DÍA MES AÑO

(5) $2\sqrt{x}\,\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$dy = \sqrt{1-y^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\arcsin y = \sqrt{x} + C \Rightarrow \operatorname{Sen}^{-1} y = \sqrt{x} + c$$

$$y(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x} + c)$$

Solución general de forma explícita

(12) $y y' = x(y^2+1)$

$$y\frac{dy}{dx} = x\,(y^2+1)$$

Escaneado con CamScanner

DÍA MES AÑO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\cdot(y^2+1)}{y}$$

$$dy = \frac{x(y^2+1)}{y}\cdot dx$$

$$\int \frac{y}{y^2+1}\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{x^2}{2}+C$$

$$\ln(y^2+1) = x^2+C_2$$

$$e^{\ln(y^2+1)} = e^{x^2+C_2}$$

$$y^2+1 = e^{x^2}e^{C_2}$$

$$y^2+1 = Ae^{x^2}$$

una solución general de forma implícita

(17) $y' = 1+x+y+xy$

$$\frac{dy}{dx} = 1+x+y+xy$$

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)+(y+xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)+y(1+x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)\cdot(1+y)\cdot dx$$

CARTOON NETWORK

DÍA | MES | AÑO

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int (1+x)\,dx$$

$$\ln(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + C$$

$$e^{\ln(1+y)} = e^{x+\frac{1}{2}x^2+C}$$

$$e^{\ln(1+y)} = e^{x+\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{C}$$

$$1+y = A e^{\frac{1}{2}x^2+x}$$

$$y(x) = A e^{\frac{1}{2}x^2+x} - 1$$ una solución general de forma explícita

(18) $x^2 y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2 y^2$

$$x^2 \frac{dy}{dx} = (1-x^2) + (y^2 - x^2y^2)$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} = (1-x^2) + y^2(1-x^2)$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} = (1-x^2)(1+y^2)$$

DÍA MES AÑO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{x^2} \cdot (1+y^2)$$

$$dy = \frac{1-x^2}{x^2} (1+y^2)\, dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{1-x^2}{x^2}\, dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{1}{x^2} - 1\, dx$$

$$\arctan y = -\frac{1}{x} - x + C$$

$$y(x) = \tan\left(C - x - \frac{1}{x}\right)$$

Una solución general de forma explícita

25. $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2y \quad , \quad y(1) = 1$

$$x\frac{dy}{dx} = 2x^2y + y$$

$$x\frac{dy}{dx} = y(2x^2+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{(2x^2+1)}{x}$$

$$dy = y \cdot \frac{(2x^2+1)}{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x^2+1}{x}\, dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x + \frac{1}{x}\, dx$$

$$\ln y = \frac{2x^2}{2} + \ln x + C$$

$$\ln y = x^2 + \ln x + C$$

Escaneado con CamScanner

DÍA MES AÑO

$$e^{\ln y} = e^{x^2 + \ln x + c} = e^{x^2} e^{\ln x} e^{c}$$

Solución general forma explícita $y = Axe^{x^2}$; como el PVI establece que $y(1) = 1$

$$1 = A(1)e^{(1)^2}$$

$$1 = Ae$$

$$y(x) = \frac{1}{e} x e^{x^2} \longleftarrow \frac{1}{e} = A$$

La solución particular de forma explícita al P.V.I $y(1) = 1$

$$y(x) = x e^{x^2 - 1}$$

(27) $\frac{dy}{dx} = 6e^{2x-y}$, $y(0) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} e^{-y} dx$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = 6e^{2x} dx$$

$$\int e^{y} dy = \int 6e^{2x} dx$$

$$e^{y} = 6\frac{e^{2x}}{2} + c$$

$$e^{y} = 3e^{2x} + c$$

DÍA MES AÑO

Como el p.v.I establece que $y(0)=0$

$$e^{0} = 3e^{2(0)} + c$$

$$1 = 3 + c$$

$$-2 = c$$

$$e^{y} = 3e^{2x} - 2$$

$$\ln e^{y} = \ln(3e^{2x} - 2)$$

$$y(x) = \ln(3e^{2x} - 2)$$

la solución particular al

P.V.I $y(0)=0$

DÍA MES AÑO

15) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y}$; $y(2)=2$

El teorema de existencia, garantiza al menos una solución en cualquier región de $\mathbb{R}^2$ contenida en $\{(x,y): x-y>0\}$ $\{(x,y): x>y\}$

Puesto que el P.V.I es en $(2,2)$ esta condición no se cumple y el teorema no garantiza la existencia de al menos una solución a este P.V.I, tampoco se garantiza la unicidad pues $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ no es continua si $x-y$

16) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y}$; $y(2)=1$

Por el argumento del problema 15 el teorema de existencia garantiza al menos una solución al P.V.I en $(2,1)$ dado:

CARTOON NETWORK

$2 > 1$ $\Rightarrow$ así que verificamos si el
$x > y$ teorema de unicidad garantiza única
solución al P.V.I

$$F(x,y) = \sqrt{x-y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{2\sqrt{x-y}}$$ es continua en aquella

region donde $x - y > 0 \Rightarrow x > y$

Así que el P.V.I $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y}$; $y(2) = 1$

admite una única solución en una region

$R : \{ (x,y) : 2 - \epsilon \leq x \leq 2 + \epsilon , 1 - h \leq y \leq 1 + h \}$

con $\epsilon , h > 0$

DÍA MES AÑO

27 a) $y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c \\ (x-c)^2 & x > c \end{cases}$

Si $x < c$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$ $y(0)=0$

$y = 0$

$0 = 2\sqrt{0}$

$0 = 0$

Si $x > c$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(x-c) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$ $y(0)=0$

$y = (x-c)^2$

$2(x-c) = 2\sqrt{(x-c)^2}$

$2(x-c) = 2|x-c|$

pero $x>c$

$2(x-c) = 2(x-c)$

$|x-c| = x-c$

Si $x = c \Rightarrow \frac{dy}{dx}(c) = \lim_{x \to c} \frac{y(x)-y(c)}{x-c} = 0$

$\lim_{x \to c^-} \frac{0-0}{x-c} = \lim_{x \to c^-} \frac{0}{x-c} = 0$ $\frac{dy}{dx}(c) = 2\sqrt{y(c)}$

$0 = 0$

DÍA MES AÑO

$$\lim_{x \to c^+} \frac{(x-c)^2 - 0}{x - c} = \lim_{x \to c^+} x - c = 0$$

así que $y(x)$ satisface E.D.O $y' = 2\sqrt{y}$; $y(0) = 0$

$\forall x$ y puesto que c puede ser tan cercano

como sea a $x = 0$ entonces por ejemplo

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c \\ (x-c) & x > c \end{cases}$$

$c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.01$, $c_3 = 0.001$, ...

Seran soluciones a la E.DO con P.V.I

$y(0) = 0$ esto es hay infinitas soluciones

b) i) $y' = 2\sqrt{y}$ $y(0) = b$ no tiene solución para $b < 0$

(ii) $y' = 2\sqrt{y}$ $y(0) = b$ tiene unica solución para $b > 0$

CARTOON NETWORK.

Escaneado con CamScanner

$F(x,y) = 2\sqrt{y}$ es Continua si $y>0$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ es Continua si $y>0$

30 si $x < C$ ó $x > C+\pi$

$y(x) = \pm 1$ respectivamente, en cualquier caso $y' = 0$

$\Rightarrow y' = \sqrt{1-y^2}$

$\Rightarrow 0 = \sqrt{1-(\pm 1)^2}$

$0 = \sqrt{0}$ en $x < C \wedge x > C+\pi$

$0 = 0$

Si $C < x < C+\pi$

$y(x) = \cos(x-C)$

$y'(x) = -\operatorname{sen}(x-C)$

DÍA MES AÑO

$\Rightarrow y' = \sqrt{1-y^2}$

$-\operatorname{sen}(x-c) = -\sqrt{1-\cos^2(x-c)}$

$-\operatorname{sen}(x-c) = -\sqrt{\operatorname{sen}^2(x-c)}$

$-\operatorname{sen}(x-c) = -|\operatorname{sen}(x-c)| = -\operatorname{sen}(x-c)$

como $c < x < c+\pi$

$c-c < x-c < c+\pi-c$

$0 < x-c < \pi$

si $x-c \in [0,\pi]$: $|\operatorname{sen}(x-c)| = \operatorname{sen}(x-c)$

así que $y(x)$ satisface la E.DO $\forall x$

Puesto que $\frac{dy}{dx}(c) = \frac{dy}{dx}(c+\pi) = 0$

$$\frac{dy}{dx}(c) = \lim_{x \to c} \frac{y(x)-y(c)}{x-c} = 0$$

DÍA MES AÑO

$y' = -\sqrt{1-y^2}$; $y(a)=b$

$F(x,y) = \sqrt{1-y^2}$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$ son continuas si $1-y^2>0$

$1>y^2$

$|y|<1$

$|b|<1$

se garantiza la existencia y unicidad de la solución si al P.V.I $\in (a,b)$

con $-1<b<1$

$a \in \mathbb{R}$

si $b>1$ no existe solución al P.V.I $y(a)=b$ y si $b=1$ ni la existencia ni la unicidad estan garantizadas pero si puede observarse que $y(t)=1$ ó $y(t)=-1$ son soluciones constantes al P.V.I $y'(t) = -\sqrt{1-y^2}$

CARTOON NETWORK

$y(a) = 1$ y $y(a) = -1$ respectivamente.

(32) si $x^2 < c$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}$

$y = 0$

$0 = 4x\sqrt{0}$

$0 = 0$

si $x^2 > c$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}$

$y = (x^2 - c)^2$ $\quad$ $2(x^2 - c)(2x) = 4x\sqrt{(x^2 - c)^2}$

$4x(x^2 - c) = 4x|x^2 - c| =$

$4x(x^2 - c)$

pues $x^2 > c$ y $|x^2 - c| = x^2 - c$

Escaneado con CamScanner

DÍA MES AÑO

Para encontrar la derivada en $x^2 = c$; reescribimos $y(x)$ como:

$$y(x) = \begin{cases} (x^2-c)^2; & x < -\sqrt{c} \\ \emptyset & ; -\sqrt{c} \leq x \leq \sqrt{c} \\ (x^2-c)^2; & x > \sqrt{c} \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}(\sqrt{c}) = \lim_{x \to \sqrt{c}} \frac{y(x) - y(\sqrt{c})}{x - \sqrt{c}} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \sqrt{c}^+} \frac{(x^2-c)^2 - 0}{x - \sqrt{c}} \cdot \frac{x + \sqrt{c}}{x + \sqrt{c}}$$

$$\lim_{x \to \sqrt{c}^+} \frac{(x^2-c)^2 \cdot (x+\sqrt{c})}{x^2 - c} = \lim_{x \to \sqrt{c}} (x^2-c) \cdot (x+\sqrt{c})$$

$$= (c-c)(\sqrt{c}+\sqrt{c})$$

$$= \emptyset$$

DÍA MES AÑO

$$\lim_{x \to \sqrt{c}} \frac{0-0}{x-\sqrt{c}} = 0$$

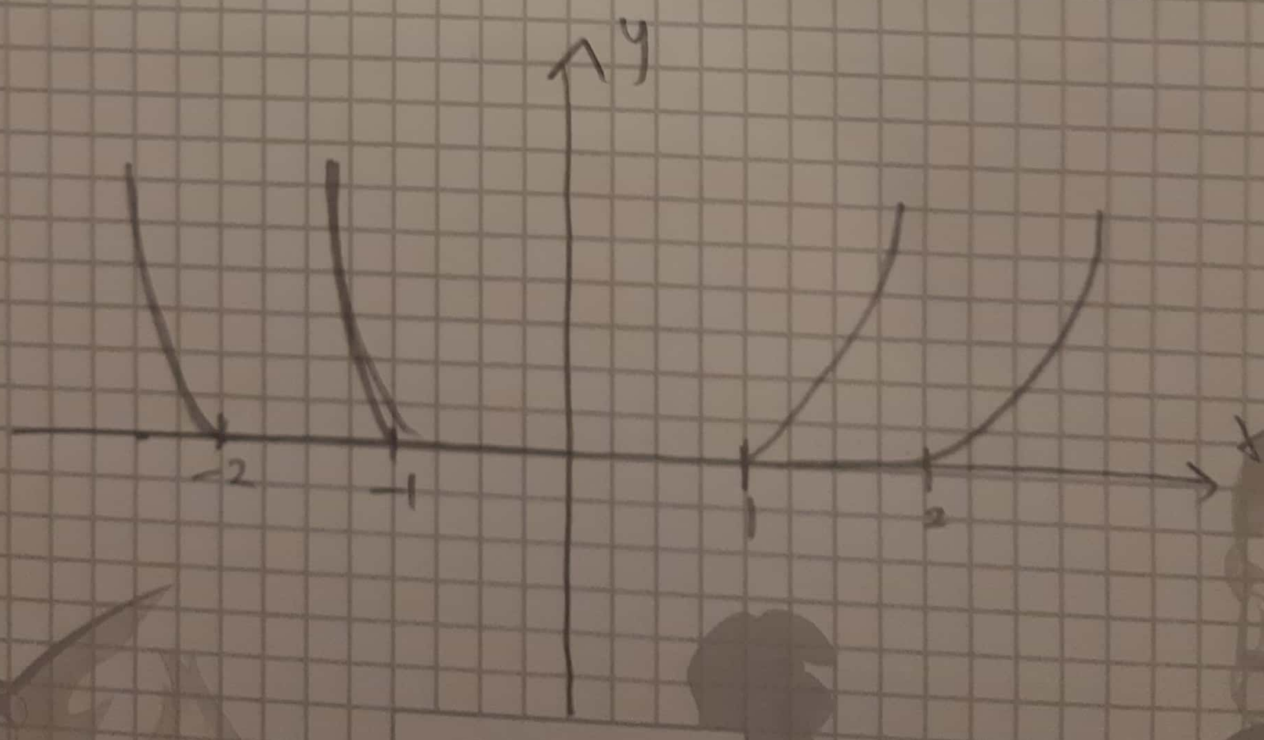
de igual forma podemos ver que

$$\frac{dy}{dx}(-\sqrt{c}) = \lim_{x \to -\sqrt{c}} \frac{y(x) - y(-\sqrt{c})}{x+\sqrt{c}} = 0$$

asi que $\frac{dy}{dx}(\pm\sqrt{c}) = 4(\pm\sqrt{c})(y(\pm\sqrt{c}))$

$$0 = 0$$

$\Rightarrow y(x)$ satisface E.D.O $\forall x$



Escaneado con CamScanner

MES AÑO

la ecuación $\frac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}$ $y(a) = b$

se garantiza solución única si $b>0$; $\forall a$

$$f(x,y) = 4x\sqrt{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{y}}$$

son continuas para $y>0$ $(b>0)$

para $y<0$ $(b<0)$ no habría soluciones y si $y=0$ $(b=0)$ el teorema no garantiza ni existencia ni unicidad, aunque vemos que existen infinitas soluciones al P.V.I $y(0)=0$