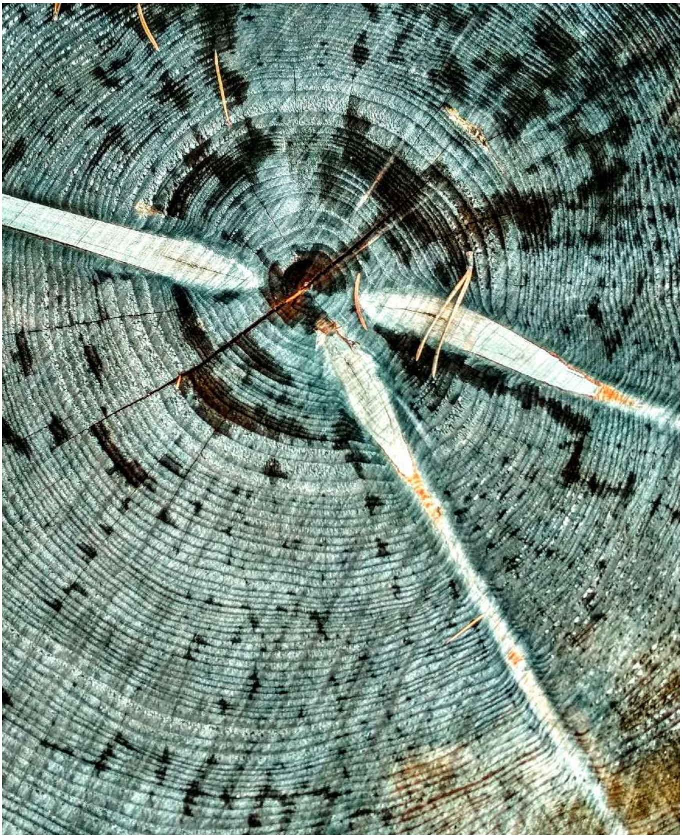
Dřevorubecké meditace

Jak si podomácku vyrobit π?

Žán Pól Kastról



25. listopadu 2021

1 Fantas-magorická vídea

Na TyTubovém kanále **MathWithoutBorders** narazil na nápaditá vídea [3] a [4], která vokazují podstatu ARCHIMÉDOVA postupu při výpočtu čísla π.

Tak jsem si řekl, že by se to dalo prozkoumat podrobněji a vytěžit z toho mnoho positivních podnětův pro středoškolskou vejuku mathematiky. . .

2 Podobnost všech kružnic

Vezmeme-li libovolné dva **trojúhelníky**, potom to mohou a také nemusejí být trojúhelníky *podobné*. Podstatou podobnosti je stejný **tvar** – podobné trojúhelníky mají přesně stejný tvar, byť třeba různou velikost (stejnost tvaru je zaručena **shodností úhlů**). Jeden z nich můžeme vhodně zvětšit či zmenšit tak, aby se dokonale překrývaly, tedy aby se z nich staly trojúhelníky *shodné*. Trojúhelníky, které nemají stejný tvar, podobné nejsou.

Naproti tomu všechny možné, jakkoli veliké **kružnice** mají přesně stejný tvar, tedy jsou si podobné. Vezmeme-li dvě kružnice, vždy můžeme jednu z nich vhodně zvětšit či zmenšit tak, že se bude překrývat s druhou, tedy že s ní bude shodná.

Všechny kružnice jsou si podobné jako vejce vejci!

Víme, že z podobnosti dvou trojúhelníků plyne, že poměry délek libovolných sobě odpovídajících charakteristických úseček (například stran, ale také třeba výšek, těžnic . . .) jsou si **rovny**.

Totéž platí pro kružnice. A protože kružnice jsou si podobné všechny, musí tedy platit:

Poměr délky kružnice o a jejího průměru d je pro všechny kružnice stejný, rovný jisté **konstantě** k.

Neboli

$$\boxed{\frac{o}{d} = k} \tag{1}$$

Vztah (1) říká: kolikrát zvětšíme průměr kružnice d, tolikrát se zvětší její délka o. Neboli:

Délka kružnice je přímo úměrná jejímu **průměru**.

Vztah (1) můžeme psát ve tvaru

$$\boxed{o = k \cdot d} \tag{2}$$

Vztah závislosti délky kružnice na jejím průměru je přímá úměrnost s konstantou úměrnosti k a jejím grafem je přímka procházející počátkem.

Konstanta úměrnosti k je **směrnice** této přímky a vyjadřuje *rychlost růstu* délky s poloměrem.

Je to analogické vztahu

$$s = v \cdot t$$

pro závislost dráhy s *rovnoměrného přímočarého pohybu* na čase t, kde konstantou úměrnosti je rychlost v (to je vlastně rychlost růstu dráhy).

Každej blbec asi ví, že konstantě k se říká **Ludolfovo číslo** a nezačí se k, ale π. Vztah (2) píšeme tedy jako

$$\boxed{o = \pi \cdot d} \tag{3}$$

Tedy slovně

Ó JE PÍD

A pač průměr d jsou dva poloměry r, píšeme často

$$\boxed{o = 2\pi r} \tag{4}$$

Čili slovně

Ó JE DVĚ PÍR

Vztahům (3) a (4) říkáme *vzorec pro délku kružnice*, resp. *vzorec pro obvod kruhu*.

Ze vztahu (3) plyne **definice čísla** π:

$$\boxed{\pi = \frac{o}{d}} \tag{5}$$

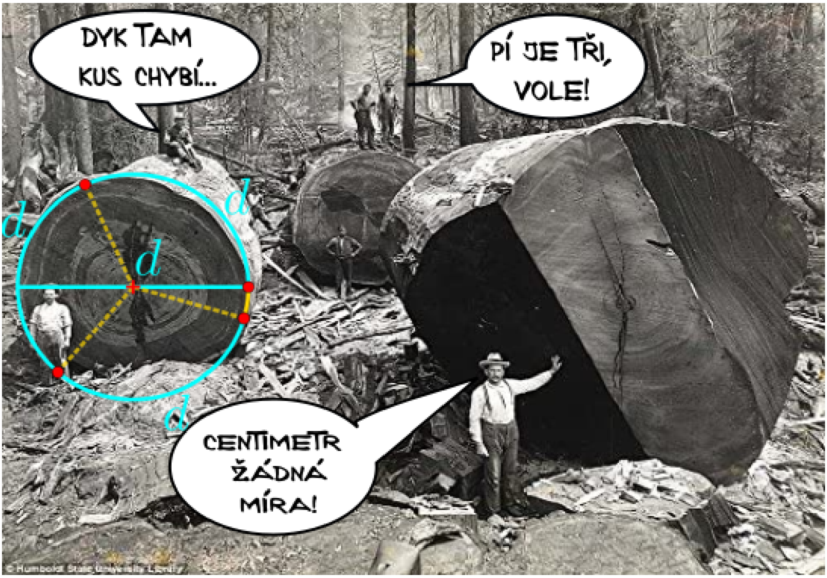
Čili slovně

PÍ JE ÓKUD

Abychom mohli vzorce skutečně použít, musíme znát **hodnotu** π. Pojďme dělat blbečky a předstírat, že hodnotu π neznáme. Jak je možné se této hodnotě dopracovat?

3 Dřevorubecké π

Můj děda, Dřevo-Rubec a strejda Dr-Voštěp (viz obr.1) na základě **měření** pomocí provazu zjistili, že obvod stromu (kruhu) je zhruba 3×



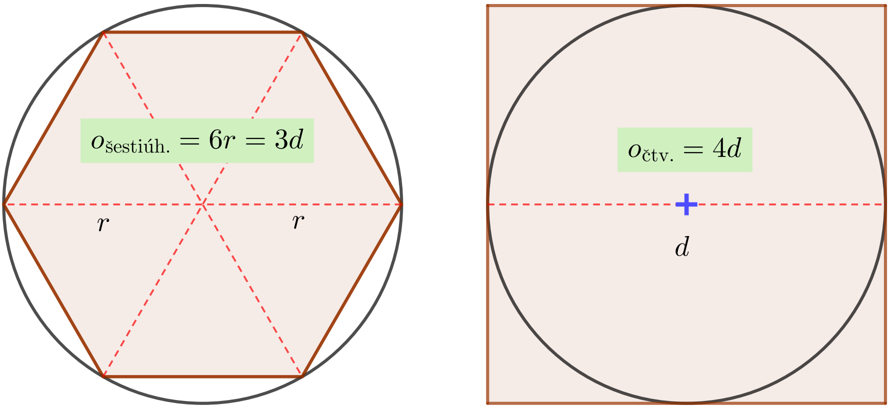
Obr. 1: Dřevorubecké π je 3!

větší než jeho průměr. Takže dřevorubecké π je:

$$\boxed{\pi_{\text{dřevorub}} \doteq 3}$$

Mně se to zdálo děsně nepřesné – když si to s provazem zkusíš, je vidět, že do celého obvodu k délce tří průměrů ještě trochu chybí (viz obr.1 vlevo). Tak jsem furt protestoval, ale voni vždycky říkali:

Centimetr – žádná míra!



(a) $\pi > 3$ (b) $\pi < 4$

Obr. 2: Hrubý odhad: $3 < \pi < 4$

4 Odhad π, sice hrubý, ale zato mathematický

Empirické zjišťování hodnoty π pomocí **měření** může být docela postačující pro praktické účely (dřevorubcům stačí hodnota 3, umělecký truhlář by si naměřil hodnotu přesnější...).

Nás ale zajímá, zda jsme schopni hodnotu π **vypočítat** a zda to lze udělat zcela **přesně**. Ano, ukážeme si postupy, jak si opatřit libovolně přesnou hodnotu π. Bohužel však bylo dokázáno, že π je číslo *iracionální*, takže jeho hodnotu lze konečným výpočtem získat vždy jen přibližně, podobně jako je tomu u čísla $\sqrt{2}$.

Dřevorubecké π odpovídá odhadu pomocí vepsaného pravidelného šestiúhelníku, jak je zřejmé z obr.2a. Pač obvod šestiúhelníku je přesně $3d$ a je zjevně menší než délka opsané kružnice, je jisté, že hrubý **dolní**

odhad pro π je:

$$\boxed{\pi > 3}$$

Opíšeme-li kružnici čtverec (obr.2b), je obvod čtverce, který je jistě větší než délka kružnice, roven přesně $4d$. Tím máme hrubý **horní odhad** pro π:

$$\boxed{\pi < 4}$$

Díky vepsanému šestiúhelníku a opsanému čtverci máme π zapasované mezi trojku a šťouru:

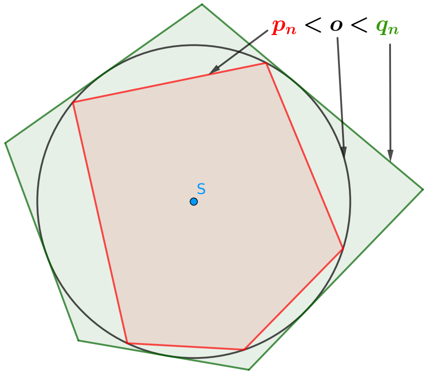
$$\boxed{3 < \pi < 4}$$

5 Archimédova myšlenka

Horními a dolními odhady čísla π pomocí vepisování a opisování pravidelných mnohoúhelníků se zabýval (možná jako první) geniální ARCHIMÉDÉS[1] ve svém spisu (zachovalo se asi jen jeho torso) „*O měření kruhu*“[2] (cca 250 let před Ježíšem Kristusem Super-hvězdou). Toto dílo obsahuje tři věty, s jejichž zněním a důkazy se můžeme seznámit v článku [1]. ARCHIMÉDOVA základní myšlenka odhadu hodnoty π je tato (viz též obr.3):

- **Vepíšeme**-li do daného kruhu *libovolný* n-úhelník, bude jeho obvod p_n **menší** než obvod kruhu o;
- pokud naopak kolem kruhu n-úhelník **opíšeme**, bude jeho obvod q_n **větší** než obvod kruhu o.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedes
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Measurement_of_a_Circle



Obr. 3: Základní myšlenka Archimédova odhadu π

Tedy

$$p_n < o < q_n \tag{6}$$

Vydělíme-li rovnici (6) průměrem kružnice d, dostáváme

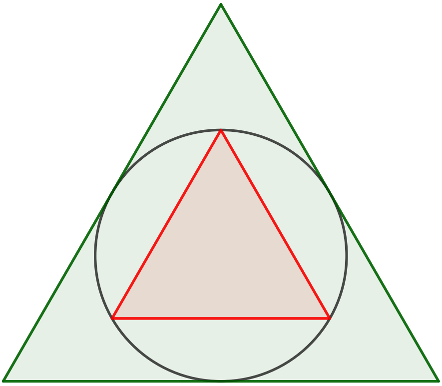
$$\frac{p_n}{d} < \frac{o}{d} < \frac{q_n}{d}$$

Tím dostáváme pro odhad π:

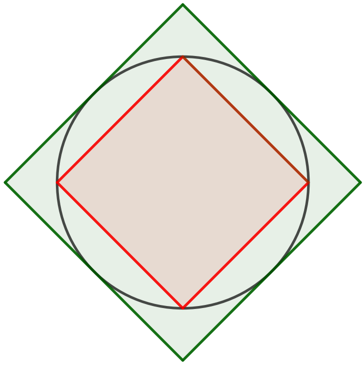
$$\boxed{P_n < \pi < Q_n}$$

kde P_n je **dolní odhad** a Q_n je **horní odhad** čísla π.

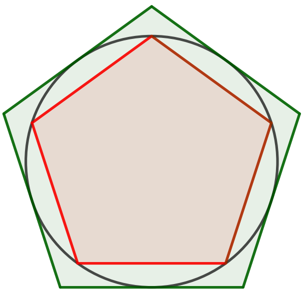
- Je zřejmé, že dolní a horní odhad bude tím přesnější, čím **větší** bude počet stran n.
- Dále je jasné, že z hlediska výpočtů bude nejjednodušší, když použijeme mnohoúhelníky **pravidelné** (viz obr.4).



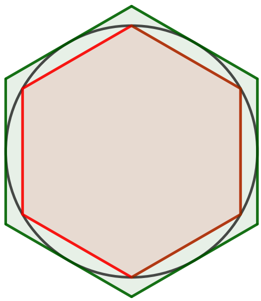
(a) $P_3 < \pi < Q_3$



(b) $P_4 < \pi < Q_4$



(c) $P_5 < \pi < Q_5$



(d) $P_6 < \pi < Q_6$

Obr. 4: Odhad π pomocí vepsaných a opsaných pravidelných $n-$úhelníků

https://www.geogebra.org/m/j4envhyx

V dnešním světě kompjůtrů[3] není problém pomocí *goniometrických funkcí* vyjádřit oba odhady P_n a Q_n pro libovolné n a potom je konkrétně vypočítat na kal-kulajdě. Pojďme to udělat:

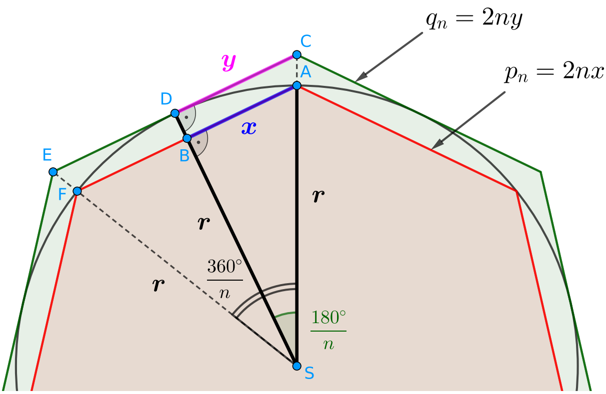
Příklad 1: Odhad *pi* pomocí GOFU

Je dán kruh o poloměru r. Pomocí goniometrických funkcí

a) odvoď vztah pro obvod p_n tomuto kruhu **vepsaného** pravidelného n-úhelníku a najdi vztah pro **dolní** odhad P_n čísla π.

b) odvoď vztah pro obvod q_n tomuto kruhu **opsaného** pravidelného n-úhelníku a najdi vztah pro **horní** odhad Q_n čísla π.

c) Pomocí odvozených odhadů urči hodnotu π s přesností na **dvě** desetinná místa.



Obr. 5: Odvození vztahu pro obvod p_n vepsaného a q_n opsaného pravidelného n-úhelníku.

[3] https://youtu.be/xzbL_VyNV-M

a) Vyjdeme z obrázku 5. Zde je kruhu vepsán červený pravidelný n-úhelník o straně AF. Kruhovému oblouku AF přísluší středový úhel ASF, jehož velikost je zřejmě $\frac{360°}{n}$. V rovnoramenném trojúhelníku ASF máme výšku SB, která půlí úhel u vrcholu S, takže jeho velikost je $\frac{180°}{n}$. Označme polovinu strany AF jako x. V pravoúhlém trojúhelníku ABS platí $\sin\frac{180°}{n} = \frac{x}{r}$. Odtud $x = r\sin\frac{180°}{n}$. Pač obvod je zřejmě $p_n = 2nx$, dostáváme

$$p_n = 2nr\sin\frac{180°}{n}$$

Vydělením obvodu průměrem kruhu $d = 2r$ dostáváme vztah pro **dolní odhad** π:

$$\boxed{P_n = n\sin\frac{180°}{n}} \tag{7}$$

b) Dále je v obrázku 5 kruhu opsán zelený pravidelný n-úhelník o straně AF. Kruhovému oblouku AF přísluší středový úhel ASF, jehož velikost je zřejmě $\frac{360°}{n}$. V rovnoramenném trojúhelníku CSE máme výšku SD, která půlí úhel u vrcholu S, takže jeho velikost je $\frac{180°}{n}$. Označme polovinu strany CE jako y. V pravoúhlém trojúhelníku CDS platí $\operatorname{tg}\frac{180°}{n} = \frac{y}{r}$. Odtud $y = r\tan\frac{180°}{n}$. Pač obvod je zřejmě $q_n = 2ny$, dostáváme

$$q_n = 2nr\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$$

Vydělením obvodu průměrem kruhu $d = 2r$ dostáváme vztah pro **horní odhad** π:

$$\boxed{Q_n = n\operatorname{tg}\frac{180°}{n}} \tag{8}$$

c) Nyní vezmeme kal-kulajdu a zjistíme, že odhad $\pi = 3,14159265\ldots$ s přesností na dvě desetinná místa

$$\boxed{\pi \approx 3,14}$$

vyžaduje n alespoň 57. V apletu v GeoGebře si můžeme udělat další odhady na jiný počet míst:

https://www.geogebra.org/m/g5fsctsg

6 Ale Archimédés neměl k dispozici GOFU!

ARCHIMÉDÉS neměl ve své době k dispozici goniometrické funkce[4], takže nemohl pro výpočet odhadů P_n a Q_n použít vztahy (7) a (8).

Postupoval jinak:

- Začal *šestiúhelníkem* **vepsaným** a **opsaným** kruhu o poloměru r.
- Vyjádřil jejich **strany** a_6 a b_6 pouze pomocí základních početních operací

  $$+,\ -,\ \times,\ :,\ \sqrt{\ }$$

  Pro $r = 1$ mu zřejmě vyšlo

  $$a_6 = 1 \qquad\qquad b_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

  Pro hodnotu $\sqrt{3}$ prý využil velmi přesného odhadu

  $$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

[4] První goniometrické tabulky sestavil asi až *Hipparchos* (cca $180 - 125$ př.Kr.).

Ze známých stran určil **obvody** $p_6 = 6a_6$ a $q_6 = 6b_6$ a vydělením obvodů průměrem $d = 2r$ dostal první dolní a horní odhad čísla π:

$$P_6 = \frac{6 \cdot a_6}{d} < \pi < Q_6 = \frac{6 \cdot b_6}{d}$$

- Nyní zdvojnásobil počet stran (dostal vepsaný a opsaný *dvanáctiúhelník*) a našel způsob, jak opět jen pomocí základních početních operací vyjádřit jejich strany a_{12} a b_{12} pomocí již vypočítaných stran šestiúhelníků. Odtud dostal další dolní a horní odhad čísla π:

$$P_{12} = \frac{12 \cdot a_{12}}{d} < \pi < Q_{12} = \frac{12 \cdot b_{12}}{d}$$

- Takto pokračoval ve zdvojování a skončil u vepsaného a opsaného 96-úhelníku:

$$\boxed{P_{96} = \frac{96 \cdot a_{96}}{d} < \pi < Q_{96} = \frac{96 \cdot b_{96}}{d}}$$

K jakým hodnotám konkrétně Archimédés dospěl?

Ve svém spisu *Měření kruhu* uvádí tuto větu:

> The ratio of the circumference of any circle to its diameter is less than $3\frac{1}{7}$ but greater than $3\frac{10}{71}$.

Neboli jeho odhad je

$$\boxed{\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}} \tag{9}$$

Tedy

$$\boxed{3,140845\ldots < \pi < 3,142857\ldots} \tag{10}$$

Vidíme, že jeho odhad je přesný **na dvě desetinná místa**[5].

Hodnota $\pi \doteq \frac{22}{7}$ je dobře známá a nemáme-li po ruce kalkulajdu, je vhodnější pracovat s tímto zlomkem než s odhadem $\pi \doteq 3,14$.

Pojďme si Archimédův postup projít s tím, že budeme používat kalkulajdu či tabulkový procesor a dospějeme ke stejně přesnému odhadu (byť ne tak elegantně vyjádřenému pomocí jednoduchých zlomků).

6.1 Dolní odhady – a_{2n} pomocí a_n

Příklad 2: Vepsaný 6-úhelník a 12-úhelník

Je dán kruh o poloměru $r = 1$. Najdi strany a_6 a a_{12} vepsaného 6-úhelníku a 12-úhelníku a jim odpovídající dolní odhady P_6 a P_{12} čísla π.

Vyjdeme z obrázku 6. Je zřejmé, že ΔASF je rovnostranný, proto

$$\boxed{a_6 = 1} \tag{11}$$

Odtud dostáváme $P_6 = \frac{6 \cdot a_6}{d} = 3a_6$, tedy

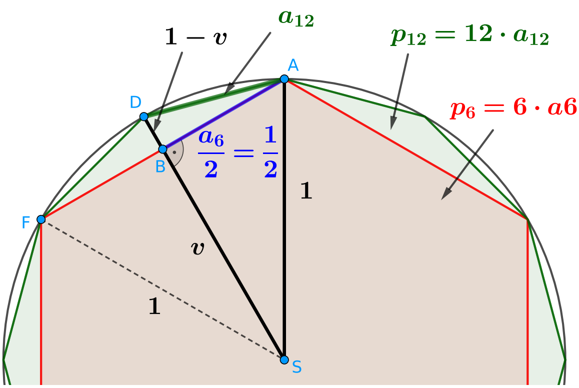
$$\boxed{P_6 = 3} \tag{12}$$

[5] V důkazu své věty vypočítal Archimédés své odhady sice ještě přesněji:

$$3,140909\ldots = \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} < \pi < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3,142826\ldots$$

ale pro praktické účely zaokrouhlil dolní odhad dolů a horní nahoru na hodnoty uvedené ve vztahu (9).

Výšku SB v ΔASF označíme v. Úsečka DB má potom velikost $1 - v$. Úsečka AB má velikost $\frac{a_6}{2} = \frac{1}{2}$. Stranu 12-úhelníku vypočítáme ji dvojího použití *Pýthagorovy věty* pro trojúhelníky ABS a ABD:



Obr. 6

$$1^2 = v^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \tag{a}$$

$$a_{12}^2 = (1 - v)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \tag{b}$$

Z (a) dostáváme $v = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a po dosazení do (b) máme:

$$a_{12}^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$a_{12}^2 = 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$a_{12}^2 = 2 - \sqrt{3}$$

Odtud máme

$$\boxed{a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \tag{13}$$

Odtud dostáváme $P_{12} = \frac{12 \cdot a_{12}}{d}$, tedy pač $d = 2$:

$$\boxed{P_{12} = 6 \cdot a_{12} \doteq 3,106} \tag{14}$$

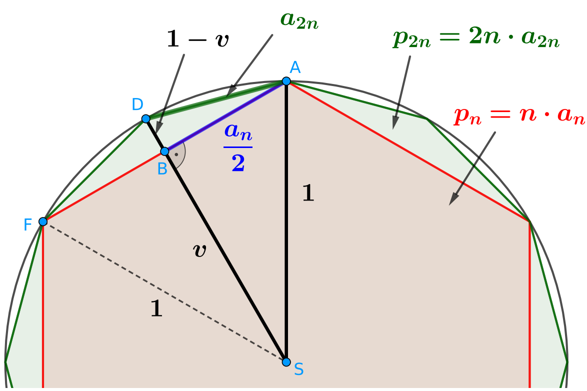
Příklad 3: Vepsaný n-úhelník a $2n$-úhelník

Zobecněním postupu z předchozího příkladu odvoďte vzorce pro výpočet a_{2n} a P_{2n} pomocí a_n.

Vyjdeme z obrázku 7. Opět zapíšeme obě *Pýthagorovy* věty:

$$1^2 = v^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 \tag{a}$$

$$a_{2n}^2 = (1 - v)^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 \tag{b}$$



Obr. 7

Z (a) dostáváme $v = \sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$ a po dosazení do (b) máme:

$$a_{2n}^2 = 1 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} + 1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$$
$$a_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$$
$$a_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - a_n^2}$$

Odtud dostáváme

$$\boxed{a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}} \tag{15}$$

Odtud máme $P_{2n} = \frac{2n \cdot a_{2n}}{d}$, tedy pač $d = 2$:

$$\boxed{P_{2n} = 2n \cdot \frac{a_{2n}}{2}} \tag{16}$$

Příklad 4

Pomocí vztahů (15) a (16) vypočítej strany a_{24}, a_{48}, a_{96} a dolní odhady P_{24}, P_{48}, P_{96} čísla π.

a) a_{24}, P_{24}

Dle vztahu (15) máme

$$a_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_{12}^2}}$$

Sem dosadíme z (13):

$$a_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{3})}}$$

a máme

$$\boxed{a_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \tag{17}$$

Odtud $P_{24} = 24 \cdot \frac{a_{24}}{2}$

$$\boxed{P_{24} = 24 \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2} \doteq 3,133} \tag{18}$$

b) a_{48}, P_{48}

Dle vztahu (15) máme

$$a_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_{24}^2}}$$

Sem dosadíme z (17):

$$a_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)}}$$

a máme

$$\boxed{a_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} \tag{19}$$

Odtud $P_{48} = 48 \cdot \frac{a_{48}}{2}$

$$\boxed{P_{48} = 48 \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}{2} \doteq 3,139} \tag{20}$$

a) a_{96}, P_{96}

Dle vztahu (15) máme

$$a_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_{48}^2}}$$

Sem dosadíme z (19):

$$a_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right)}}$$

a máme

$$\boxed{a_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}} \tag{21}$$

Odtud $P_{96} = 96 \cdot \frac{a_{96}}{2}$

$$P_{96} = 96 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2} \doteq 3,141 \tag{22}$$

Příklad 5

Je dána jednotková kružnice.

a) Pomocí vnořených odmocnin jako ve vztahu (21) zapiš stranu a_{3072} vepsaného 3072-úhelníku.

b) Vypočítej na kal-kulajdě odpovídající dolní odhad P_{3072} pomocí vztahu analogického vztahu (22).

c) Výsledek ověř pomocí vztahu (7) s goniometrickou funkcí.

---

a) Vypíšeme si doposud získané vztahy pro stranu a_n a trochu si s tím pohrajeme:

$$\begin{aligned}
a_6 &= 1\\
a_{12} &= \sqrt{2-\sqrt{3}}\\
a_{24} &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\\
a_{48} &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\\
a_{96} &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}
\end{aligned}$$

neboli:

$$a_6 = a_{(3\cdot 2^1)} = \sqrt{2-\sqrt{1}}$$

$$a_{12} = a_{(3\cdot 2^2)} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{1}}}$$

$$a_{24} = a_{(3\cdot 2^3)} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}$$

$$a_{48} = a_{(3\cdot 2^4)} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$$

$$a_{96} = a_{(3\cdot 2^5)} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}$$

Krástně vidíme, že když rozložíme počet stran daného mnohoúhelníku n na tvar

$$n = 3 \cdot 2^k$$

tak číslo k určuje jednak o kolikátou aproximaci se jedná a dvojak počet zelených odmocnin na pravé straně. Například strana a_{96} představuje **pátou** aproximaci, $96 = 3 \cdot 2^5$ a na pravé straně máme **pět** zelených odmocnin.

Z toho důvodu pro a_{3072} rozložíme

$$3072 = 3 \cdot 2^{10}$$

a vidíme, že se jedná o **desátou** aproximaci a potřebujeme

deset zelených odmocnin.

$$a_{3072} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}}}}}}$$

b) Když to naťukáme do SciCalcu, dostáváme

$$P_{3072} = \frac{3072}{2} \cdot a_{3072} \doteq \boxed{3,14159}$$

c) Porovnáme s výpočtem pomocí sinu:

$$P_{3072} = 3072 \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{3072}\right) \doteq \boxed{3,14159}$$

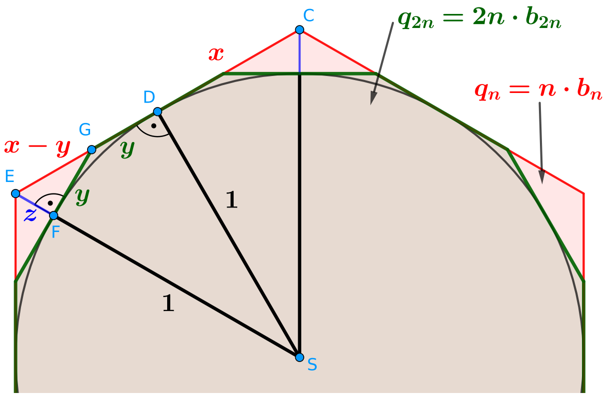
OK, vyšlo to stejně!

6.2 Horní odhady – b_{2n} pomocí b_n (zklamání)

Příklad 6: Opsaný n-úhelník a $2n$-úhelník

Odvoďte vzorce pro výpočet strany b_{2n} opsaného $2n$-úhelníku a pro horní odhad Q_{2n} pomocí strany b_n opsaného n-úhelníku.

Vyjdeme z obrázku 8. Označíme x jako $\frac{b_n}{2}$ a y jako $\frac{b_{2n}}{2}$ a z jako EF.



Obr. 8

Zapíšeme *Pýthagorovy věty* pro trojúhelníky EDS a GFE:

$$x^2 + 1^2 = (1 + z)^2 \tag{a}$$
$$z^2 + y^2 = (x - y)^2 \tag{b}$$

Z (b) vyjádříme z:

$$z^2 = x^2 - 2xy$$
$$z = \sqrt{x^2 - 2xy}$$

a dosadíme do (a):

$$\cancel{x^2} + \cancel{1} = \cancel{1} + 2\sqrt{x^2 - 2xy} + \cancel{x^2} - 2xy$$
$$xy = \sqrt{x^2 - 2xy}$$
$$x^2y^2 = x^2 - 2xy$$
$$xy^2 = x - 2y$$
$$xy^2 + 2y - x = 0$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici s proměnnou y.

$$D = 4 + 4x^2$$
$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+x^2}}{2x}$$

Smysl má jen kladný kořen

$$y = \frac{-1 + \sqrt{1+x^2}}{x}$$

Po dosazení za x a y máme

$$\frac{b_{2n}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{b_n^2}{4}}}{\frac{b_n}{2}}$$
$$b_{2n} = \frac{-4 + 4\sqrt{1 + \frac{b_n^2}{4}}}{b_n}$$

a po úpravě:

$$\boxed{b_{2n} = \frac{2\sqrt{b_n^2 + 4} - 4}{b_n}} \tag{23}$$

Odtud máme $Q_{2n} = \frac{2n \cdot b_{2n}}{d}$, tedy pač $d = 2$:

$$\boxed{Q_{2n} = 2n \cdot \frac{b_{2n}}{2}} \tag{24}$$

Teď se všicky moc těšíme, jak podobně jako v příkladu 4 vypočítáme pomocí vztahů (23) a (24) nějaké elegantní vzorce pro strany a horní odhady

$$b_{12};\ Q_{12};\ b_{24};\ Q_{24};\ b_{48};\ Q_{48};\ b_{96};\ Q_{96}$$

Ale, jak říkal tatíček Masařík, „Hovno, hovno, slavný soude!“ Bohužel Kužel! Pojďme se na to juknout.

a) b_6, Q_6

Dle obrázku 8, kde máme opsaný červený šestiúhelník, vidíme, že v rovnostranném ΔESC má výška velikost 1, takže platí (vzorec pro výšku) $1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b_6$, odkud dostáváme

$$b_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$Q_6 = 6 \cdot \frac{b_6}{2} = \frac{6}{\sqrt{3}} \doteq 3,464$$

b) b_{12}, Q_{12}

Dle (23) je

$$b_{12} = \frac{2\sqrt{b_6^2 + 4} - 4}{b_6} = \frac{2\sqrt{\frac{4}{3} + 4} - 4}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \ldots = 2(2 - \sqrt{3})$$
$$Q_{12} = 12 \cdot \frac{b_{12}}{2} = 12(2 - \sqrt{3}) \doteq 3,215$$

b) b_{24}, Q_{24}

$$b_{24} = \frac{2\sqrt{b_{12}^2 + 4} - 4}{b_{12}} = \ldots = 2 \cdot \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{3}} - 1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$Q_{24} = 24 \cdot \frac{b_{24}}{2} \doteq 3,160$$

Tady to vzdáme. Vejraz pro b_{24} je hnusný a další hodnoty b_{48} a b_{96} jsou ještě hnusnější. Žádné pěkné vzorce jako pro a_{2n} nám odsud nepryští. Respektive – pokud bychom se snažili, jak se později vokáže, dostali bychom krástné vzorce, ale za cenu děsných a umělých úprav. Proto to nyní zkusíme jinak (nicméně odvozené rekurentní vzorce ještě později využijeme při postupném výpočtu pomocí tabulkového procesoru v kapitolce **??**).

6.3 Horní odhady – b_n pomocí a_n (nadšení)

Pro zjištění horních odhadů budeme nyní postupovat tak, že využijeme již hotové strany a_n vepsaných n-úhelníků a pomocí nich vyjádříme strany b_n n-úhelníků opsaných.

Ukáže se, že nyní nám začnou vycházet stejně krástné vztahy jako pro dolní odhady.

Příklad 7: Opsaný n-úhelník pomocí veps. n-úhelníku

Odvoď vzorec pro výpočet strany opsaného n-úhelníku b_n pomocí strany vepsaného n-úhelníku a_n.

Vyjdeme z obrázku 9. Označíme x jako $\frac{b_n}{2}$ a y jako $\frac{a_n}{2}$ a z jako BC a v jako SC. Z ΔSCA máme

$$v = \sqrt{1 - x^2} \tag{a}$$

Z ΔBCA máme

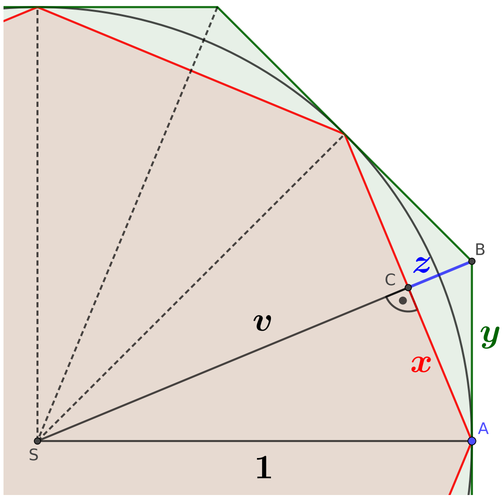
$$z = \sqrt{y^2 - x^2} \tag{b}$$

Z ΔBAS máme

$$(v + z)^2 = 1 + y^2$$

Sem dosadíme z (a) a (b):

$$\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-x^2}\right)^2 = 1+y^2$$



Obr. 9

Po pár úpravách dostáváme

$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Sem dosadíme za x a y:

$$\frac{b_n}{2} = \frac{\frac{a_n}{2}}{\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4}}}$$

$$b_n = 2 \cdot \frac{a_n}{\sqrt{4 - a_n^2}} \tag{25}$$

Odtud máme $Q_n = \frac{n \cdot b_n}{d}$, tedy pač $d = 2$:

$$Q_n = n \cdot \frac{b_n}{2} \tag{26}$$

Příklad 8

Pomocí vztahů (25) a (26) vypočítej strany $b_6, b_{12}, b_{24}, b_{48}, b_{96}$ a horní odhady $Q_6, Q_{12}, Q_{24}, Q_{48}, Q_{96}$ čísla π.

---

a) b_6, Q_6

Dle vztahu (11) je $a_6 = 1$, tedy díky (25) máme $b_6 = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4-1}}$, neboli:

$$b_6 = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{27}$$

a díky (26) máme $Q_6 = 6 \cdot \frac{b_6}{2}$

$$Q_6 = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \doteq 3,464 \tag{28}$$

b) b_{12}, Q_{12}

Dle vztahu (13) je $a_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, tedy díky (25) máme

$$b_{12} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4-\left(2-\sqrt{3}\right)}}$$

$$\boxed{b_{12} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \tag{29}$$

a díky (26) máme $Q_{12} = 12 \cdot \frac{b_{12}}{2}$ tedy

$$\boxed{Q_{12} = 12 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \doteq 3,215} \tag{30}$$

c) b_{24}, Q_{24}

Dle vztahu (17) je $a_{24} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, tedy díky (25) máme

$$b_{24} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}}$$

$$\boxed{b_{24} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \tag{31}$$

a díky (26) máme $Q_{24} = 24 \cdot \frac{b_{24}}{2}$ tedy

$$Q_{24} = 24 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \doteq 3,160 \tag{32}$$

c) b_{48}, Q_{48}

Dle vztahu (19) je $a_{48} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$, tedy díky (25) máme

$$b_{48} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)}}$$

$$b_{48} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \tag{33}$$

a díky (26) máme $Q_{48} = 48 \cdot \frac{b_{48}}{2}$ tedy

$$Q_{24} = 48 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \doteq 3,146 \tag{34}$$

c) b_{96}, Q_{96}

Dle vztahu (21) je $a_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$, tedy díky (25) máme

$$b_{96} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}{\sqrt{4 - \left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}\right)}}$$

$$\boxed{b_{96} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}} \tag{35}$$

a díky (26) máme $Q_{96} = 96 \cdot \frac{b_{96}}{2}$ tedy

$$\boxed{Q_{96} = 96 \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}} \doteq 3,143} \tag{36}$$

Tabulka 1: Přehled dolních a horních odhadů čísla π půlením **šestiúhelníku**

n	P_n	aprox.	Q_n	aprox.
6	$6\cdot\frac{1}{2}$	3,000	$6\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$	3,464
12	$12\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$	3,106	$12\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	3,215
24	$24\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$	3,133	$24\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$	3,160
48	$48\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}$	3,139	$48\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$	3,146
96	$96\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2}$	3,141	$96\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$	3,143

6.4 Shrnutí odhadů

V tabulce 1 vidíme krástně pravidelnou strukturu našich dolních a horních odhadů. Poslední odhady pro $n = 96$ se liší až na třetím desetinném místě – získali jsme tedy π s přesností na **dvě desetinná místa**:

$$\boxed{3,141 < \pi < 3,143} \tag{37}$$

Vidíme, že jsme dospěli ke stejně přesnému odhadu jako Archimédés (viz kap.6):

$$\boxed{3,140845\ldots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3,142857\ldots} \tag{38}$$

7 Souvislost vnořených odmocnin s GOFU

V Příkladu 1 jsme odvodili vztahy pro dolní a horní odhady

$$P_n = n \sin \frac{180^\circ}{n} \qquad\qquad Q_n = n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

Porovnáme-li je s tabulkou 1, vidíme, že musí platit

$$\sin \frac{180^\circ}{6} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \frac{180^\circ}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \qquad \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$\sin \frac{180^\circ}{24} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \qquad \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{24} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$\sin \frac{180^\circ}{48} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2} \qquad \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{48} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

$$\sin \frac{180^\circ}{96} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2} \qquad \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{96} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$$

Příklad 9

Dokažte, že platí výše uvedené vztahy.

První dva vztahy jsou známé hodnoty sinus a tangens pro 30°. Následující úhly jsou vždy polovinou úhlu předcházejícího a pro výpočet jejich hodnoty můžeme použít vzorce pro sinus a kosinus polovičního úhlu. Pač naše úhly jsou z prvního kvadrantu, kde je sinus a kosinus jejich poloviny kladný, použijeme vztahy bez abs. hodnot:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

- Pro úhel $\frac{180°}{12} = 15°$ dostáváme (s využitím známé hodnoty $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$):

$$\sin 15° = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 15° = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

- Pro úhel $\frac{180°}{24} = \frac{15°}{2}$ dostáváme (s využitím výše spočítané hodnoty $\cos 15°$):

$$\sin\frac{15°}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\cos\frac{15°}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{15°}{2} = \frac{\sin\frac{15°}{2}}{\cos\frac{15°}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

- Pro úhel $\frac{180°}{48} = \frac{15°}{4}$ dostáváme (s využitím výše spočítané hodnoty $\cos\frac{15°}{2}$):

$$\sin\frac{15^\circ}{4} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}$$

$$\cos\frac{15^\circ}{4} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{15^\circ}{4} = \frac{\sin\frac{15^\circ}{4}}{\cos\frac{15^\circ}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

- Pro úhel $\frac{180^\circ}{96} = \frac{15^\circ}{8}$ dostáváme (s využitím výše spočítané hodnoty $\cos\frac{15^\circ}{4}$):

$$\sin\frac{15^\circ}{8} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2}$$

$$\cos\frac{15^\circ}{8} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{15^\circ}{8} = \frac{\sin\frac{15^\circ}{8}}{\cos\frac{15^\circ}{8}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$$

8 Zdvojování čtverce

Pojďme si vyzkoušet, jak se odhady π změní, když vyjdeme nikoli z šestiúhelníka, ale začneme zdvojovat vepsaný a opsaný čtverec (obr. 10).

Z obrázku je zřejmé, že $a_4 = \sqrt{2}$ a $b_4 = 2$. Odtud máme první odhad

$$P_4 = 4 \cdot \frac{a_4}{2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 2,828$$
$$Q_4 = 4 \cdot \frac{b_4}{2} = 4 \cdot \frac{2}{2} = 4,000$$

Nyní dle (15) máme

$$a_8 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_4^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$
$$P_8 = 8 \cdot \frac{a_8}{2} = 8 \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \doteq 3,061$$

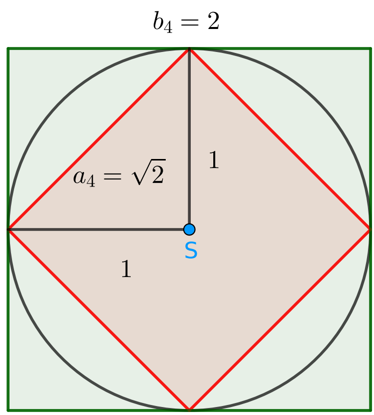
A dle (25) máme

$$b_8 = 2 \cdot \frac{a_8}{\sqrt{4 - a_8^2}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{4 - (2 - \sqrt{2})}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$
$$Q_8 = 8 \cdot \frac{b_8}{2} = 8 \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \doteq 3,314$$

Vidíme, že dostáváme vztahy analogické vztahům pro půlení šestiúhelníku (viz tabulka 1), jen v poslední nejvnitřnější odmocnině není dvojka, ale trojka! Výsledky zapíšeme do tabulky 2.

Tabulka 2: Přehled dolních a horních odhadů čísla π půlením **čtverce**

n	P_n	aprox.	Q_n	aprox.
4	$4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	2,828	$4 \cdot \frac{2}{2}$	4,000
8	$8 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	3,061	$8 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	3,314
16	$16 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$	3,121	$16 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$	3,183
32	$32 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$	3,137	$32 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$	3,152
64	$64 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}$	3,140	$64 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$	3,144



Obr. 10

9 Zdvojování pentagonu

Nyní se podíváme na zdvojování pentagonu. Pomocí obr.11 vypočítáme stranu a_5 pravidelného pětiúhelníku vepsaného do jednotkové kružnice.

Středový úhel příslušející oblouku BC má zřejmě velikost 72°. Úhel α je obvodový k oblouku BC, takže platí $\alpha = 36°$.

Úhel β tvoří s dvěma fialovými úhly o velikostech 72° úhel přímý, pročež $\beta = 180° - 2 \cdot 72° = 36°$.

Pravoúhlé trojúhelníky APB a SQC jsou dle věty uu podobné, takže platí

$$\frac{y}{1} = \frac{x}{a_5} \tag{39}$$

Přitom dle Pýthagorovy věty pro ΔSQC platí

$$y = \sqrt{1 - \frac{a_5^2}{4}}$$

Dále víme, že úhlopříčka v pentagonu je $\varphi-$krát delší než strana, kde φ je zlatý řez, pro který platí:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad\qquad \varphi^2 = \varphi + 1$$

Pač x je polovina úhlopříčky, dostáváme

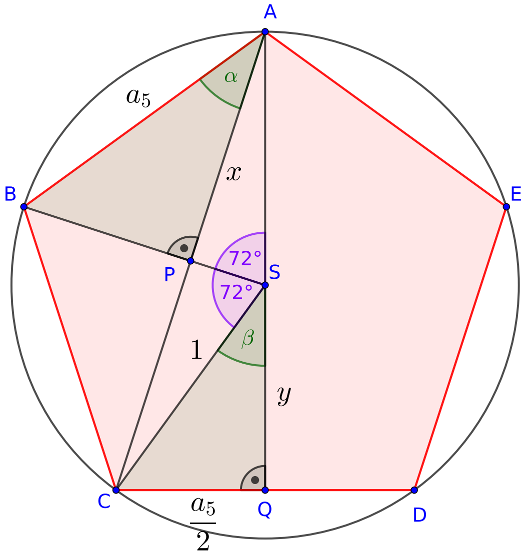
$$x = \frac{a_5 \cdot \varphi}{2}$$

Dosadíme za x a y do (39) a dostáváme:

$$\sqrt{1 - \frac{a_5^2}{4}} = \frac{\varphi}{2} \tag{40}$$

Odtud snadno vyjádříme a_5 pomocí φ:

$$1 - \frac{a_5^2}{4} = \frac{\varphi + 1}{4}$$



Obr. 11

$$4 - a_5^2 = \varphi + 1$$

Odtud

$$\boxed{a_5 = \sqrt{3 - \varphi}} \tag{41}$$

Odtud dle výše odvozeného vztahu (25) $b_n = 2 \cdot \frac{a_n}{\sqrt{4-a_n^2}}$ spočítáme b_5:

$$b_5 = 2 \cdot \frac{a_5}{\sqrt{4 - a_5^2}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3 - \varphi}}{\sqrt{4 - (3 - \varphi)}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3 - \varphi}}{\sqrt{1 + \varphi}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3 - \varphi}}{\sqrt{\varphi^2}}$$

Tedy

$$\boxed{b_5 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3 - \varphi}}{\varphi}} \tag{42}$$

Dostáváme:

$$P_5 = \frac{5a_5}{2} = 5 \cdot \frac{\sqrt{3-\varphi}}{2} \doteq 2,939$$
$$Q_5 = \frac{5b_5}{2} = 5 \cdot \frac{\sqrt{3-\varphi}}{\varphi} \doteq 3,633$$

Nyní dle (15) máme

$$a_{10} = \sqrt{2-\sqrt{4-a_5^2}} = \sqrt{2-\sqrt{4-(3-\varphi)}} = \sqrt{2-\sqrt{1+\varphi}} = \sqrt{2-\varphi}$$
$$P_{10} = 10 \cdot \frac{a_{10}}{2} = 10 \cdot \frac{\sqrt{2-\varphi}}{2} \doteq 3,090$$

A dle (25) máme

$$b_{10} = 2 \cdot \frac{a_{10}}{\sqrt{4-a_{10}^2}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2-\varphi}}{\sqrt{4-(2-\varphi)}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2-\varphi}}{\sqrt{2+\varphi}}$$
$$Q_{10} = 10 \cdot \frac{b_{10}}{2} = 10 \cdot \frac{\sqrt{2-\varphi}}{\sqrt{2+\varphi}} \doteq 3,249$$

Dále

$$a_{20} = \sqrt{2-\sqrt{4-a_{10}^2}} = \sqrt{2-\sqrt{4-(2-\varphi)}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\varphi}}$$
$$P_{20} = 20 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\varphi}}}{2} \doteq 3.129$$
$$b_{20} = 2 \cdot \frac{a_{20}}{\sqrt{4-a_{20}^2}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\varphi}}}{\sqrt{4-(2-\sqrt{2+\varphi})}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\varphi}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\varphi}}}$$
$$Q_{20} = 20 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\varphi}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\varphi}}} \doteq 3,168$$

Vidíme, že dostáváme vztahy analogické vztahům pro půlení šestiúhelníku (viz tabulka 1) a čtverce (viz tabulka 2), jen v poslední nejvnitřnější odmocnině není dvojka, či trojka, ale zlatý řez φ! Výsledky zapíšeme do tabulky 3.

Tabulka 3: Přehled dolních a horních odhadů čísla π půlením **pentagonu**

n	P_n	aprox.	Q_n	aprox.
5	$5 \cdot \frac{\sqrt{3-\varphi}}{2}$	2,939	$5 \cdot \frac{\sqrt{3-\varphi}}{\varphi}$	3,633
10	$10 \cdot \frac{\sqrt{2-\varphi}}{2}$	3,090	$10 \cdot \frac{\sqrt{2-\varphi}}{\sqrt{2+\varphi}}$	3,249
20	$20 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\varphi}}}{2}$	3,129	$20 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\varphi}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\varphi}}}$	3,168
40	$40 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\varphi}}}}{2}$	3,138	$40 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\varphi}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\varphi}}}}$	3,148
80	$80 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\varphi}}}}}{2}$	3,141	$80 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\varphi}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\varphi}}}}}$	3,143

Odkazy

[1] Jindřich Bečvář. *Měření kruhu*. URL: http://dml.cz/dmlcz/402376.

[2] Velimír Dvořák. *Nad Archimedovým výpočtem čísla π*. URL: http://dml.cz/dmlcz/146356.

[3] *Finding Pi by Archimedes' Method*. URL: https://youtu.be/_rJdkhlWZVQ.

[4] *Finding Pi by Archimedes' Method (Follow-up)*. URL: https://youtu.be/9zO0-QOcJQ0.

[5] Jaromír Šimša. *Výpočet čísla π z obvodů pravidelných mnohoúhelníků, 1. část*. URL: http://dml.cz/dmlcz/146082.

[6] Jaromír Šimša. *Výpočet čísla π z obvodů pravidelných mnohoúhelníků, 2. část*. URL: http://dml.cz/dmlcz/146089.

[7] *Why is this series of square root of twos equal π ?* URL: https://math.stackexchange.com/questions/85217/why-is-this-series-of-square-root-of-twos-equal-pi.