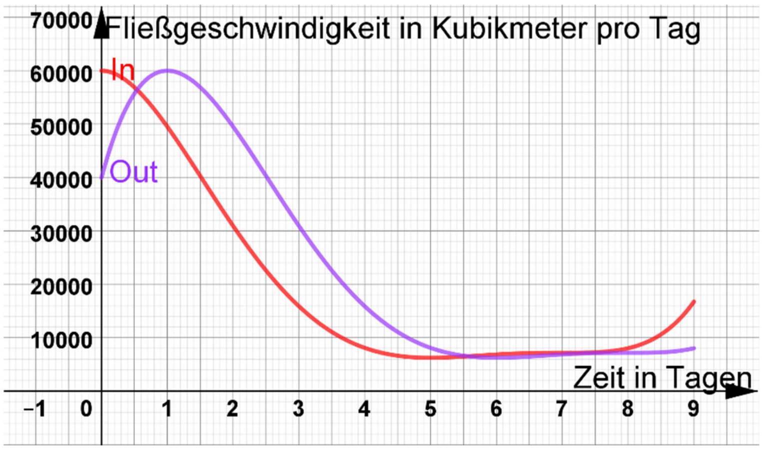
Beispiel Aufgabe aus der Analysis für den 1. Teil einer mündlichen Abiturprüfung

Ein See hat einen Zufluss und einen Abfluss.

Über einen Zeitraum von 9 Tagen kann der zeitliche Verlauf der Zuflussgeschwindigkeit durch die Funktion In modelliert werden.

Der zeitliche Verlauf der Abflussgeschwindigkeit am Ausfluss aus dem See wird durch die Funktion Out modelliert.



$$In(x) = 24\,x^5 - 570\,x^4 + 4760\,x^3 - 14700\,x^2 + 60000$$

$$Out(x) = In(x-1)$$

a) Berechnen Sie $In(2) - Out(2)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.

b) In besitzt an den Stellen $x_1 = 0, x_2 = 5$ lokale Extremstellen und an der Stelle $x_3 = 7$ eine Sattelstelle.
Erläutern Sie, wie Sie diese Behauptung rechnerisch überprüfen.

c) Zeigen Sie rechnerisch, dass die maximale Zuflussgeschwindigkeit $60000\,\frac{m^3}{Tag}$ beträgt.

d) Interpretieren Sie die Bedeutung von $Out(x) = In(x-1)$ im Sachkontext.

e) Zum Zeitpunkt $x = 2$ Tage befanden sich insgesamt $40000 m^3$ Wasser im See.
Zeigen Sie rechnerisch, dass der zeitliche Verlauf der Wassermenge im See durch die Funktion

$$V(x) = 24\,x^5 - 630\,x^4 + 5980\,x^3 - 23040\,x^2 + 20054\,x + 53524$$

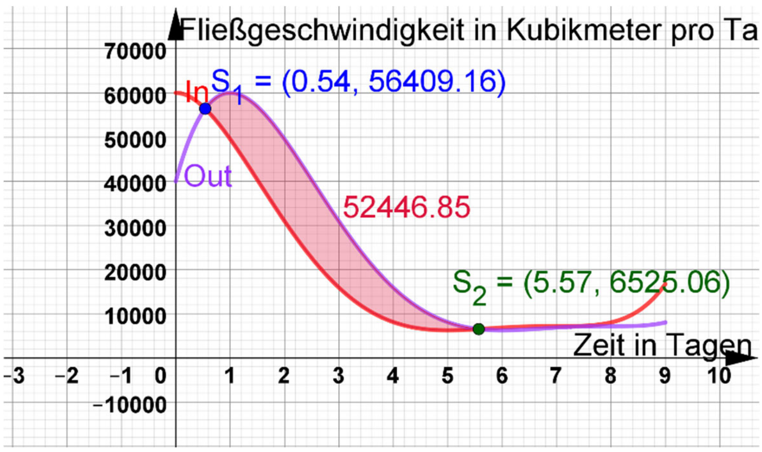
modelliert werden kann.

f) Interpretieren Sie

$$\frac{1}{9}\int_0^9 \big(In(x) - Out(x)\big)dx = -4732$$

im Sachkontext.

g) Die Punkte $S_1(0.54|56409.16)$ und $S_2(5.57|6525.06)$ sind Schnittpunkte der Graphen von In und Out.



(1) Interpretieren Sie die Schnittpunkte im Sachkontext.

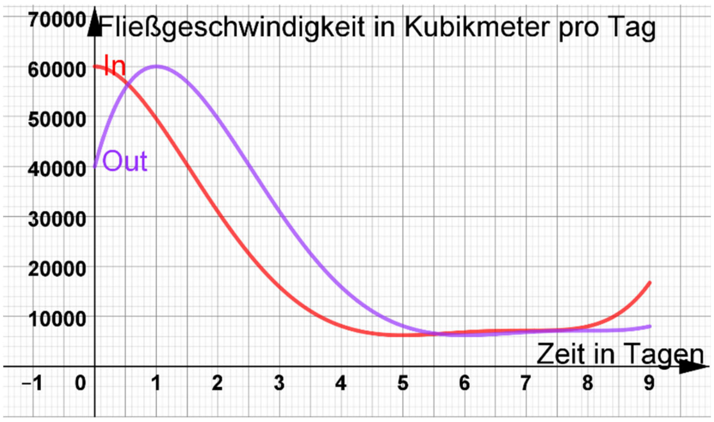
(2) Zwischen S_1 und S_2 gilt $Out(x) > In(x)$. Interpretieren Sie diese Aussage im Sachkontext.

(3) Interpretieren Sie die Fläche zwischen den Graphen im Sachkontext.

Ein See hat einen Zufluss und einen Abfluss.

Über einen Zeitraum von 9 Tagen kann der zeitliche Verlauf der Zuflussgeschwindigkeit durch die Funktion In modelliert werden.

Der zeitliche Verlauf der Abflussgeschwindigkeit am Ausfluss aus dem See wird durch die Funktion Out modelliert.



$$In(x) = 24\,x^5 - 570\,x^4 + 4760\,x^3 - 14700\,x^2 + 60000$$

$$Out(x) = In(x-1)$$

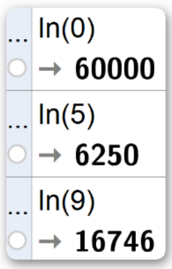
a) Berechnen Sie $In(2) - Out(2)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.

$$In(2) - Out(2) = -18586$$

Die Funktion In modelliert die Fließgeschwindigkeit in den See und die Funktion Out modelliert die Fließgeschwindigkeit aus dem See heraus. Die Differenz der beiden Fließgeschwindigkeiten modelliert die Änderungsrate der Wassermenge im See. Zum Zeitpunkt 2 Tage beträgt die Änderungsrate des Wasservolumens im See $-18586\,m^3$.

b) In besitzt an den Stellen $x_1 = 0, x_2 = 5$ lokale Extremstellen und an der Stelle $x_3 = 7$ eine Sattelstelle.
Erläutern Sie, wie Sie diese Behauptung rechnerisch überprüfen.
Für ein lokales Extremum und für eine Sattelstelle muss die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ erfüllt sein. Deshalb überprüft man zunächst, ob $In'(0), In'(5) = 0$ und $In'(7) = 0$.
Weiterhin kann man mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums untersuchen, ob es sich um lokale Maxima, lokale Minima oder Sattelstellen handelt. Für ein lokales Maximum gilt, dass das Vorzeichen der Ableitung an der Nullstelle von positiv zu negativ wechselt. Für ein lokales Minimum gilt, dass das Vorzeichen der Ableitung an der Nullstelle von negativ zu positiv wechselt. An der Sattelstelle hat die Ableitung ebenfalls eine Nullstelle, das Vorzeichen wechselt aber nicht.

c) Zeigen Sie rechnerisch, dass die maximale Zuflussgeschwindigkeit $60000\,\frac{m^3}{Tag}$ beträgt.



Für die Stelle des globalen Maximums gilt, dass dort entweder ein lokales Maximum vorliegt oder dass es sich um eine Randstelle handelt. Da aus dem Aufgabenteile b) bereits bekannt ist, dass die Funktion an den Stellen 0 und 5 lokale extremer besitzt, berechnet man die Funktionswerte an den Randstellen und an den Stellen der lokalen Extrema:

$$In(0) = 60000$$
$$In(5) = 6250$$
$$In(9) = 16746$$

da 60.000 der größte Wert ist, beträgt der Maximalwert der Zuflussgeschwindigkeit 60.000 m³ pro Tag.

d) Interpretieren Sie die Bedeutung von $Out(x) = In(x-1)$ im Sachkontext.

Ersetzt man in einem Funktionsterm x durch $x-1$, so verschiebt man den Graphen um 1 nach rechts. Im Sachkontext bedeutet das, dass die Ausflussgeschwindigkeit aus dem See gleich der Zuflussgeschwindigkeit in den See vor einem Tag ist. Die Abflussgeschwindigkeit folgt mit einem Abstand von einem Tag der Zuflussgeschwindigkeit.

e) Zum Zeitpunkt $x = 2$ Tage befanden sich insgesamt $40000m^3$ Wasser im See. Zeigen Sie rechnerisch, dass der zeitliche Verlauf der Wassermenge im See durch die Funktion

$$V(x) = 24\,x^5 - 630\,x^4 + 5980\,x^3 - 23040\,x^2 + 20054\,x + 53524$$

modelliert werden kann.

Die Wassermenge im See ist der Bestand und wird durch die Stammfunktion der Änderungsrate der Wassermenge bestimmt.

$$V(x) = \int \big(In(x) - Out(x)\big)dx + C$$

mithilfe von Geogebra findet man

$$V(x) = 24\,x^5 - 630\,x^4 + 5980\,x^3 - 23040\,x^2 + 20054\,x + C$$

mit der Bedingung

$$V(2) = 40000$$

berechnet man schließlich

$$C = 53524$$

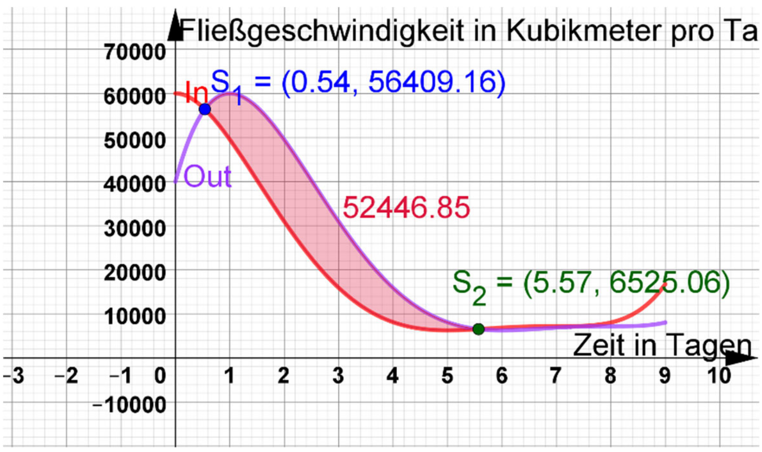
f) Interpretieren Sie

$$\frac{1}{9}\int_0^9 \big(In(x) - Out(x)\big)dx = -4732$$

im Sachkontext.

Die durchschnittliche Änderungsrate der Wassermenge beträgt im Modellzeitraum $-4732\,m^3$ pro Tag.

g) Die Punkte $S_1(0.54|56409.16)$ und $S_2(5.57|6525.06)$ sind Schnittpunkte der Graphen von In und Out.



(1) Interpretieren Sie die Schnittpunkte im Sachkontext.

An den Schnittpunkten ist die Zuflussgeschwindigkeit gleich der Ausflussgeschwindigkeit. Das bedeutet, dass zu diesen Zeitpunkten sich die Wassermenge im See nicht ändert.

(2) Zwischen S_1 und S_2 gilt $Out(x) > In(x)$.

Interpretieren Sie diese Aussage im Sachkontext.

Zwischen den Zeitpunkten 0,54 Tage und 5,57 Tage ist die Abflussgeschwindigkeit größer als die Zuflussgeschwindigkeit. Das bedeutet, dass zwischen diesen beiden Zeitpunkten die Wassermenge im See kontinuierlich abnimmt.

(3) Interpretieren Sie die Fläche zwischen den Graphen im Sachkontext.

Die Fläche zwischen 2 Graphen berechnet man, indem man das Integral der Differenzfunktion bildet. Die dargestellte Fläche entspricht also der Rechnung

$$\int_{0,54}^{5,57} Out(x) - In(x)\,dx$$

und gibt somit das Volumen des abgeschlossenen Wassers in diesem Zeitabschnitt an.