Beispielaufgabe

Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Gerade $g: \vec{x} = (6,10,-9) + \psi \cdot (16,-6,12)$ die Schnittgerade der beiden Ebenen E_1 und E_2 ist.

$E_1: \vec{x} = (9,10,-6) + \lambda \cdot (320,-120,240) + \mu \cdot (157,-60,117)$

$E_2: \vec{x} = (3,-2,-9) + \nu \cdot (208,-78,156) + \epsilon \cdot (163,-48,120)$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 320 \\ -120 \\ 240 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 157 \\ -60 \\ 117 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 208 \\ -78 \\ 156 \end{pmatrix} + \epsilon \cdot \begin{pmatrix} 163 \\ -48 \\ 120 \end{pmatrix} \Bigg| -\nu \cdot \begin{pmatrix} 208 \\ -78 \\ 156 \end{pmatrix} - \epsilon \cdot \begin{pmatrix} 163 \\ -48 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 320 \\ -120 \\ 240 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 157 \\ -60 \\ 117 \end{pmatrix} - \nu \cdot \begin{pmatrix} 208 \\ -78 \\ 156 \end{pmatrix} - \epsilon \cdot \begin{pmatrix} 163 \\ -48 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix} \Bigg| - \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 320 \\ -120 \\ 240 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 157 \\ -60 \\ 117 \end{pmatrix} - \nu \cdot \begin{pmatrix} 208 \\ -78 \\ 156 \end{pmatrix} - \epsilon \cdot \begin{pmatrix} 163 \\ -48 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$320\,\lambda + 157\,\mu - 208\,\nu - 163\,\epsilon = -6 (1)$

$-120\,\lambda - 60\,\mu + 78\,\nu + 48\,\epsilon = -12 (2)$

$240\,\lambda + 117\,\mu - 156\,\nu - 120\,\epsilon = -3 (3)$

$(1)' = (1) \cdot 3: 960\,\lambda + 471\,\mu - 624\,\nu - 489\,\epsilon = -18$

$(2)' = (2) \cdot 8: -960\,\lambda - 480\,\mu + 624\,\nu + 384\,\epsilon = -96$

$(3)' = (3) \cdot 4: 960\,\lambda + 468\,\mu - 624\,\nu - 480\,\epsilon = -12$

$(1)'' = (1)' + (2)': -9\,\mu - 105\,\epsilon = -114$

$(2)'' = (1)' - (3)': 3\,\mu - 9\,\epsilon = -6$

$(1)''' = (1)'': -9\,\mu - 105\,\epsilon = -114$

$(2)''' = (2)'' \cdot 3: 9\,\mu - 27\,\epsilon = -18$

$(1)''' + (2)''': -132\epsilon = -132 \mid \div (-132)$

$\boxed{\epsilon = 1}$

Einsetzen in Gleichung (2)‘‘

$$3\ \mu - 9 = -6$$

$$\boxed{\mu = 1}$$

$$320\ \lambda - 208\ \nu - 6 = -6$$

$$\boxed{\lambda = \frac{13}{20}\nu}$$

Einsetzen in eine der beiden Geradengleichungen:

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 320 \\ -120 \\ 240 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 157 \\ -60 \\ 117 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{matrix} \mu = 1 \\ \lambda = \frac{13}{20}\nu \end{matrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} + \frac{13}{20}\nu \cdot \begin{pmatrix} 320 \\ -120 \\ 240 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 157 \\ -60 \\ 117 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 166 \\ -50 \\ 111 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 208 \\ -78 \\ 156 \end{pmatrix}$$

Bleibt zu zeigen, dass dies die Gerade g ist. Dazu muss man zeigen, dass

- die beiden Richtungsvektoren parallel sind
- dass der Punkt, auf den der Ortsvektor von g zeigt, ein Punkt von der gefundenen Schnittgerade ist.

$$\begin{pmatrix} 208 \\ -78 \\ 156 \end{pmatrix} = 13 \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind parallel.

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 166 \\ -50 \\ 111 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 208 \\ -78 \\ 156 \end{pmatrix} \Bigg| - \begin{pmatrix} 166 \\ -50 \\ 111 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 166 \\ -50 \\ 111 \end{pmatrix} = \nu \cdot \begin{pmatrix} 208 \\ -78 \\ 156 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -160 \\ +60 \\ -120 \end{pmatrix} = \nu \cdot \begin{pmatrix} 208 \\ -78 \\ 156 \end{pmatrix}$$

Zeile1: $\nu = -\frac{160}{208} = -\frac{10}{13}$

Zeile2: $\nu = \frac{60}{-78} = -\frac{10}{13}$

Zeiel3: $\nu = -\frac{120}{156} = -\frac{10}{13}$

Die beiden Geraden sind identisch. Die Gerade g ist Schnittgerade der beiden Ebenen.