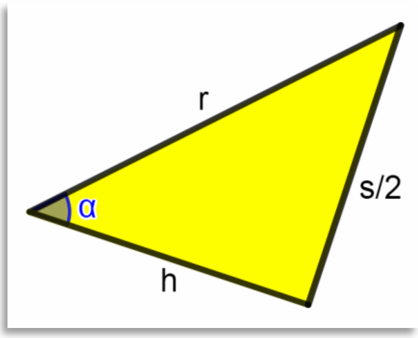
Die Kreiszahl π wird approximiert

Unter Approximation verstehen Mathematiker im Allgemeinen ein Näherungsverfahren.

Aufgabe 1:
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck (siehe Figur rechts).
Gib einen Term an, mit dem man aus r und α die Seitenlänge s bestimmen kann.



Lösung zu Aufgabe 1:

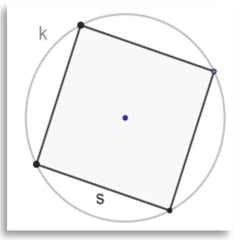
$$sin(\alpha) = \frac{\frac{s}{2}}{r}$$

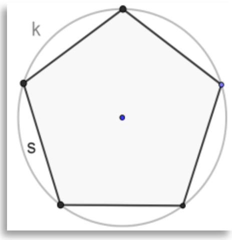
Umgeformt nach s: $s = 2 \cdot r \cdot \; sin(\alpha)$

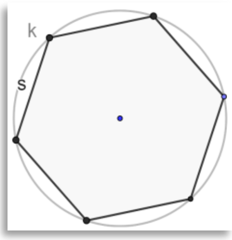
Term: $\boldsymbol{2 \cdot r \cdot \; sin(\alpha)}$

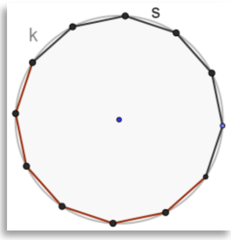
Eine Folge von regelmäßigen n-Ecken

Um den Umfang U_k eines Kreises k zu bestimmen, wird diesem ein regelmäßiges 4-Eck (5-Eck, 6-Eck, 12-Eck, …) einbeschrieben:









$n = 4$ $\quad$ $n = 5$ $\quad$ $n = 6$ $\quad$ $n = 12$

$U_{4-Eck} = 4 \cdot s \quad U_{5-Eck} = 5 \cdot s \quad U_{6-Eck} = 6 \cdot s \quad U_{12-Eck} = 12 \cdot s$

Aufgabe 2:
Was stellst du für wachsende n-Werte (von links nach rechts betrachtet) fest?

„Je größer die Zahl n, desto …“

Lösung zu Aufgabe 2:

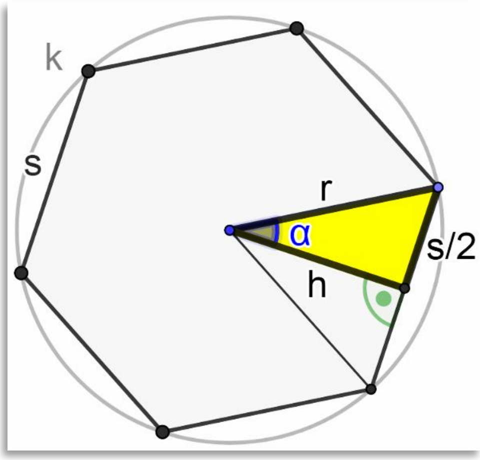
(1) „Je größer die Zahl n, desto kleiner werden die Seitenlängen s.

(2) „Je größer die Zahl n, desto näher liegen die Seitenlängen s an der Kreislinie an.“

(3) „Je größer die Zahl n, desto besser gilt für beide Umfänge: $U_{n-Eck} \approx U_k$.“

Wird dem Kreis k ein regelmäßiges 6-Eck einbeschrieben, dann gilt für den Umfang des Sechsecks:

$U_{6-Eck} = 6 \cdot s.$



Aufgabe 3:

Berechne die Winkelweite α.

Aufgabe 4:

Gib einen Term an, mit dem man aus den Zahlen r und α den Umfang U_{6-Eck} berechnen kann.

Aufgabe 5:

Die Zahl n sei variabel.

Gib einen Term an, mit dem man aus den Zahlen r und n den Umfang U_{n-Eck} berechnen kann.

Lösung zu Aufgabe 3:

$$\alpha = \frac{360°}{2 \cdot 6} = \frac{180°}{6} = 30°$$

Lösung zu Aufgabe 4:

$$U_{6-Eck}$$

$$= 6 \cdot s$$

$$= 6 \cdot 2 \cdot r \cdot sin(\alpha)$$

$$= 12 \cdot r \cdot sin\left(\frac{180°}{6}\right)$$

$$= 12 \cdot r \cdot sin(30°)$$

Lösung zu Aufgabe 5:

$$U_{n-Eck} = 2 \cdot r \cdot n \cdot sin\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Aufgabe 6:

Untersuche in einer Tabellenkalkulation wie sich die Werte des Terms $\boldsymbol{n \cdot sin\left(\frac{180°}{n}\right)}$ verhalten, wenn die Zahl n fortlaufend verdoppelt wird.

Lösung zu Aufgabe 6:

n	n sin(180°/n)
3	2.5980762114
6	3
12	3.1058285412
24	3.1326286133
48	3.139350203
96	3.1410319509
192	3.1414524723
384	3.1415576079
768	3.1415838921
1536	3.1415904632
3072	3.141592106
6144	3.1415925167
12288	3.1415926194
24576	3.141592645
49152	3.1415926515
98304	3.1415926531
196608	3.1415926535

Feststellung: Je größer die Zahl n, desto näher liegen die Werte des Terms $\boldsymbol{n \cdot sin\left(\frac{180°}{n}\right)}$ an der Kreiszahl $\boldsymbol{\pi}$.

$\boldsymbol{\pi} \approx$ 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534 2117068…