Teoría – Tema 9

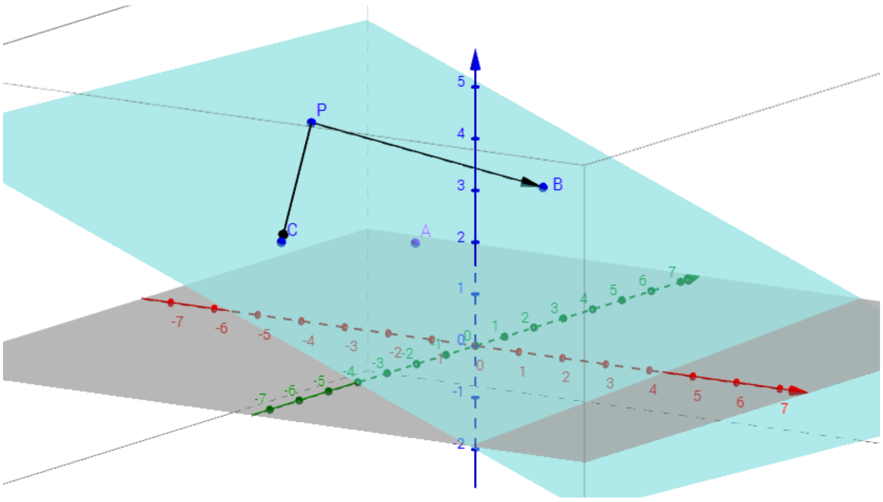
Teoría - 5 - ecuación vectorial y paramétrico del plano

Ecuación vectorial y paramétrica

Si recordamos la teoría sobre las ecuaciones de la recta, comenzamos demostrando que dado un punto de la recta y un vector director de la recta podíamos escribir la ecuación vectorial de la recta. ¿Te acuerdas?

Pues ahora podemos escribir la ecuación vectorial del plano con la ayuda de un punto $A(x_0, y_0, z_0)$ del plano y de dos vectores $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$ linealmente independientes.

Todos los puntos $P(x, y, z)$ *del plano vienen determinados por un punto* $A(x_0 y_{0,} z_0)$ *y dos vectores linealmente independientes* $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$ *y* $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$



En efecto. Si denotamos los vectores linealmente independientes de la imagen superior como $\vec{PB}=\vec{u}$ y $\vec{PC}=\vec{v}$:

$$\vec{OP}=\vec{OA}+\vec{AP}$$

Por estar los tres vectores en el mismo plano, serán combinación lineal → $\vec{AP}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$. Por lo tanto:

$$\vec{OP}=\vec{OA}+\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$

$$(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\alpha(u_x, u_y, u_z)+\beta(v_x, v_y, v_z)$$

Ecuación vectorial del plano

$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\alpha(u_x,u_y,u_z)+\beta(v_x,v_y,v_z)$

(x_0,y_0,z_0) → Coordenadas de un punto del plano

(u_x,u_y,u_z) , (v_x,v_y,v_z) → Dos vectores del plano linealmente independientes

Es decir, con un punto y dos vectores linealmente independientes tenemos la ecuación del plano. Esto debe ser un "lema espiritual" que debemos repetir para interiorizar:

"Con un punto y dos vectores linealmente independientes tenemos la ecuación del plano", "Con un punto y dos vectores linealmente independientes tenemos la ecuación del plano", "Con un punto y dos vectores linealmente independientes tenemos la ecuación del plano"...

Esta terna de valores (punto, vector, vector) se conoce como determinación lineal de un plano.

$\Pi(\vec{u},\vec{v},A)$ → **Determinación lineal de un plano a partir de un punto y dos vectores**

Expresando la ecuación vectorial en sus tres componentes, llegamos a la ecuación paramétrica.

Ecuación paramétrica del plano

$$\left\{\begin{array}{c} x=x_0+\alpha\cdot u_x+\beta\cdot v_x \\ y=y_0+\alpha\cdot u_y+\beta\cdot v_y \\ z=z_0+\alpha\cdot u_z+\beta\cdot v_z \end{array}\right\}$$

Ejemplo 1 resuelto

Hallar las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $P(2,3,1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}=(-1,2,4)$ y $\vec{v}=(1,2,1)$.

Recordamos que **para obtener la ecuación de un plano necesitamos un punto y dos vectores que sean linealmente independientes**.

Para demostrar que dos vectores son linealmente independientes tenemos muchas formas de operar. Una, por ejemplo, es aplicar la definición:

$a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}=\vec{0}$ con $a=b=0$

Planteamos el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas (recuerda que las incógnitas son a,b), y resolvemos por Gauss.

$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$ → $F'_2=F_2+2F_1$, $F'_3=F_3+4F_1$ → $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$ → Las filas F_2 y F_3 con proporcionales → Podemos obviar una → $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$ → Llegamos a una matriz triangular con dos ecuaciones no nulas → 2 ecuaciones y 2 incógnitas → Solución única → S.C.D. → $a=b=0$ por ser el sistema homogéneo.

Otra forma de demostrarlo es usar determinantes para comprobar que el rango de la matriz de coeficiente es 2, y que coincide con el rango al de la matriz ampliada.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Menor de orden 2} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-6\neq 0 \rightarrow Rango(A)=2 \ .$$

$$|A/C|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \text{Hay una columna de términos nulos} \rightarrow Rango(A/C)=2$$

Si los vectores son linealmente independientes, planteamos la **ecuación paramétrica**.

$$\begin{Bmatrix} x=2+\alpha\cdot(-1)+\beta \\ y=3+\alpha\cdot 2+\beta\cdot 2 \\ z=1+\alpha\cdot 4+\beta \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x=2-\alpha+\beta \\ y=3+2\alpha+2\beta \\ z=1+4\alpha+\beta \end{Bmatrix}$$

Ejercicio 2 resuelto

Obtener un punto que pertenezca al plano de ecuación $\begin{Bmatrix} x=2-\alpha+\beta \\ y=3+2\alpha+2\beta \\ z=1+4\alpha+\beta \end{Bmatrix}$

Dando valores a las coordenadas $x\,,y$ para operar en el sistema y obtener el valor de z . Por ejemplo: Si $x=0, y=0$:

$$\begin{Bmatrix} 0=2-\alpha+\beta \\ 0=3+2\alpha+2\beta \\ z=1+4\alpha+\beta \end{Bmatrix} \rightarrow \text{De las dos primeras ecuaciones} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0=2-\alpha+\beta \\ 0=3+2\alpha+2\beta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0=4-2\alpha+2\beta \\ 0=3+2\alpha+2\beta \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Sumamos} \rightarrow 0=7+4\beta \rightarrow \beta=\frac{-7}{4}$$

$$\begin{Bmatrix} 0=4-2\alpha+2\beta \\ 0=3+2\alpha+2\beta \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Restamos} \rightarrow 0=1-4\alpha \rightarrow \alpha=\frac{1}{4}$$

Y llevamos los valores $\alpha=\frac{1}{4}$ y $\beta=\frac{-7}{4}$ a la tercera ecuación paramétrica para obtener el valor de la variable z .

$$z=1+4\alpha+\beta \rightarrow z=1+4\cdot\frac{1}{4}-\frac{7}{4} \rightarrow z=\frac{1}{4} \rightarrow \textbf{Nuestro punto es } P\left(0,0,\frac{1}{4}\right) \ .$$

Ejemplo 3 resuelto

¿Cómo saber si el punto $P\left(0,0,\frac{21}{4}\right)$ **pertenece al plano** $\begin{Bmatrix} x=2-\alpha+\beta \\ y=3+2\alpha+2\beta \\ z=1+4\alpha+\beta \end{Bmatrix}$ **?**

Sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación paramétrica del plano y comprobar si existe solución para las incógnitas α,β .

$\begin{Bmatrix} x=2-\alpha+\beta \\ y=3+2\alpha+2\beta \\ z=1+4\alpha+\beta \end{Bmatrix}$ → sustituimos coordenadas de $P\left(0,0,\frac{21}{4}\right)$ → $\begin{Bmatrix} 0=2-\alpha+\beta \\ 0=3+2\alpha+2\beta \\ \frac{21}{4}=1+4\alpha+\beta \end{Bmatrix}$

Solución única $\alpha=\frac{3}{2},\beta=\frac{-7}{4}$ → **El punto sí pertenece al plano.**

Ejemplo 4 resuelto

¿Pertenece $Q(-1,1,0)$ **al plano** $\begin{Bmatrix} x=2-\alpha+\beta \\ y=3+2\alpha+2\beta \\ z=1+4\alpha+\beta \end{Bmatrix}$ **?**

$\begin{Bmatrix} x=2-\alpha+\beta \\ y=3+2\alpha+2\beta \\ z=1+4\alpha+\beta \end{Bmatrix}$ → sustituimos coordenadas de $Q(-1,1,0)$ → $\begin{Bmatrix} -1=2-\alpha+\beta \\ 1=3+2\alpha+2\beta \\ 0=1+4\alpha+\beta \end{Bmatrix}$

Trabajamos con las dos primeras ecuaciones → $\begin{Bmatrix} -1=2-\alpha+\beta \\ 1=3+2\alpha+2\beta \end{Bmatrix}$ → $\begin{Bmatrix} -3=-\alpha+\beta \\ -2=2\alpha+2\beta \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} -6=-2\alpha+2\beta \\ -2=2\alpha+2\beta \end{Bmatrix}$ → Sumamos → $-8=4\beta$ → $\beta=-2$

$\begin{Bmatrix} -6=-2\alpha+2\beta \\ -2=2\alpha+2\beta \end{Bmatrix}$ → Restamos → $-4=-4\alpha$ → $\alpha=1$

Llevamos estos dos valores a la tercera ecuación paramétrica para saber si se cumple.

$0=1+4\alpha+\beta$ → $0=1+4-2$ → $0=3$ → Absurdo matemático → **No pertenece al plano.**