Matemática Essencial

Funções quadráticas

Matemática - UEL - 2010 - Compilada em 18 de Março de 2010.

Prof. Ulysses Sodré

Matemática Essencial: http://www.mat.uel.br/matessencial/

Conteúdo

'Embora conheçam a Deus, os pagãos não lhe dão a honra que merece e não lhe são agradecidos. Ao contrário, acabaram pensando só em tolices e as suas mentes vazias estão cheias de escuridão.' *A Bíblia Sagrada, Romanos 1:21*

1 A função quadrática (Parábola)

A função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

onde a, b e c são constantes reais, sendo o domínio de f denotado por $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e a imagem de f denotada por $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. Esta função também recebe o nome de *função trinômia* do segundo grau, uma vez que a expressão

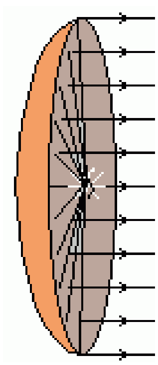
$$ax^2 + bx + c = 0$$

representa uma equação trinômia do segundo grau ou simplesmente uma equação do segundo grau. O gráfico cartesiano desta função polinomial do segundo grau é uma curva plana denominada parábola.

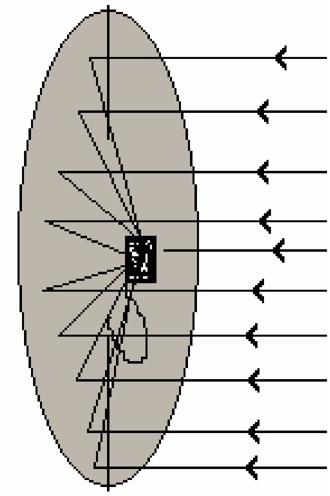
2 Aplicações práticas das parábolas

Dentre as dezenas de aplicações da parábola a situações da vida, as mais importantes são:

Faróis de carros: Se colocarmos uma lâmpada no *foco* de um espelho com a superfície parabólica e esta lâmpada emitir um conjunto de raios luminosos que venham a refletir sobre o espelho parabólico do farol, os raios refletidos sairão todos paralelamente ao eixo que contem o *foco* e o vértice da superfície parabólica. Esta é uma propriedade geométrica importante ligada à Ótica, que permite valorizar bastante o conceito de parábola no âmbito do Ensino Fundamental.

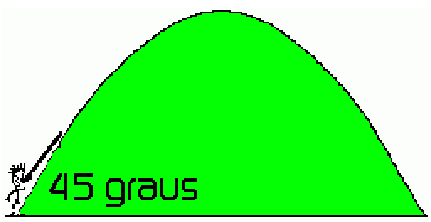


Antenas parabólicas: Se um satélite artificial colocado em uma órbita *geoestacionária* emite um conjunto de ondas eletromagnéticas, estas poderão ser captadas pela sua antena parabólica , uma vez que o feixe de raios atingirá a sua antena que tem formato parabólico e ocorrerá a reflexão desses raios exatamente para um único lugar, denominado o foco da parábola, onde estará um aparelho de receptor que converterá as ondas eletromagnéticas em um sinal que a sua TV poderá transformar em ondas que por sua vez significarão filmes, jornais e outros programas que você assiste normalmente.



Radares: Os radares usam as propriedades óticas da *parábola*, similares às citadas anteriormente para a antena parabólica e para os faróis.

Lançamentos de projéteis: Ao lançar um objeto no espaço (dardo, pedra, tiro de canhão) visando alcançar a maior distância possível tanto na horizontal como na vertical, a curva descrita pelo objeto é aproximadamente uma parábola, se considerarmos que a resistência do ar não existe ou é pequena.



Sob estas circunstâncias o ângulo de maior alcance horizontal é de 45 graus.

3 O sinal do coeficiente do termo dominante

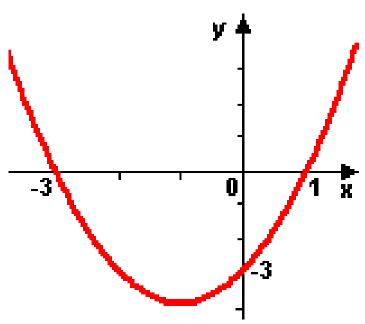
O sinal do coeficiente do termo dominante desta função polinomial indica a concavidade da parábola (*boca aberta*). Se $a > 0$ então a concavidade está voltada para cima e se $a < 0$ estará voltada para baixo.

Exemplo: A parábola, que é o gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$, pode ser vista no desenho, em anexo.

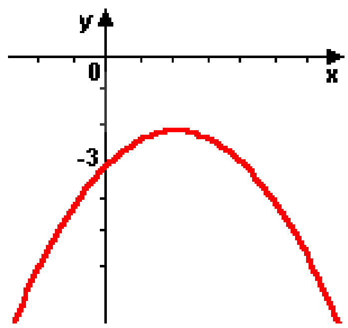
O modo de construir esta parábola é atribuir valores para x e obter os respectivos valores para $f(x)$. A tabela a seguir mostra alguns pares ordenados de pontos do plano cartesiano onde a curva deverá passar:

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	0	-3	-4	-3	0	5

Como $a > 0$, a concavidade (*boca*) da parábola está voltada para cima.



(a) Parábola $f(x) = x^2 + 2x - 3$



(b) Parábola $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

Exemplo: Construir a parábola $f(x) = -x^2 + 2x - 3$. Este exemplo é análogo ao anterior, só que nesse caso, $a < 0$, logo sua concavidade será voltada para baixo. A diferença entre esta parábola e a do exemplo anterior é que, houve a mudança do sinal do coeficiente do termo dominante.

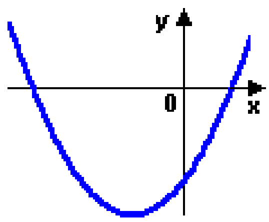
A construção da tabela nos dá:

x	-1	0	1	2	3
f(x)	-6	-3	-2	-3	-6

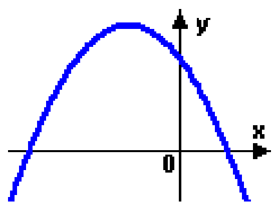
4 Relacionamento entre o discriminante e a concavidade

Podemos construir uma tabela que relaciona o sinal do discriminante com o sinal do coeficiente do termo dominante da função polinomial.

1. Se $\Delta > 0$, a parábola corta o eixo horizontal em 2 pontos:

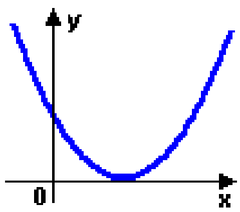


(c) a>0

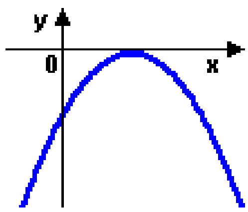


(d) a<0

2. Se $\Delta = 0$ e $a > 0$ a parábola toca em 1 ponto do eixo horizontal:

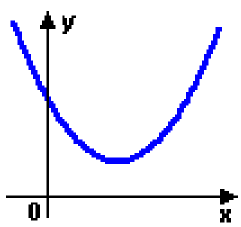


(e) a>0

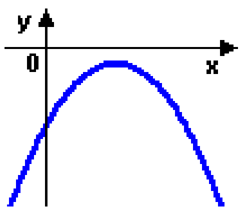


(f) a<0

3. Se $\Delta < 0$, a parábola não corta o eixo horizontal:



(g) a>0



(h) a<0

Exercícios: Construir o gráfico de cada função do segundo grau:

1. $f(x) = x^2 - 3x - 4$ 2. $f(x) = -3x^2 + 5x - 8$ 3. $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

5 Máximos e mínimos com funções quadráticas

Existem muitas aplicações para a função quadrática e uma delas está relacionada com a questão de máximos e mínimos.

Exemplo: Determinar o retângulo de maior área que é possível construir se o seu perímetro mede 36 m.

Solução: Se x é a medida do comprimento e y é a medida da largura, a área será dada por: $A(x, y) = xy$, mas acontece que $2x+2y = 36$ ou seja $x+y = 18$, assim:

$$A(x) = x(18-x)$$

Esta parábola corta o eixo OX nos pontos $x = 0$ e $x = 18$ e o ponto de máximo dessa curva ocorre no ponto médio entre $x = 0$ e $x = 18$, logo, o ponto de máximo desta curva ocorre em $x = 9$. Observamos que este não é um retângulo qualquer mas é um quadrado pois $x = y = 9$ e a área máxima será A=81m^2