Teoría – Tema 9

Teoría - 4 - puntos alineados y división de segmentos

Comprobar si tres puntos están alineados

Para saber si tres puntos A, B, C están alineados tendremos que comprobar que la recta que contiene a dos de ellos contiene también al tercero.

Otra forma de verlo es que, por ejemplo, los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ sean dependientes (es decir, uno proporcional al otro, ya que serán paralelos o antiparalelos).

Otra forma de verlo es razonando con el concepto de rango: la matriz formada por los dos vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ debe tener rango 1, ya que los dos vectores no son linealmente independientes entre si (y por lo tanto el rango no puede ser 2).

Y una cuarta forma de comprobarlo es determinar si los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son paralelos o anti-paralelos... que a su vez se puede demostrar de dos formas distintas.

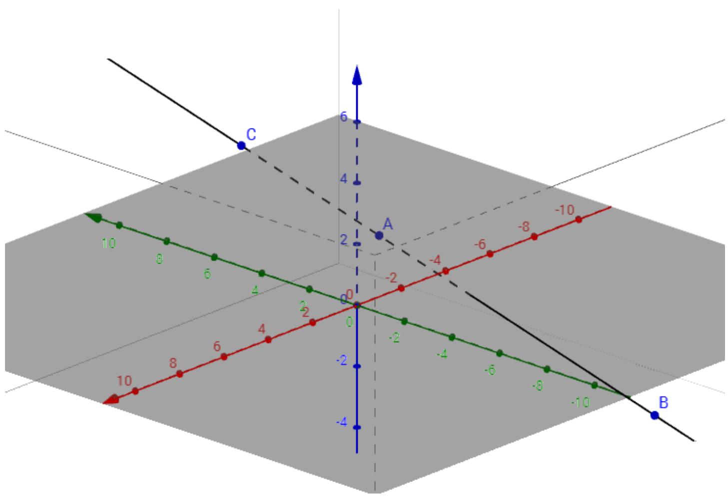
¡¡Menudo lío de opciones, jajaja!!

Por eso, vuelvo a repetir, **es impresdincible explicar bien los problemas de geometría**.

Vamos a realizar un ejemplo con todas las posibles formas de resolverlo.

Para comprender mejor visualmente el trabajo analítico con ecuaciones, presentamos también la gráfica de la recta que alinea los tres puntos del siguiente ejemplo.

Si tres puntos están alineados pertenecen a la misma recta



Ejemplo 1 resuelto

Dados los puntos $A(-1,0,2)$ **,** $B(-7,-6,-4)$ **y** $C(2,3,5)$ **comprueba si están alineados.**

Forma 1: Obtener la recta que pasa por $A(-1,0,2)$ ***y por*** $B(-7,-6,-4)$ ***, y comprobar si también pasa por*** $C(2,3,5)$

Dados dos puntos de la recta, podemos obtener un vector director de la recta de la forma:

$$\vec{AB}=(-7+1,-6-0,-4-2)=(-6,-6,-6)$$

Podemos trabajar con este vector director o, por sencillez en las operaciones, con otro que sea paralelo a éste y con los coeficientes más pequeños:

$$\vec{u}=(-1,-1,-1) \quad \rightarrow \quad \vec{u}\,||\,\vec{AB}$$

Y con un vector director y un punto, tenemos la ecuación continua de la recta:

$$r: \frac{x+1}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{-1}$$

Si $C(2,3,5)\in r$ → Debe satisfacer la ecuación de r . Es decir:

$$\frac{2+1}{-1}=\frac{3}{-1}=\frac{5-2}{-1} \quad \rightarrow \quad -3=-3=-3$$ → **Sí están alineados**

Forma 2: Los vectores $\vec{AB}$ **y** $\vec{AC}$ **son linealmente dependientes**

$$\vec{AB}=(-6,-6,-6)$$

$$\vec{AC}=(3,3,3)$$

Dos vectores son linealmente dependientes si podemos expresar la siguiente relación:

$a\cdot\vec{AB}+b\cdot\vec{AC}=\vec{0}$ con a ó $b\neq 0$

$a\cdot(-6,-6,-6)+b\cdot(3,3,3)=\vec{0} \quad \rightarrow \quad b=-2a$ → Infinitas soluciones.

Por ejemplo, si $a=1 \quad \rightarrow \quad b=-2$ → **Sí están alineados**

Incluso observando directamente la forma de ambos vectores, se ve rápidamente que son proporcionales entre si.

Forma 3: La matriz formada por los dos vectores $\vec{AB}$ **y** $\vec{AC}$ **debe tener rango** 1 **, ya que los dos vectores no son linealmente independientes entre si.**

La matriz formada por los vectores columna es:

$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -6 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ → Matriz $3\text{x}2$ → Como máximo su rango es 2

Cualquier submatriz cuadrada de orden 2 que escojamos, se anula su determinante. Por lo tanto, el rango es 1. → **Sí están alineados**

Forma 4: Determinar que los dos vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son paralelos o antiparalelos

Dos vectores son paralelos o antiparalelos si el cociente de las primeras componentes de los vectores es igual al cociente de las segundas componentes, y a su vez es igual al cociente de las terceras componentes. Es decir:

$\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{u}=(v_x, v_y, v_z)$ son proporcionales <==> $\frac{u_x}{v_x}=\frac{u_y}{v_y}=\frac{u_z}{v_z}$

Comprobemos esta relación con nuestros vectores $\vec{AB}=(-6,-6,-6)$ y $\vec{AC}=(3,3,3)$.

$\frac{-6}{3}=\frac{-6}{3}=\frac{-6}{3}$ → **Sí están alineados**

Forma 5: El valor absoluto del producto escalar es igual al producto de los módulos de los vectores

Si recordamos la definición de producto escalar:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)$$

Si los vectores son paralelos → $\cos(\alpha)=\cos(0^o)=1 \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

Si los vectores son anti-paralelos → $\cos(\alpha)=\cos(180^o)=-1 \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

Es decir, el valor absoluto del producto escalar es igual al producto de los módulos de los vectores.

Calculemos los módulos.

$$\vec{AB}=(-6,-6,-6) \rightarrow |\vec{AB}|=\sqrt{6^2+6^2+6^2}=\sqrt{108}$$

$$\vec{AC}=(3,3,3) \rightarrow |\vec{AC}|=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=\sqrt{27}$$

Por lo tanto → $|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|=\sqrt{108}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{2916}=54$

Otra forma de expresar el producto escalar es como la suma de los productos de cada una de las componentes de ambos vectores. Es decir:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z$$

Aplicado a nuestros vectores:

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=-6\cdot3-6\cdot3-6\cdot3=-54 \rightarrow |\vec{AB}\cdot\vec{AC}|=54$ → **Sí están alineados**

Otra forma teórica de razonar si tres puntos están alineados por una recta es la siguiente. Como ves, mil maneras de razonar matemáticamente el mismo problema.

Sean los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ y $C(x_3, y_3, z_3)$, que forman los vectores $\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ y $\vec{AC}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$ (es decir, tomamos un punto como origen y los otros dos como finales de sendos vectores).

Los tres puntos estarán alineados por una recta si los dos vectores anteriores son linealmente dependientes, es decir, si el rango de la matriz que forman es 1.

$$Rango(\vec{AB}, \vec{AC})=1$$

Por lo tanto, todos los menores de orden 2 de la siguiente matriz deben ser nulos

$$\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{pmatrix}$$ → Matriz formada por dos vectores fila

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$

Igualamos.

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$ → **Condición a cumplir por tres puntos alineados**

Dividir un segmento en partes iguales

Dados dos puntos tridimensionales $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$, forman el segmento $\overline{PQ}$.

Si llamamos $A(x, y, z)$ el punto medio de este segmento, podemos calcular sus coordenadas razonando de la siguiente forma:

$$\vec{PA}=\frac{1}{2}\vec{PQ} \rightarrow (x-x_1, y-y_1, z-z_1)=\frac{1}{2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

Igualamos componentes → $\left\{\begin{array}{l} x-x_1=\frac{1}{2}(x_2-x_1) \\ y-y_1=\frac{1}{2}(y_2-y_1) \\ z-z_1=\frac{1}{2}(z_2-z_1) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{x_1+x_2}{2} \\ y=\frac{y_1+y_2}{2} \\ z=\frac{z_1+z_2}{2} \end{array}\right\}$

Es decir, el punto medio se calcula con la semisuma de cada una de las componentes de los puntos que forman el segmento.

Si deseamos dividir el segmento en tres partes iguales tendremos que obtener en primer lugar $\frac{1}{3}$ del segmento, y luego $\frac{2}{3}$. Razonamos de la siguiente forma:

$\vec{PA}=\frac{1}{3}\vec{PQ}$ → igualar componentes para obtener coordenadas de A

$\vec{PB}=\frac{2}{3}\vec{PQ}$ → Igualas componentes para obtener coordenadas de B.

Si deseamos dividirlo en cuatro partes iguales, razonaremos así:

$$\vec{PA}=\frac{1}{4}\vec{PQ} \quad , \quad \vec{PB}=\frac{2}{4}\vec{PQ} \quad , \quad \vec{PC}=\frac{3}{4}\vec{PQ}$$

Y así sucesivamente si deseamos dividir en cinco, seis, etc. partes iguales.

Ejemplo 2 resuelto

Dividir el segmento formado por los puntos $P(-1,0,2)$ y $Q(-7,-6,-4)$ en tres partes iguales.

Calculamos el punto $A(x, y, z)$ que da lugar a $\frac{1}{3}$ del segmento.

$$\vec{PA}=\frac{1}{3}\vec{PQ} \rightarrow (x+1, y-0, z-2)=\frac{1}{3}(-7+1,-6-0,-4-2)$$

Igualamos componentes:

$x+1=-2 \rightarrow x=-3$

$y=-2$

$z-2=-2 \quad \rightarrow \quad z=0$

Por lo tanto: $A(-3,-2,0)$

Ahora calculamos el punto $B(x\,,\,y\,,\,z)$ que da lugar a $\frac{2}{3}$ del segmento.

$\vec{PB}=\frac{2}{3}\vec{PQ} \quad \rightarrow \quad (x+1\,,\,y-0,z-2)=\frac{2}{3}(-7+1,-6-0,-4-2)$

Igualamos componentes:

$x+1=-4 \quad \rightarrow \quad x=-5$

$y=-4$

$z-2=-4 \quad \rightarrow \quad z=-2$

Por lo tanto: $B(-5,-4,-2)$