STUDIO DELLA FUNZIONE $s(t)$

DOMINIO
Le condizioni di esistenza da imporre sono sul denominatore della funzione e sull'argomento del logaritmo.

$$Dom\ s(t): \{\forall t \in \mathbb{R} \mid s(t) > 0\}$$

$$Dom\ s(t): \left\{\forall t \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{\rho * (3t+e) * \log(3t+e)} > 0 \bigvee (3t+e) > 0\right\}$$

$$\frac{3}{\rho * (3t+e) * \log(3t+e)} > 0$$

$$3 > 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\rho * (3t+e) * \log(3t+e) > 0 \implies \log(3t+e) > 0 \implies 3t+e > 10^0$$

$$3t + e > 1 \implies 3t > 1 - e \implies t > \frac{1-e}{3}$$

Essendo il numeratore sempre maggiore di zero, la funzione è:

- positiva per $t > \frac{1-e}{3}$
- negativa per $t < \frac{1-e}{3}$

Si impone ora l'argomento del logaritmo maggiore di zero:

$$3t + e > 0 \implies t > -\frac{e}{3}$$

Per riassumere si hanno come soluzioni:

$$3 > 0, \vee\, ; \quad t > \tfrac{1-e}{3}\, ; \quad t > -\tfrac{e}{3}$$

Il dominio della funzione è dunque:

$$Dom\ s(t): \left\{\forall t \in \mathbb{R} \mid -\frac{e}{3} < t < \frac{1-e}{3} \bigvee t > \frac{1-e}{3}\right\}$$

Questo si può riscrivere come:

$$\left[\!\left[-\frac{e}{3}, \frac{1-e}{3}\right]\!\right] \vee \left[\!\left[\frac{1-e}{3}, +\infty\right]\!\right]$$

SIMMETRIE
La funzione non è pari in quanto $s(t) \neq s(-t)$ e nemmeno dispari poiché $s(t) \neq -s(-t)$.

ASINTOTI
È possibile cercare gli asintoti facendo i limiti agli estremi degli intervalli.

Per $t = -\frac{e}{3}$:

$$\lim_{t \to -\frac{e}{3}} \frac{3}{\rho * (3t + e) * \log(3t + e)}$$

$$\lim_{t \to -\frac{e}{3}} \frac{3}{\rho * \left(3 * \left(-\frac{e}{3}\right) + e\right) * \log\left(3 * (-\frac{e}{3} + e\right)}$$

$$\lim_{t \to -\frac{e}{3}} \frac{3}{0} = -\infty$$

Si ha dunque un asintoto verticale in $t = -\frac{e}{3}$

Per $t = \frac{1-e}{3}$:

$$\lim_{t \to \left(\frac{1-e}{3}\right)^{\pm}} \frac{3}{\rho * (3t + e) * \log(3t + e)}$$

$$\lim_{t \to \left(\frac{1-e}{3}\right)^{\pm}} \frac{3}{\rho * \left(3 * \left(\frac{1-e}{3}\right) + e\right) * \log\left(3 * (\frac{1-e}{3} + e\right)}$$

$$\lim_{t \to (\frac{1-e}{3})^{\pm}} \frac{3}{\rho * 1 * \log_{10} 1}$$

$$\lim_{t \to (\frac{1-e}{3})^{\pm}} \frac{3}{0} = \pm\infty$$

Si ha dunque un asintoto verticale in $t = \frac{1-e}{3}$

Per $t = +\infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{3}{\rho * (3t + e) * \log(3t + e)}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{3}{\rho * (3 * (+\infty) + e) * \log\left(3 * (+) + e\right)}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{3}{+\infty} = 0$$

Si ha dunque un asintoto orizzontale in $y = 0$

PUNTI DI MINIMO E MASSIMO
A questo punto calcolo la derivata prima della funzione per evidenziare eventuali punti di massimo e minimo:

$$s'(t) = \left[\!\left[\frac{3}{\rho * (3t + e) * \log\left(3t + e\right)}\right]\!\right]'$$

$$s'(t) = \frac{3}{\rho}\left[\!\left[\frac{1}{(3t+e)*\log(3t+e)}\right]\!\right]'$$

$$s'(t) = \frac{3}{\rho}\left[\!\left[\frac{(1)'*[\![(3t+e)*\log(3t+e)]\!] - [\![(3t+e)*(\log(3t+e))]\!]'}{[\![(3t+e)*\log(3t+e)]\!]^2}\right]\!\right]$$

$$s'(t) = \frac{3}{\rho}\left[\!\left[\frac{0*[\![(3t+e)*\log(3t+e)]\!] - [\![(3t+e)'*\log(3t+e)+(3t+e)*(\log(3t+e))']\!]}{\rho*[\![(3t+e)*\log(3t+e)]\!]^2}\right]\!\right]$$

$$s'(t) = \frac{3}{\rho}\left[\!\left[\frac{0-\left[\!\left[3*\log(3t+e)+(3t+e)*\frac{1}{(3t+e)*\ln(10)}*(3t+e)'\right]\!\right]}{[\![(3t+e)*\log(3t+e)]\!]^2}\right]\!\right]$$

$$s'(t) = -\frac{3}{\rho}\left[\!\left[\frac{\left[\!\left[3*\log(3t+e)+\frac{3}{\ln(10)}\right]\!\right]}{[\![(3t+e)*\log(3t+e)]\!]^2}\right]\!\right]$$

$$s'(t) = -\frac{3}{\rho}\left[\!\left[\frac{[\![3*\ln(10)*\log(3t+e)+3]\!]}{[\![(3t+e)*\log(3t+e)]\!]^2}\right]\!\right]$$

$$s'(t) = -\frac{3}{\rho}\left[\!\left[\frac{\left[\!\left[3*\ln(10)*\frac{\ln(3t+e)}{\ln(10)}+3\right]\!\right]}{[\![(3t+e)*\log(3t+e)]\!]^2}\right]\!\right]$$

$$s'(t) = -\frac{3}{\rho}\left[\!\left[\frac{[\![3*\ln(10)*\ln(3t+\mathrm{e})+3*\ln(10)]\!]}{[\![(3t+e)*\log(3t+e)]\!]^2}\right]\!\right]$$

Per trovare gli eventuali massimi o minimi si pone la derivata prima maggiore o uguale a zero:

$$s'(t) \geq 0$$

$$-\frac{3}{\rho}\left[\!\left[\frac{[\![3*\ln(10)*\ln(3t+\mathrm{e})+3*\ln(10)]\!]}{[\![(3t+e)*\log(3t+e)]\!]^2}\right]\!\right] \geq 0$$

$$-\left[\!\left[\frac{[\![3*\ln(10)*\ln(3t+\mathrm{e})+3*\ln(10)]\!]}{[\![(3t+e)*\log(3t+e)]\!]^2}\right]\!\right] \geq 0$$

Possiamo a questo punto considerare numeratore e denominatore separatamente:

$$-[\![3*\ln(10)*\ln(3t+\mathrm{e})+3*\ln(10)]\!] \geq 0$$

$$3*\ln(10)*[\![\ln(3t+e)+1]\!] \leq 0$$

$$\ln(3t+e)+1 \leq 0$$

$$\ln(3t+e) \leq -1$$

$$(3t + e) \leq e^{-1}$$

$$3t \leq e^{-1} - e$$

$$t \leq \frac{e^{-1} - e}{3} \cong \frac{1}{3e} - \frac{e}{3}$$

A questa condizione si aggiunge quella sul denominatore:

$$[\![(3t + e) * \log(3t + e)]\!]^2 > 0$$

$$\forall t \in \mathbb{R}$$

Questo poiché è una funzione di secondo grado dunque è sempre maggiore di zero.

Ponendo insieme le due condizioni:

$$\begin{cases} t \leq \dfrac{e^{-1} - e}{3} \\ \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Si ottiene che la funzione è:

- positiva per $t < \frac{e^{-1}-e}{3}$
- negativa per $t > \frac{e^{-1}-e}{3}$

E quindi si ha un punto di massimo relativo in $t = \frac{e^{-1}-e}{3}$, in quanto la funzione prima di esso cresce e dopo di esso decresce.

PUNTI DI FLESSO

Per determinare eventuali punti di flesso bisogna calcolare la derivata seconda della funzione:

$$s''(t) = \left\{ -\frac{3}{\rho} \left[\!\!\left[\frac{[\![3 * \ln(10) * \ln(3\mathrm{t} + \mathrm{e}) + 3 * \ln(10)]\!]}{[\![(3t + e) * \log(3t + e)]\!]^2} \right]\!\!\right] \right\}'$$