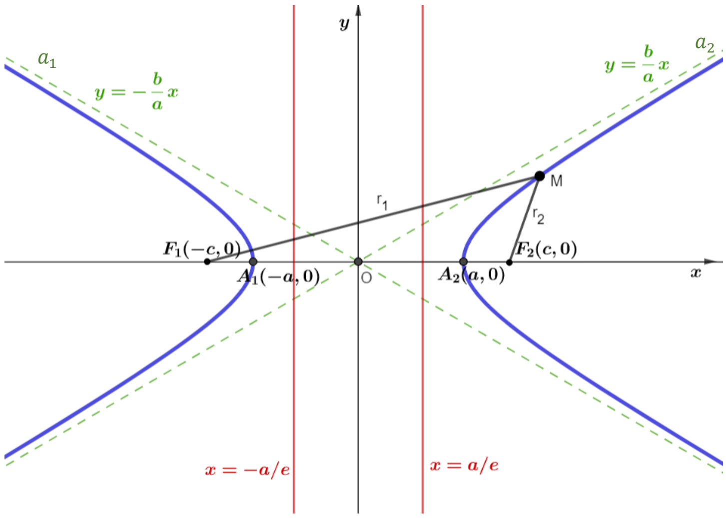
<u>ХИПЕРБОЛА – конструкција, једначина, асимптоте</u>

<u>*Дефиниција*</u>: Хипербола је геометријско место тачака у равни за које важи да је разлика растојања до две утврђене тачке стална.



<u>Конструкција хиперболе</u>

- Фиксне тачке су $\boldsymbol{F_1(-c,0)}$ **и** $\boldsymbol{F_2(c,0)}$ (фокуси или жиже хиперболе).
- Стално растојање је једнако $\boldsymbol{2a}$**.**
- ***Реална (велика- главна)*** *оса* хиперболе $\boldsymbol{2a}$, а крајње тачке $\boldsymbol{A_1(-a,0)}$ и $\boldsymbol{A_2(a,0)}$ су ***темена*** хиперболе
- ***Имагинарна (споредна)*** оса је права управна на реалну осу у тачки која је средиште дужи са крајевима у пресецима реалне осе хиперболе и саме хиперболе.
- Растојање од F_1 до F_2 назива се ***фокусно растојање*** и означава се са $\boldsymbol{2c}$, а средиште дужи F_1F_2 назива се центар хиперболе.
- $\boldsymbol{c}$ је ***линеарни ексцентрицитет.***
- $\boldsymbol{e = \frac{c}{a}}$ је ***нумерички ексцентрицитет***.
- Дужи $\boldsymbol{r_1 = F_1M}$ и $\boldsymbol{r_2 = F_2M}$ су ***потези (радијус – вектори)*** хиперболе.

Како је у троуглу F_1F_2M на слици разлика двеју страна увек мања од треће, то је $|r_1 - r_2| = 2a < 2c$, па је за хиперболу $e > 1$.

По дефиницији хиперболе је

$$|r_1 - r_2| = 2a \ \wedge \ r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \ \wedge \ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a \ \Leftrightarrow \ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \ /^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$4xc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \ /:4 \ \Leftrightarrow \ xc = a^2 \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \ /^2 \Rightarrow$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \Leftrightarrow c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \Leftrightarrow$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

како је $c > a$, то је $c^2 - a^2$ позитивно, па се уводи

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \ \text{ односно } \ b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

и горња једначина постаје

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\boldsymbol{H}$: $\boldsymbol{b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2}$ – општи облик једначине хиперболе

$\boldsymbol{H}$: $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ - ***канонски облик*** једначине хиперболе или ***централна једначина*** хиперболе

Параметри $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ су дужине ***реалне*** односно ***имагинарне полуосе*** хиперболе.

Неке особине хиперболе:

1. Хипербола је **осно симетрична** у односу на обе координатне осе и **централно симетрична** у односу на координатни почетак.
2. Из једначине хиперболе следи
$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$$
па је
$$x^2 \geq a^2, \text{ тј. } x \geq a \ \text{ или } \ x \leq a.$$
Одакле се види да се **хипербола састоји из две одвојене гране** које су симетричне у односу на ординатну осу.
3. Свака дуж, чије се крајње тачке налазе на хиперболи, назива се тетива хиперболе, а свака тетива која пролази кроз центар хиперболе је њен пречник. Међутим за разлику од кружнице и елипсе, хипербола нема пречник у сваком правцу.

Одредимо у ком правцу хипербола може да има пречник. Одредимо који услов треба да испуњава права $y = kx$ да би секла хиперболу, тј. да систем једначина

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \bigwedge \quad y = kx$$

има решење. Заменом y из друге једначине у прву добијамо

$$x^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 - k^2a^2}$$

Ова једначина има решење акко

$$b^2 - a^2k^2 > 0 \Leftrightarrow a^2k^2 < b^2 \Leftrightarrow k^2 < \frac{b^2}{a^2}$$

тј. када је

$$|k| < \frac{b}{a}$$

Уколико је $|k| \geq \frac{b}{a}$, систем нема решење.

Граничне праве $\boldsymbol{y = \frac{b}{a}x}$ и $\boldsymbol{y = -\frac{b}{a}x}$ за које не постоји пречник хиперболе називају се ***асимптоте*** хиперболе, то су праве a_2 и a_1 на слици.

Још једна права која је значајна за криве линије другог реда је ***директриса***.

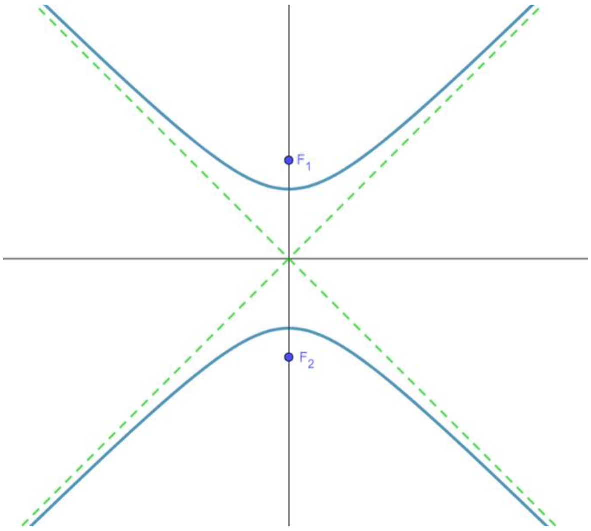
Директриса је права за коју важи да је количник растојања тачке на хиперболи од фокуса и од дате праве константан и једнак броју e.

$$\boldsymbol{d: x = \pm\frac{a}{e}}$$

- Хипербола чије су жиже на y – оси има једначину $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, тада је y – оса реална оса хиперболе, док је x – оса њена имагинарна оса.
- Ако је $\boldsymbol{a = b}$, једначина хиперболе постаје :

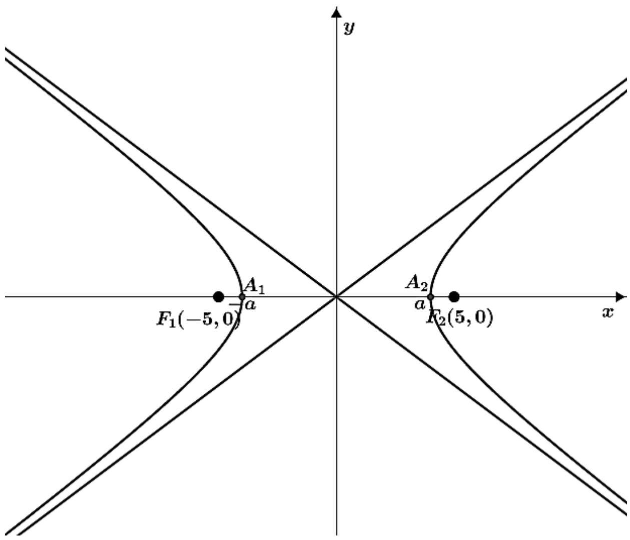
  $$\boldsymbol{x^2 - y^2 = a^2}$$

  Та хипербола се зове **једнакостранична хипербола**. Њене асимптоте $y = x$ и $y = -x$ се секу под правим углом па се она често назива и **правоугла хипербола**.



1) Наћи једначину хиперболе ако су координате жижа $F(\pm 5{,}0)$, а растојање између темена једнако 8.

<u>Решење 1</u>:



$2a = 8 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 4}$ $\qquad F(\pm 5{,}0) \Rightarrow c = 5$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow \boldsymbol{b = 3}$$

$$H: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{H: 9x^2 - 16y^2 = 144}$$

2) Одредити једначину хиперболе која садржи тачке $P(-5,2)$ и $Q\left(2\sqrt{5},\sqrt{2}\right)$.

Решење:

$$H: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\left.\begin{array}{r} P \in H \Rightarrow b^2(-5)^2 - a^2 2^2 = a^2b^2 \\ Q \in H \Rightarrow b^2\left(2\sqrt{5}\right)^2 - a^2\left(\sqrt{2}\right)^2 = a^2b^2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 25b^2 - 4a^2 = a^2b^2 \\ 20b^2 - 2a^2 = a^2b^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 25b^2 - 4a^2 = a^2b^2 \\ 25b^2 - 4a^2 = 20b^2 - 2a^2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 25b^2 - 4a^2 = a^2b^2 \\ 5b^2 = 2a^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 25b^2 - 4a^2 = a^2b^2 \\ 5b^2 = 2a^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} b^2 = \dfrac{2a^2}{5} \\ 25 \cdot \dfrac{2a^2}{5} - 4a^2 = a^2 \cdot \dfrac{2a^2}{5} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} b^2 = \dfrac{2a^2}{5} \\ 6a^2 = \dfrac{2a^4}{5} / \cdot 5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} b^2 = \dfrac{2a^2}{5} \\ 30a^2 = 2a^4 /: 2a^2 \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} b^2 = \dfrac{2a^2}{5} \\ 15 = a^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} b^2 = 6 \\ a^2 = 15 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{a^2 = 15} \\ \boldsymbol{b^2 = 6} \end{array}\right\}$$

$$H: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \ \wedge \ a^2 = 15 \ \wedge \ b^2 = 6 \Rightarrow$$

$$H: 6x^2 - 15y^2 = 6 \cdot 15 /: 3 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{H: 2x^2 - 5y^2 = 30}$$