# Problemas – Tema 2

# CCSS Problemas resueltos - 8 - cambio de variable

**1. Calcula** $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$

Radicando: $x$

Índice de las raíces: $2,3 \quad \rightarrow \quad m.c.m. \equiv 6$

Cambio de variable → $x=t^6 \quad \rightarrow \quad dx=6\cdot t^5\,dt$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx=\int \frac{1-t^{\frac{6}{2}}}{t^{\frac{6}{3}}}\cdot 6\cdot t^5\,dt=6\cdot\int \frac{1-t^3}{t^2}\cdot t^5\,dt=6\cdot\int (1-t^3)\cdot t^3\,dt=6\cdot\int (t^3-t^6)\,dt$$

$$6\cdot\int t^3\,dt-6\cdot\int t^6\,dt=\frac{6}{4}\cdot t^4-\frac{6}{7}\cdot t^7+C$$

Deshacemos el cambio de variable (repito, que no se olvide deshacer el cambio de variable).

$$x=t^6 \quad \rightarrow \quad \sqrt[6]{x}=t$$

$$I=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{4}{6}}-\frac{6}{7}\cdot x^{\frac{7}{6}}+C=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}-\frac{6}{7}\cdot x\cdot\sqrt[6]{x}+C$$

**2. Utilizando el cambio de variable $1+x^2=t^2$ , calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ que cumpla $F(0)=0$ .**

Debemos resolver la siguiente integral indefinida:

$I=\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$ → cambio de variable $1+x^2=t^2$ → diferenciamos $2x\,dx=2t\,dt$ → $dx=\frac{t}{x}dt$

Sustituimos en la integral.

$I=\int \frac{x^3}{\sqrt{t^2}}\cdot\frac{t}{x}dt$ → Simplificamos → $I=\int x^2\,dt$ → Del cambio de variable $x^2=t^2-1$

Sustituimos.

$$I=\int (t^2-1)dt=\int t^2\,dt-\int dt=\frac{t^3}{3}-t+C$$

Deshacemos el cambio de variable $1+x^2=t^2$ → $t=\sqrt{1+x^2}$

$$I=\frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3}-\sqrt{1+x^2}+C$$

De las infinitas primitivas de $I$ buscamos la que cumpla $F(0)=0$ . Si llevamos esta condición de contorno al resultado de la integral indefinida.

$$\frac{1}{3}-1+C=0 \rightarrow C=\frac{2}{3}$$

Solución final → $F(x)=\frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3}-\sqrt{1+x^2}+\frac{2}{3}$

**3. Resuelve** $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}-3}dx$

$I=\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}-3}dx$ → cambio de variable $x=t^4 \rightarrow dx=4t^3dt$

$I=\int \frac{1}{\sqrt[4]{t^4}-3}4t^3dt \rightarrow I=\int \frac{4t^3}{t-3}dt=4\int \frac{t^3}{t-3}dt$

Dividimos los polinomios → $\frac{t^3}{t-3}=t^2+3t+9+\frac{27}{t-3}$

$I=4\int \frac{t^3}{t-3}dt=4\int (t^2+3t+9)dt+4\cdot 27\int \frac{1}{t-3}dt=\frac{4}{3}t^3+6t^2+36t+108\ln|t-3|+C$

Deshacemos el cambio de variable → $x=t^4 \rightarrow \sqrt[4]{x}=t$

$I=\frac{4}{3}x^{3/4}+6x^{1/2}+36x^{1/4}+108\ln|x^{1/4}-3|+C$

**4. Resuelve** $\int x\sqrt{x+1}\,dx$ **.**

Cambio de variable: $x+1=t^2$ → diferenciamos → $dx=2t\,dt$

Sustituimos en la integral, sabiendo que $x=t^2-1$

$$I=\int x\sqrt{x+1}\,dx=\int (t^2-1)\cdot\sqrt{(t^2)}\cdot 2t\,dt=\int (t^2-1)\cdot t\cdot 2t\,dt=2\int (t^2-1)t^2\,dt=2\int (t^4-t^2)\,dt$$

$$I=2\frac{t^5}{5}-2\frac{t^3}{3}$$

Deshacer cambio, sabiendo que $x+1=t^2$ → $t=\sqrt{x+1}$

$$I=2\frac{(x+1)^{5/2}}{5}-2\frac{(x+1)^{3/2}}{3}+C$$

**5. Sea la función $f(x):(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1+e^x}{1-e^x}$ . Halla la primitiva de la función cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$ (Sugerencia: cambio de variable $t=e^x$ ).**

Debemos resolver la siguiente integral indefinida:

$I=\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx$ → cambio $t=e^x$ → diferenciamos $dt=e^x dx$ → $dx=\frac{dt}{t}$ → sustituimos

$I=\int \frac{1+t}{1-t}\frac{dt}{t}=\int \frac{1+t}{(1-t)t}dt$ → Cociente de polinomios con grado numerador < grado denominador

Como el denominador ya está descompuesto en dos raíces simples, aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

$\frac{1+t}{(1-t)t}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{t}$ → m.c.m. e igualamos numeradores → $1+t=At+B(1-t)$

Damos valores:

$t=0 \quad \to \quad 1=B$

$t=1 \quad \to \quad 2=A$

La integral queda:

$$I=\int \frac{A}{1-t}dt+\int \frac{B}{t}dt=-2\ln|1-t|+\ln|t|+C$$

Deshacemos el cambio de variable $t=e^x$ → $I=-2\ln|1-e^x|+\ln|e^x|+C=-2\ln|1-e^x|+x+C$

Aplicamos condición de contorno $F(1)=1$ siendo $F(x)$ la primitiva buscada.

$-2\ln|1-e|+1+C=1 \quad \to \quad C=2\ln|1-e|\simeq 1{,}08$

Por lo que la primitiva solución es: $F(x)=-2\ln|1-e^x|+x+1{,}08$

**6. Calcula** $\int \sqrt{e^x+1}\,dx$

$I=\int \sqrt{e^x+1}\,dx$ → cambio de variable $e^x+1=t^2 \;\rightarrow\; e^x dx=2\,t\,dt$

$$dx=\frac{2\,t\,dt}{e^x} \;\rightarrow\; dx=\frac{2\,t\,dt}{t^2-1}$$

$$I=\int \sqrt{t^2}\,\frac{2\,t\,dt}{t^2-1} \;\rightarrow\; I=\int \frac{2\,t^2}{t^2-1}dt \;\rightarrow\; I=2\int \frac{t^2}{t^2-1}dt \;\rightarrow\; I=2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt$$

$$I=2\int dt+2\int \frac{1}{t^2-1}dt \;\rightarrow\; I=2\,t+2\int \frac{1}{(t+1)(t-1)}dt$$

Aplicamos método de coeficientes indeterminados.

$$\frac{1}{(t+1)(t-1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1} \;\rightarrow\; 1=A(t-1)+B(t+1)$$

$$t=1 \;\rightarrow\; 1=0+2\,B \;\rightarrow\; B=\frac{1}{2}$$

$$t=-1 \;\rightarrow\; 1=-2\,A \;\rightarrow\; A=\frac{-1}{2}$$

$$I=2\,t+2\cdot\frac{-1}{2}\int \frac{1}{t+1}dt+2\cdot\frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}dt=2\,t-\ln|t+1|+\ln|t-1|+C=2\,t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

Deshacemos el cambio de variable → $e^x+1=t^2 \;\rightarrow\; \sqrt{e^x+1}=t$

$$I=2\sqrt{e^x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x-1}+1}\right|+C$$

**7. Resuelve** $\int \frac{e^x}{e^x+e^{2x}-2}dx$ **(ayuda:** $e^x=t$ **)**

A partir del cambio de variable $e^x=t$ → diferenciamos $e^x dx=dt$ → $dx=\frac{dt}{e^x}$ → $dx=\frac{dt}{t}$

Sustituimos en la integral.

$$\int \frac{t}{t+t^2-2}\cdot\frac{dt}{t} \rightarrow \text{Simplificamos} \rightarrow \int \frac{1}{t^2+t-2}dt$$

Cociente de polinomios, con grado del numerador inferior al grado del denominador.

Obtenemos raíces del denominador → $t^2+t-2=0$ → $t=1$ , $t=-2$ → Dos raíces simples

Aplicamos el método de coeficientes indeterminados.

$$\frac{1}{t^2+t-2}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+2} \rightarrow \text{Aplicamos m.c.m. e igualamos numeradores}$$

$$1=A(t+2)+B(t-1)$$

Si $t=1$ → $1=A(3)+B\cdot 0$ → $A=\frac{1}{3}$

Si $t=-2$ → $1=A\cdot 0+B(-3)$ → $B=\frac{-1}{3}$

Sustituimos en la integral.

$$I=\int \frac{1}{t^2+t-2}dt=A\int \frac{1}{t-1}dt+B\int \frac{1}{t+2}dt=\frac{1}{3}\cdot\ln|t-1|-\frac{1}{3}\cdot\ln|t+2|+C$$

Deshacemos el cambio de variable $e^x=t$ .

$$I=\frac{1}{3}\cdot\ln|e^x-1|-\frac{1}{3}\cdot\ln|e^x+2|+C$$

**8. Resuelve** $\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}dx$

Aplicamos el siguiente cambio de variable → $e^x=t \rightarrow e^x dx=dt \rightarrow dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}$

$$I=\int \frac{t}{(t^2-1)(t+1)}\frac{dt}{t}=\int \frac{1}{(t+1)(t-1)(t+1)}dt=\int \frac{1}{(t+1)^2(t-1)}dt$$

Llegamos a un cociente de polinomios, con grado del numerador menor que el grado del denominador. En el denominador tenemos una raíz doble y una raíz simple, por lo que aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

$$\int \frac{1}{(t+1)^2(t-1)}dt=\int \frac{A}{t+1}dt+\int \frac{B}{(t+1)^2}dt+\int \frac{C}{t-1}dt$$

$$1=A(t+1)(t-1)+B(t-1)+C(t+1)^2$$

$$t=1 \rightarrow 1=0+0+C(2)^2 \rightarrow C=\frac{1}{4}$$

$$t=-1 \rightarrow 1=0+B(-2)+0 \rightarrow B=\frac{-1}{2}$$

$$t=0 \rightarrow 1=A(1)(-1)+B(-1)+C(1)^2 \rightarrow 1=-A+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \rightarrow A=\frac{-1}{4}$$

$$I=\frac{-1}{4}\int \frac{1}{t+1}dt-\frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1)^2}dt+\frac{1}{4}\int \frac{1}{t-1}dt=\frac{-1}{4}\ln|t+1|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}+\frac{1}{4}\ln|t-1|+C$$

Deshacemos el cambio de variable $e^x=t$

$$I=\frac{-1}{4}\ln|e^x+1|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{4}\ln|e^x-1|+C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$$