma função de probabilidade P cujas propriedades generalizam as que caracterizam este conceito no caso em que E é finito, desde que se defina de forma apropriada a classe de acontecimentos, subconjunto de $\mathcal{P}(E)$, que constitui o domínio de p.

2. *Definir probabilidade condicionada*

   1. Reconhecer, no quadro de uma experiência aleatória em que o universo dos resultados é finito, que, se se souber que um dado acontecimento B ocorreu, o número de casos possíveis da experiência aleatória é $\#B$ e o número de casos favoráveis de um acontecimento A é dado por $\#(A \cap B)$, e justificar que, se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de ocorrer A sabendo que ocorreu B é igual a $\frac{\#(A\cap B)}{\#B} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ em que P representa a probabilidade no espaço inicial.
   2. Designar, dada uma probabilidade P e dois acontecimentos A e B, com $P(B) \neq 0$, por «probabilidade de A se B», por «probabilidade condicionada de A se B» ou por «probabilidade de ocorrer A sabendo que ocorreu B» a quantidade $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ e representá-la por «$P(A|B)$».
   3. #Provar, dado um conjunto finito E, uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e um acontecimento $B \in \mathcal{P}(E)$, com $P(B) \neq 0$, que a função P_B definida pela expressão $P_B(A) = P(A|B)$ é uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$.
   4. Justificar, dada uma probabilidade P e dois acontecimentos A e B que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ se e somente se $P(B) = 0$ ou $P(B) \neq 0$ e $P(A|B) = P(A)$, e identificar os acontecimentos A e B como «independentes» quando é verdadeira uma destas condições equivalentes.
   5. #Provar, dado um conjunto finito E, uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E), N \in \mathbb{N}$ e uma partição $\{E_1, E_2, \dots, E_N\}$ de E constituída por acontecimentos de probabilidade não nula, que para todo o acontecimento $A \subset E$, $P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \cdots + P(A|E_N)P(E_N)$ e designar este resultado por «Teorema da probabilidade total».

3. *Resolver problemas*

   1. +Resolver problemas envolvendo cálculo combinatório e a determinação de probabilidades em situações de equiprobabilidade de acontecimentos elementares.
   2. +Resolver problemas envolvendo espaços de probabilidades e a determinação de propriedades da função de probabilidade.
   3. +Resolver problemas envolvendo probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e o Teorema da probabilidade total.

Limites e Continuidade

1. *Utilizar teoremas de comparação e os teoremas das sucessões e funções enquadradas*

    1. #Provar, dadas sucessões convergentes (u_n) e (v_n), que se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$ então $\lim u_n \leq \lim v_n$.
    2. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$ e $\lim u_n = +\infty$ então $\lim v_n = +\infty$.
    3. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) , que se, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$ e $\lim v_n = -\infty$ então $\lim u_n = -\infty$.
    4. #Provar, dadas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes com o mesmo limite l e uma sucessão (w_n) tal que, a partir de certa ordem, $u_n \leq w_n \leq v_n$, que (w_n) é convergente e $\lim w_n = l$, e designar este resultado por «Teorema das sucessões enquadradas».
    5. #Provar, dadas funções reais de variável real f e g de domínio D e $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D que, se para todo o $x \in D$, $f(x) \geq g(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ (respetivamente $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$), então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (respetivamente $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$) e estender este resultado ao caso de limites por valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$.
    6. #Provar, dado um número real l, funções reais de variável real f, g e h de domínio D e $a \in \mathbb{R}$, que se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ e se para todo o $x \in D$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, estender este resultado ao caso de limites por valores superiores ou inferiores a a bem como ao caso de limites em $\pm\infty$, e designar este resultado por «Teorema das funções enquadradas».

2. *Conhecer propriedades elementares das funções contínuas*

    1. Saber, dada uma função real de variável real f contínua num intervalo $I = [a, b]$, $(a < b)$, que para qualquer valor $k \in \mathbb{R}$ do intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$ existe $c \in I$ tal que $f(c) = k$ e designar esta propriedade por «Teorema dos valores intermédios» ou por «Teorema de Bolzano-Cauchy».
    2. Saber, dada uma função real de variável real f contínua num intervalo $[a, b]$, $(a < b)$, que f admite máximo e mínimo absolutos e designar este resultado por «Teorema de Weierstrass».

3. *Resolver problemas*

    1. +Resolver problemas envolvendo os teoremas de comparação e das sucessões e funções enquadradas para o cálculo de limites e o estudo da continuidade de funções reais de variável real.

Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

4. *Relacionar a derivada de segunda ordem com o sentido da concavidade do gráfico de uma função e com a noção de aceleração*

   1. Designar, dada uma função real de variável real f diferenciável num intervalo I tal que a função derivada f' é diferenciável num ponto $a \in I$, a derivada $(f')'(a)$ por «derivada de segunda ordem de f no ponto a» e representá-la por «$f''(a)$».
   2. Identificar uma função real de variável real f como «duas vezes diferenciável» num dado intervalo I se $f''(a)$ existir para todo o $a \in I$.
   3. +Provar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo $I =]a, b[$, $a < b$, e $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$, que se $f''(c) > 0$ (respetivamente $f''(c) < 0$) f admite um mínimo (respetivamente um máximo) local em c.
   4. +Provar, dada uma função f diferenciável num intervalo I, que f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente voltada para baixo) em I se e somente se f' for estritamente crescente (respetivamente estritamente decrescente) em I.
   5. Justificar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b, que se para todo o $x \in]a, b[$, $f''(x) > 0$ (respetivamente $f''(x) < 0$), o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente voltada para baixo) no intervalo I.
   6. Justificar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo I, que se o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima (respetivamente voltada para baixo) no intervalo I então, para todo o $x \in I$, $f''(x) \geq 0$ (respetivamente $f''(x) \leq 0$).
   7. Identificar, dada uma função f de domínio D, o ponto $\left(c, f(c)\right)$ onde $c \in D$, como «ponto de inflexão do gráfico de f» se existirem números reais $a < c$ e $b > c$ tais que $[a, b] \subset D$ e a concavidade do gráfico de f no intervalo $[a, c]$ tem sentido contrário à concavidade do gráfico de f no intervalo $[c, b]$ e, nesse caso, referir que «o gráfico de f tem ponto de inflexão em c».
   8. Justificar, dada uma função f duas vezes diferenciável num intervalo I, que se o gráfico de f tem ponto de inflexão em c então $f''(c) = 0$.
   9. Identificar, fixado um instante T_0 para origem das medidas de tempo, uma unidade de tempo T, uma reta numérica r com unidade de comprimento L, um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, não vazio nem reduzido a um ponto, dada a função posição p de um ponto P que se desloca na reta r durante o intervalo de tempo I e dois instantes $t_1 < t_2$ de I, a «aceleração média de P no intervalo no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ na unidade L/T^2» como a taxa média de variação de p' entre t_1 e t_2, $\frac{p'(t_2)-p'(t_1)}{t_2-t_1}$, e, para $t \in I$, a «aceleração instantânea de P no instante t na unidade L/T^2» como a derivada de segunda ordem de p em t.

5. *Resolver problemas*

   1. +Resolver problemas envolvendo propriedades das funções diferenciáveis.
   2. +Esboçar o gráfico de funções definidas analiticamente começando por determinar o respetivo domínio e, sempre que possível, os zeros, os intervalos de monotonia, os extremos locais e absolutos, o sentido das concavidades, os pontos de inflexão e as assíntotas ao respetivo gráfico.

3. +Resolver problemas de otimização envolvendo funções diferenciáveis.
4. +Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas, acelerações médias e acelerações instantâneas e mudanças de unidades de aceleração.
5. +Resolver problemas envolvendo a determinação de valores aproximados de soluções de equações da forma $f(x) = g(x)$ (f e g funções contínuas) utilizando uma calculadora gráfica, em casos em que é possível justificar, através da leitura das informações fornecidas pela calculadora, que determinados valores coincidem, até à casa decimal indicada, com soluções da referida equação, utilizando propriedades conhecidas das funções contínuas, como o Teorema dos valores intermédios, ou outras propriedades analíticas das funções f e g, previamente estabelecidas.

Diferenciação de funções trigonométricas

1. *Estabelecer fórmulas de trigonometria*

   1. +Reconhecer, dados ângulos α e β cuja soma é um ângulo convexo, que $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$ e $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$.
   2. +Reconhecer, dado um ângulo α convexo de amplitude superior à de um ângulo β, que $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$ e $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$, onde $\alpha-\beta$ é um ângulo cuja soma com β é igual a α.
   3. Saber que, para todos os $x,y\in\mathbb{R}$, $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$, $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$, estendendo-se assim as fórmulas já conhecidas envolvendo apenas medidas de amplitude de ângulos geométricos convexos e justificar que $\sin(2x)=2\sin x\cos x$ e $\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$.

2. *Calcular a derivada de funções trigonométricas*

   1. +Reconhecer que para todo o $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x\le x\le\tan x$ e provar que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, referindo este limite como «limite notável».
   2. Provar que as funções seno e cosseno são diferenciáveis e que para todo o $x\in\mathbb{R}$, $\sin' x=\cos x$ e $\cos' x=-\sin x$.
   3. Provar que a função tangente é diferenciável no respetivo domínio $D_{\tan}$ e que para todo o $x\in D_{\tan}$, $\tan' x=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$.

3. *Relacionar osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton*

   1. Designar por «oscilador harmónico» um sistema constituído por um ponto que se desloca numa reta numérica em determinado intervalo de tempo I, de tal forma que a respetiva abcissa, como função de $t\in I$, seja dada por uma expressão da forma $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, onde $A>0$, $\omega>0$ e $\varphi\in[0,2\pi[$, designar estas constantes, respetivamente, por «amplitude», «pulsação» e «fase», justificar que a função x é periódica de período $T=\frac{2\pi}{\omega}$ e designar $f=\frac{1}{T}$ por «frequência» do oscilador harmónico.
   2. Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x)=a\sin(bx+c)+d$, $f(x)=a\cos(bx+c)+d$ e $f(x)=a\tan(bx+c)+d$, onde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $a,b\neq 0$.
   3. Saber, dado um ponto material P de massa m colocado na extremidade de uma mola cuja outra extremidade se encontra fixa, que tomando por origem da reta numérica em que P se desloca o respetivo ponto de equilíbrio, a abcissa $x(t)$ da posição de P no instante t satisfaz a equação $mx''(t)=-\alpha x(t)$ ($\alpha>0$), intepretando o termo $-\alpha x(t)$ como a força exercida pela mola sobre P («lei de Hooke»), designar a igualdade desta força com o produto da massa pela aceleração de P por (um caso particular da) «segunda Lei de Newton» e resolver problemas envolvendo sistemas massa-mola com estas características.

4. Justificar, dado $\alpha > 0$, que as funções definidas por uma expressão da forma $x(t) = A\cos\,(\sqrt{\alpha}t + b)$, onde A e b são constantes reais, satisfazem a equação diferencial $x'' = -\alpha x$, saber que todas as soluções desta equação são dessa forma, e reconhecer que um sistema constituído por uma mola e por um ponto material P colocado na respetiva extremidade constitui um oscilador harmónico.

4. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo a utilização de fórmulas trigonométricas, o estudo de funções definidas a partir de funções trigonométricas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos.
2. +Resolver problemas envolvendo derivadas de funções trigonométricas e osciladores harmónicos.

Juros compostos e número de Neper

1. *Operar com juros compostos e definir o número de Neper*

    1. Designar, dado um número real r , uma unidade de medida temporal Te $n \in \mathbb{N}$, por «aplicar juros compostos à taxa de $r\%$ a T durante n períodos de tempo T» a um dado capital disponível em certo instante inicial t_0, a operação que consiste em calcular um juro igual a $r\%$ do capital disponível no início de cada período de tempo com duração igual a T e adicioná-lo ao capital findo esse período, começando este processo a partir do instante t_0, e levando-o a cabo n vezes seguidas.
    2. Provar, dado um capital inicial C_0, que, aplicando-se juros compostos à taxa de $r\%$ a T, o capital disponível ao fim de $n \in \mathbb{N}$ periodos de tempo T é igual a $C_n = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$.
    3. Justificar, dado um número real r, um número natural n e um capital C_0 disponível no início de um determinado período de um ano, que dividindo esse ano em n periodos iguais de medida temporal T e aplicando juros compostos à taxa de $\frac{r}{n}\%$ a T durante esses n períodos ao capital inicial C_0, o capital disponível ao fim do ano é igual a $C_n = C_0\left(1+\frac{r}{100n}\right)^n$.
    4. +Provar que a sucessão de termo geral $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é crescente, majorada, justificar que é convergente, designar por «número de Neper» («e») o respetivo limite, interpretar todos estes resultados à luz da noção de juro composto e saber que e é um número irracional.

Funções exponenciais

2. *Definir as funções exponenciais e estabelecer as respetivas propriedades principais*

    1. +Provar, dado um número real $a > 0$, que a função definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $a < 1$.
    2. +Provar, dado um número real $a > 0$, que a função f definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ satisfaz $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ e justificar que f é contínua.
    3. +Provar, dado um número real $a > 1$, que a função f definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ satisfaz $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, utilizando o limite já conhecido $\lim a^n = +\infty$ e o facto de f ser crescente.
    4. Justificar, dado $a \in \mathbb{R}$, que a função f definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = a^x$ satisfaz $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ quando $a > 1$, e, quando $0 < a < 1$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.
    5. Saber, dado um número real $a > 0$ e um número irracional x, que se $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma qualquer sucessão de números racionais de limite x, a sucessão de termo geral a^{q_n} é convergente e o respetivo limite depende apenas de x e de a, e que, representando esse limite por «a^x», se estende a função definida por $f(x) = a^x$ em $\mathbb{Q}$ ao conjunto $\mathbb{R}$,

obtendo-se por este processo uma função contínua nesse conjunto, designada por «função exponencial de base a», que mantém a monotonia, os limites em $\pm\infty$ e as propriedades algébricas de f em $\mathbb{Q}$: para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e $b > 0$, $a^x \times a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $(ab)^x = a^x b^x$ e $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

6. Saber que, tal como no caso em que $b \in \mathbb{Q}$, mais geralmente quando $b \in \mathbb{R}$ a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = x^b$ é contínua.
7. Saber que a função definida em $\mathbb{R}\backslash[-1,0]$ por $f(y) = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$ tem por limite e em $\pm\infty$ e justificar, dado $x \in \mathbb{R}$, que $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.
8. Designar a função exponencial de base e simplesmente por «função exponencial» e representá-la também por «exp».
9. Saber que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, referindo este limite como um «limite notável».
10. Provar que a função exponencial é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Funções logarítmicas

3. *Definir as funções logarítmicas e estabelecer as respetivas propriedades principais*

1. Reconhecer, dado um número real $a > 0$, $a \neq 1$, que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$ é bijetiva e designar a respetiva bijeção recíproca, $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, por «logaritmo de base a», representá-la por «$\log_a$», e justificar que $\forall x \in \mathbb{R}^+, a^{\log_a(x)} = x$ e $\forall x \in \mathbb{R}, \log_a(a^x) = x$.
2. Designar o logaritmo de base 10 por «logaritmo decimal», representando-o também por «log» e designar o logaritmo de base e por «logaritmo neperiano», representando-o também por «ln».
3. Justificar que a função logaritmo de base a é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.
4. Justificar que $x = 1$ é o único zero da função logaritmo de base $a > 0$, $a \neq 1$, e que, se $a > 1$ (respetivamente se $0 < a < 1$), $\forall x \in \mathbb{R}^+, \log_a(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ (respetivamente $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \log_a(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$).
5. Justificar, dado $a > 1$, que $\lim\limits_{x \to 0} \log_a(x) = -\infty$ e que $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$.
6. Justificar, dado $0 < a < 1$, que $\lim\limits_{x \to 0} \log_a(x) = +\infty$ e que $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$.
7. #Provar, dado $a > 0$, $a \neq 1$, e $x, y \in \mathbb{R}^+$, que $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ e $\log_a(x^y) = y\log_a(x)$.
8. #Provar, dados $a, b > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 1$, que $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.
9. Justificar, dado $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, que $a^x = e^{x\ln(a)}$.
10. Justificar, dado $a > 0$, que a função exponencial de base a é diferenciável e que a respetiva derivada é dada, em $\mathbb{R}$, pela expressão $\ln(a)\, a^x$.
11. +Provar, dado $a > 0$, $a \neq 1$, que $\log_a$ é diferenciável e que para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, $\log'_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}$.
12. Justificar, dado $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, que a função x^α é diferenciável para $x > 0$, de derivada $\alpha x^{\alpha-1}$, estendendo-se assim o caso já conhecido correspondente a α racional.

Limites notáveis

4. *Conhecer alguns limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas*

    1. +Provar que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$.
    2. Justificar que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
    3. +Calcular limites de funções e sucessões envolvendo logaritmos e exponenciais.

Modelos exponenciais

5. *Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial*

    1. Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a massa de uma substância radioativa, a temperatura de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas populações, pode ser modelada por uma «equação diferencial de 1.ª ordem» da forma $f' = kf$, que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.
    2. Justificar, dado um número real k, que as funções $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real, são soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução f, tem derivada nula a função $e^{-kx}f(x)$.

6. *Resolver problemas*

    1. +Resolver problemas envolvendo juros compostos.
    2. +Resolver problemas envolvendo as propriedades algébricas das funções exponenciais e logarítmicas.
    3. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos e a existência de assíntotas ao respetivo gráfico.
    4. +Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma $y' = ky$, $k \in \mathbb{R}$.

Noção de primitiva

1. *Definir a noção de primitiva*

    1. Designar, dada uma função f real definida num intervalo I, uma função F por «primitiva de f em I» quando F é diferenciável em I, e, para todo o $x \in I$, $F'(x) = f(x)$ e designar f como «primitivável em I» quando f admite uma primitiva nesse intervalo.
    2. Justificar, dada uma função f primitivável num intervalo I e F e G duas primitivas de f nesse intervalo, que a função $F - G$ é constante em I.
    3. Justificar que se f é primitivável num intervalo I, então as primitivas de f nesse intervalo são as funções definidas pelas expressões $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, onde F é uma qualquer primitiva de f em I, representar esta expressão por « Pf » ou por «$\int f(x)dx$» e designar as constantes c por «constantes de primitivação».
    4. Justificar, dado um intervalo I, um ponto $a \in I$, $b \in \mathbb{R}$ e uma função f primitivável em I, que existe uma única primitiva de F em I tal que $F(a) = b$.
    5. Calcular e conhecer de memória as primitivas das funções «de referência para a primitivação»: 1, x^α $(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\})$, $\frac{1}{x}$, e^x, $\sin x$ e $\cos x$.
    6. Justificar, dadas funções f e g primitiváveis num intervalo I e $k \in \mathbb{R}$, que $f + g$ e kf são primitiváveis em I, que a soma de uma primitiva de f com uma primitiva de g é uma primitiva de $f + g$ e o produto de uma primitiva de f por k é uma primitiva de kf e representar estes resultados, respetivamente, pelas expressões «$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$» e «$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$», quando estas notações não forem ambíguas e designá-los conjuntamente por «linearidade da primitivação».
    7. +Calcular primitivas de funções dadas por expressões da forma $u'(x)f\big(u(x)\big)$, sendo conhecida uma primitiva de f.

Noção de integral

2. *Abordar intuitivamente a noção de integral definido*

    1. Identificar, dado um referencial cartesiano e uma função f contínua e não negativa num intervalo $[a, b]$ $(a \leq b)$, o «integral de f entre a e b» ($\int_a^b f(x)dx$) como a medida, na unidade quadrada associada à unidade de comprimento desse referencial, da área da região do plano delimitada pelas retas de equação $x = a$ e $x = b$, o eixo das abcissas e o gráfico de f.
    2. Conhecer a origem histórica da expressão «$\int_a^b f(x)dx$», representando o símbolo « $\int$ » uma "soma" e «$f(x)dx$» a medida da área de um "retângulo" com lados de medida $f(x)$ e "dx", sendo esta última "infinitesimal".
    3. Saber que na expressão «$\int_a^b f(x)dx$», o símbolo «x» pode ser substituído por qualquer outro e designar, por esta razão, a variável x como «muda».

4. Reconhecer, dadas funções f e g contínuas e não negativas num intervalo $[a, b]$, $(a \leq b)$, que se para todo o $x \in [a, b]$, $g(x) \leq f(x)$, então $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$ e designar esta propriedade por «monotonia do integral definido».
5. Reconhecer, dada uma função f contínua não negativa num intervalo $[a, b]$, $(a < b)$, que a função F_a definida em $[a, b]$ por $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ é a primitiva de f no intervalo $[a, b]$ nula em a e designar este resultado por «Teorema fundamental do cálculo (integral)».
6. Provar, dada uma função f contínua não negativa num intervalo $[a, b]$, $(a < b)$, que $\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b$, onde F é uma qualquer primitiva de f no intervalo $[a, b]$ e $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, e designar este resultado por «Fórmula de Barrow».
7. Saber, dada uma função f contínua não negativa num intervalo I e dois pontos α e β de I tais que $\alpha < \beta$, que, por convenção, $\int_\beta^\alpha f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)dx$ e justificar que com esta convenção, dados quaisquer pontos a,b e c de I, se tem $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, designando este resultado por «relação de Chasles».
8. Identificar, dado um referencial cartesiano e uma função f contínua num intervalo $[a, b]$ $(a \leq b)$ tal que $f(x) \leq 0$ para $x \in [a, b]$, o «integral de f entre a e b» ($\int_a^b f(x)dx$) como o simétrico da medida da área da região do plano delimitada pelas retas de equação $x = a$ e $x = b$, o eixo das abcissas e o gráfico de f e reconhecer que se tem $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx$.
9. Reconhecer, dadas funções f e g contínuas e não negativas ou não positivas num intervalo $[a, b]$ $(a \leq b)$, que $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ e que $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ e designar o conjunto destes resultados por «linearidade do integral definido».
10. Identificar, dada uma função f contínua de domínio $[a, b]$ $(a < b)$ para a qual existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $c_0, c_1, \dots, c_{k+1}$, com $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{k+1} = b$, tal que f é não negativa ou não positiva em cada um dos intervalos $[c_j, c_{j+1}]$ $(0 \leq j \leq k)$, o integral de f entre a e b, $\int_a^b f(x)dx$, como a soma $\int_{c_0}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx$, reconhecendo que este valor não depende da sequência $(c_1, \dots, c_k)$ e saber que se podem estender a esta categoria de funções a propriedade de monotonia do integral, o Teorema fundamental do cálculo, a fórmula de Barrow, a relação de Chasles (com a mesma convenção relativa à inversão dos extremos de integração) e a propriedade de linearidade.

3. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo o cálculo de integrais definidos.
2. +Resolver problemas envolvendo funções posição, velocidade, aceleração e a primitivação e integração de funções reais de variável real.
3. +Resolver problemas envolvendo a determinação da medida da área de regiões do plano delimitadas por gráficos de funções.

Introdução aos números complexos

1. *Conhecer o contexto histórico do aparecimento dos números complexos e motivar a respetiva construção*

    1. Saber que, em meados do século XVI, Girolamo Cardano apresentou uma fórmula, dita «fórmula resolvente para equações do terceiro grau», que permite obter uma solução real de equações do terceiro grau da forma $x^3 + px + q = 0$ em função dos números reais p e q.
    2. Saber que ao substituir formalmente p e q por certos valores na fórmula de Cardano esta passa a apresentar o símbolo «$\sqrt{-1}$» e que, operando formalmente com este símbolo, considerando em particular que «$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$», se obtém efetivamente uma solução real da equação $x^3 + px + q = 0$, e que este facto está na origem da motivação para se definir adequadamente um "número" cujo quadrado é igual a -1.
    3. +Reconhecer que se existir um conjunto C contendo $\mathbb{R}$, munido de duas operações «$+$» e «$\times$» que estendem respetivamente a operação de adição e de multiplicação de números reais, mantendo os mesmos elementos neutros, que são associativas, comutativas, tais que «$\times$» é distributiva relativamente a «$+$», e tal que C contém um elemento i que satisfaz $i \times i = -1$, então, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tem-se necessariamente em C a equivalência $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ bem como as igualdades $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$ e $(a + bi) \times (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$, notando, em particular, que os resultados das operações «$+$» e «$\times$» sobre elementos de C da forma $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ têm essa mesma forma.

2. *Definir o corpo dos números complexos*

    1. Definir em $\mathbb{R}^2$ uma operação aditiva «$+$» por $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e uma operação multiplicativa «$\times$» por $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ $((a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2)$, designar o conjunto $\mathbb{R}^2$, quando munido destas duas operações, por «corpo dos números complexos» e representá-lo por $\mathbb{C}$.
    2. Justificar que as operações «$+$» e «$\times$», definidas em $\mathbb{R}^2$, são associativas, comutativas, que $(0,0)$ e $(1,0)$ são respetivamente os elementos neutros de «$+$» e «$\times$» e que «$\times$» é distributiva relativamente a «$+$».
    3. Justificar que, dados $a, c \in \mathbb{R}$, $(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$ e $(a, 0) \times (c, 0) = (ac, 0)$ e, por esta razão, identificar $\mathbb{R}$ com um subconjunto de $\mathbb{C}$, associando a cada $x \in \mathbb{R}$ o par ordenado $(x, 0) \in \mathbb{C}$ e representando, portanto, o número complexo $(x, 0)$ por «x».
    4. Representar o número complexo $(0,1)$ por «i», designá-lo por «unidade imaginária» e provar que $i^2 = -1$.
    5. Provar que, dado um número complexo z, existe um único número real a e um único número real b tais que $z = a + bi$, observando que z é, por definição, um par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e que $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0,1) = a + bi$.

6. Designar, dado um número complexo $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, a por «parte real de z» e b por «parte imaginária de z», e representá-las respetivamente por $Re(z)$ e por $Im(z)$.
7. Justificar que um número complexo z é real se e somente se $Im(z) = 0$ e designar por «números imaginários puros» os números complexos não reais tais que $Re(z) = 0$.
8. Justificar, dados $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$, que $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$ e que $(a + bi) \times (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.
9. Designar, dado um plano munido de um referencial ortonormado direto e $a, b \in \mathbb{R}$, o ponto M de coordenadas (a, b) como o «afixo do número complexo $z = a + bi$» e reconhecer que se podem assim representar os números complexos no plano, designando, neste contexto, o plano por «plano complexo» ou «plano de Argand», o eixo das abcissas por «eixo real» e o eixo das ordenadas por «eixo imaginário».
10. Justificar, dados números complexos $z = x + yi$ e $z_0 = a + bi$, $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, que o afixo de $z + z_0$ é a imagem pela translação de vetor $\vec{u}\ (a, b)$ do ponto M, afixo de z.

3. *Operar com números complexos*

1. Designar, dado um número complexo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, por «conjugado de z» o número complexo $a - bi$, representando-o por $\bar{z}$, e justificar que o ponto afixo de $\bar{z}$ é a imagem pela reflexão de eixo real do ponto afixo de z.
2. Justificar, dados números complexos z e w , que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$ e $\bar{\bar{z}} = z$.
3. Justificar, dado um número complexo z, que $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e que $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.
4. Justificar, dado um número complexo $z \neq 0$, que z é um número real (respetivamente um número imaginário puro) se e somente se $z = \bar{z}$ (respetivamente $z = -\bar{z}$).
5. Designar, dado um número complexo z, por «módulo de z» a medida da distância, no plano complexo, entre a origem e o ponto afixo de z, representá-lo por «$|z|$», justificar que se $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, que o módulo de um número complexo estende a noção de módulo de um número real e que se tem a equivalência $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
6. Provar, dados pontos A e B afixos respetivamente dos números complexos z_1 e z_2, que $\overline{AB} = |z_2 - z_1|$.
7. Justificar, dados números complexos z e w, que $|zw| = |z||w|$, $|z| = |\bar{z}|$, $|z|^2 = z\bar{z}$ e $|z + w| \leq |z| + |w|$, designando esta última propriedade por «desigualdade triangular».
8. Designar, dado um número complexo z não nulo, por «inverso de z» um número z' tal que $zz' = 1$, justificar que existe e é único, representá-lo por «$\frac{1}{z}$» e provar que o inverso de z é igual a $\frac{1}{|z|^2}\bar{z}$.
9. Designar, dados números complexos z e $w, z \neq 0$, o «quociente de w por z» como o número complexo pelo qual se tem de multiplicar z para obter w, representá-lo por «$\frac{w}{z}$» e justificar que $\frac{w}{z} = w \times \frac{1}{z}$.
10. Justificar, dados números complexos z e w, $z \neq 0$, que $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$ e que $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$.

4. *Definir a forma trigonométrica de um número complexo*

   1. Designar um número complexo z de módulo 1 por «unitário» e justificar, dado um número complexo z, que z é unitário se e somente se existir um número real α tal que $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, designando α, nesse caso, por um «argumento de z» e justificar que dois argumentos de um mesmo número complexo diferem por $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   2. Justificar, dados números complexos unitários $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$ e $z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, que $z_1 z_2 = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$ e que $\frac{z_1}{z_2} = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)$, representar, para $\theta \in \mathbb{R}$, o número complexo $\cos\theta + i\sin\theta$ por «$e^{i\theta}$», designando esta expressão por «exponencial complexa de $i\theta$» e motivar esta notação observando que se tem $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ e $\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$.
   3. +Reconhecer, dado um número complexo $z \neq 0$, que existe um único número positivo r e um único número complexo unitário w tais que $z = rw$, que $r = |z|$ e se θ for um argumento de w, designar igualmente θ por um «argumento de z», interpretando geometricamente r e θ.
   4. Designar a representação de um número complexo $z \neq 0$ na forma $|z|e^{i\theta}$, onde θ é um argumento de z, por «forma trigonométrica» (ou «forma polar») de z, e justificar, dados números complexos não nulos z e z' de argumentos respetivamente iguais a θ e a θ' , que $z = z'$ se e somente se $|z| = |z'|$ e existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = \theta' + 2k\pi$, interpretando geometricamente esta equivalência.
   5. Justificar, dado um número complexo $z \neq 0$, que existe um único argumento de z no intervalo $]-\pi, \pi]$, designá-lo por «argumento principal de z» e representá-lo por «$Arg(z)$».
   6. Justificar, dado um número real θ, que se M é o afixo de um número complexo z, o afixo do número complexo $e^{i\theta}z$ é a imagem de M pela rotação de centro O e ângulo generalizado de medida θ.
   7. Justificar, dado um número complexo $z_0 \neq 0$, que se M é o afixo de um número complexo z, o afixo do número complexo $z_0 z$ é a imagem de M pela rotação de centro O e ângulo orientado de medida θ, argumento de z_0, composta com a homotetia de centro O e razão $|z_0|$.
   8. Justificar que θ é um argumento do número complexo não nulo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, se e somente se $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e que, nesse caso, se $a \neq 0, \tan(\theta) = \frac{b}{a}$.
   9. Provar, dado $\theta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, que $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ e designar este resultado por «Fórmula de De Moivre».

5. *Extrair raízes n-ésimas de números complexos*

   1. +Reconhecer, dado um número complexo $w \neq 0$ e um número natural $n \geq 2$, que a equação $z^n = w$ tem exatamente as n soluções $z_k = \sqrt[n]{|w|}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, onde α é um argumento de w, e designar estes números por «raízes n-ésimas de w» ou «raízes de ordem n de w».
   2. Reconhecer, dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a \neq 0)$ que se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, as raízes da equação $az^2 + bz + c = 0$, em $\mathbb{C}$, são dadas por $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ e $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

6. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo números complexos e as respetivas propriedades algébricas.
2. +Resolver problemas envolvendo a representação, por números complexos, de isometrias do plano (translações, reflexões e rotações) ou outras transformações do plano, como as homotetias.
3. +Resolver problemas envolvendo a representação trigonométrica de números complexos.
4. +Resolver problemas envolvendo a representação de conjuntos de pontos definidos por condições sobre números complexos.
5. +Resolver problemas envolvendo equações da forma $z^n = w$, ($n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$) e vértices de polígonos regulares enquanto afixos de números complexos.
6. +Resolver problemas envolvendo polinómios de segundo grau.