MODELOS FUNCIONALES

December 2021

Grupo Senosoidales
Rafael Andrés Pulido, 20182245077
Ruby Lorena Salinas, 20182245013
Federico Mancera, 20192245034

1 Parcial De Primer Corte

El parcial consiste en crear un recurso interactivo en el que se comparta la modelación de una situación en el contexto de bicicletas que corresponda a un modelo senosoidal. Para eso este documento se divide en dos apartados, el primero, una situación experimental relacionado a bicicletas junto al paso a paso, resultados esperados, toma de datos y resultados finales. En la segunda parte se encontrará el link del recurso interactivo junto a las representaciones tabular, conjuntista, gráfica y analítica del modelo funcional con los datos encontrados en la primera parte del documento

2 Descubriendo La Función Senosoidal

2.1 Introducción

A lo largo del experimento se presentan diferentes apartados relacionados a la función senosoidal, partiendo del movimiento que describe una rueda de bicicleta. En un primer momento se evidenciará el movimiento de oscilación que describe la rueda en el palo, después se dibujará un gráfico que relacione la altura del palo en relación con la oscilación en función del tiempo y por último se comenzará a tratar de forma más formal la función, es decir, se hará su representación gráfica, se presenta la tabla de valores, su posible expresion analitica.

Cabe resaltar que el informe esta escrito de forma tal que tambien se pueda hacer con estudiantes de un colegio, por esta razon encontrara a lo largo del mismo el paso a paso y las preguntas que serviran de guia a los estudiantes , preguntas que por experiencia durante el epxrimento fueron de gran importancia.

2.2 Experimento

Para este experimento se les pedirá a los estudiantes que tomen el giro de forma libre de la rueda de una bicicleta, se recomienda que giren la bicicleta de tal manera que quede sobre el sillín, le harán una marca en cualquier parte a la rueda, pondrán un palo al lado para ver el movimiento de la marca conforme gira la rueda y deberán graficar el movimiento que esta marca hace respecto al palo, teniendo en cuenta la altura a la que llega la marca en el palo ($eje\ y$) y el tiempo que transcurre ($eje\ x$), como se ve en la imagen 1.

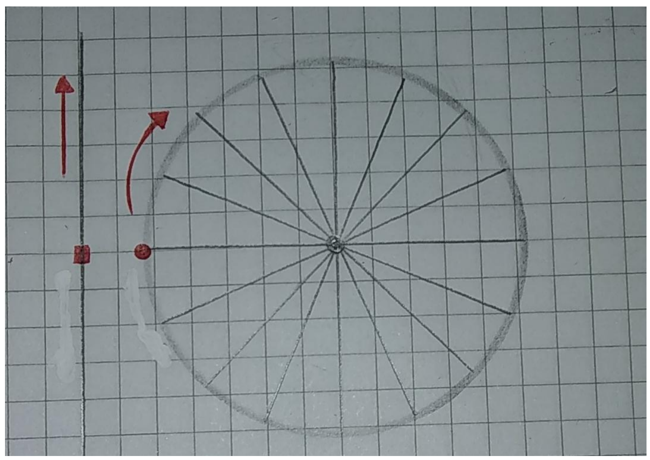


Figure 1: Creación propia: Altura del palo en función del tiempo

Se espera que la realización del experimento se haga en grupos de 3 personas, mientras uno hace girar la rueda a una velocidad constante (se debe girar la rueda en sentido horario), el segundo debe estar pendiente del movimiento de la marca en la rueda con respecto al palo y el tercero está pendiente del tiempo que transcurre y de sostener el palo, luego intercambian los roles, así, se les pedirá que describan la altura de la marca puesta en la rueda con respecto al palo en función del tiempo (se le solicita a la clase que se centren principalmente en el movimiento de la marca en la rueda).

El objetivo es describir la altura del palo en función del tiempo y para eso se realizarán ciertas preguntas y pequeñas actividades para acercar al concepto de función senosoidal. A continuación se especificará el paso a paso.

2.3 Paso a paso

1. Se coloca la rueda de una bicicleta de forma que su giro sea libre (se recomienda colocar la bicicleta sobre su sillín).

2. Se hace una marca en cualquier parte de la rueda.

3. Se toma un palo que sea más alto que la rueda o uno que tenga el mismo diámetro de esta y realizar una marca que esté alineada a la marca de la rueda de manera horizontal como se ve en la imagen 2.

Figure 2: Creación propia: Marca del palo alineada con la marca de la rueda de la bicicleta

4. Un estudiante debe empezar a girar la rueda de forma lenta pero constante en sentido horario. El segundo estudiante se fijará en el movimiento de la marca en la rueda respecto al palo. El tercer estudiante deberá cronometrar el tiempo y sostener el palo. Finalmente los estudiantes intercambiarán los roles.

5. Tras este proceso de observación los estudiantes deberán graficar el movimiento que describe la marca en la rueda respecto al palo en función del tiempo y lleguen a la conclusión que quien varía no es el tiempo sino el ángulo entre la marca de la rueda y el tiempo.

   Se les solicitará que realicen el gráfico, siendo y la altura del palo y s el tiempo, por lo que la gráfica sería de y contra s. Para especificar las condiciones iniciales se toma $y = 0$ como el punto medio de la oscilación y que el palo comience en $s = 0$, recordando que giran la rueda en sentido horario. Se espera que los estudiantes lleguen como primera aproximación a una gráfica como la que se encuentra en la imagen 3 (la imagen es una aproximación de manera no formal en la que puedan describir el movimiento de la rueda en cierto tiempo).

6. Luego se procede a tomar mediciones de la rueda (diámetro, radio) en pulgadas, con el fin de hacer la escala de oscilación que estará definida por el

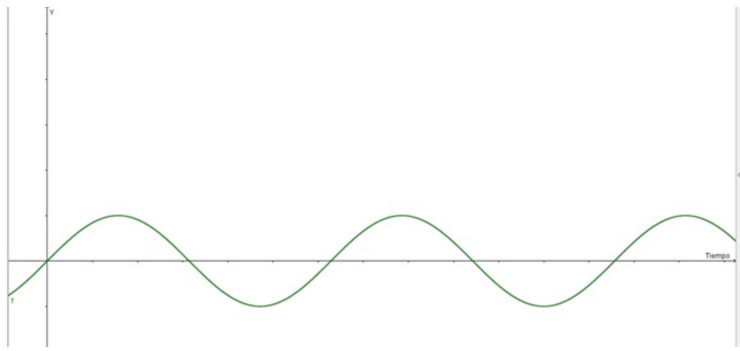


Figure 3: Creación propia: Aproximación de manera no formal en el que un estudiante describa el movimiento de la marca en la rueda en cierto tiempo

radio de la rueda (Se asume que el radio de la rueda es $12\frac{1}{2}\ in$).

7. Se le preguntará a los estudiantes ¿Cuál es el tiempo que se demora la rueda en dar 10 vueltas completas? Si se tiene en cuenta que cada vuelta es una revolución de la rueda, con el dato obtenido anteriormente, ¿En cuántos segundos la rueda da una revolución?

8. Los estudiantes realizarán nuevamente la gráfica, teniendo en cuenta la altura y (la oscilación de la rueda con el radio en pulgadas), contra el tiempo (el intervalo de tiempo en cada revolución de la rueda en segundos). Se recomienda usar GeoGebra realizando un ajuste de puntos.

9. Se pedirá encontrar a los estudiantes una expresión que les permita hallar la altura de la rueda de la bicicleta respecto al palo (y) en cualquier valor de tiempo (s). Si los estudiantes no comprenden la pregunta se pasa a presentarles el siguiente gráfico en la imagen 4 y que respondan las siguientes preguntas con el fin de que comprendan que y depende de s, porque y depende del ángulo θ y al girar la rueda se hace θ depende de s (y es una función de θ, θ es una función de s):

   a) ¿Por qué cambia y?

   b) ¿De qué depende el ángulo θ?

10. ¿Puedes encontrar una expresión de y en función del ángulo θ?

11. ¿Puedes encontrar una expresión del ángulo θ en función del tiempo?

12. Se les pedirá a los estudiantes que intenten encontrar a y en términos de θ. Para eso, se espera que los estudiantes usen trigonometría y obtengan lo siguiente:

$$\frac{y}{12.5} = sin\theta$$
$$y = 12.5Sin\theta$$

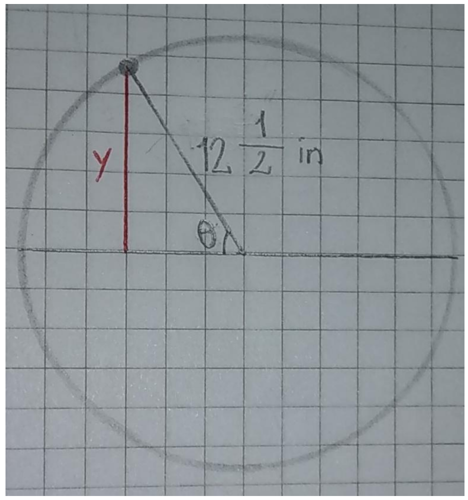


Figure 4: Creación propia: Hallar y en cualquier s

Al comenzar $\theta = 0$ en $s = 0$ y luego girar la rueda a una velocidad fija, se hace que θ cambie con el tiempo, de modo que en diferentes momentos se tengan diferentes valores de θ, y eso hace que θ sea una función de s

13. Luego de eso, los estudiantes con creatividad deberán colocar en radianes a la rueda de la bicicleta $\pi rad, \frac{\pi}{2} rad, 2\pi rad, \frac{3\pi}{2} rad$, y cambiar el valor de θ por esos ángulos y tabular la información entre tiempo y ángulo. Se les pedirá que hagan lo mismo cuando θ valga 4π, cuando sean $6t$ (cada t es un segundo), cuando sean $0s, 6s, 12s, 25s$. Los ángulos deberían quedar como la imagen 5.

2.4 Resultados esperados

Se espera que los estudiantes por medio del experimento puedan ir construyendo el concepto de función senosoidal, pasando por las diferentes representaciones de esta; representación gráfica, representación tabular, representación analítica y verbal. De igual manera, se espera que los estudiantes puedan identificar los diferentes atributos de la función senosoidal.

2.5 Toma de datos

2.5.1 Primeros acercamientos al experimento

Los siguientes links son los videos que evidencia la toma de datos del experimento.

`https://drive.google.com/file/d/1Xx7geS3MkzyTQGZ6LfWrjOx5-hkSf4tW/view?usp=sharing`

Figure 5: Creación propia: Ángulos en radianes en una rueda de bicicleta

Para la toma de datos se tendrá en cuenta el siguiente video: `https://drive.google.com/file/d/1mzS5Y_67lpvTFROnMqWvh9QytCPFiOK7/view?usp=sharing`

- Diametro de la rueda: 25 in
- Radio de la rueda: $12\frac{1}{2}in$, la oscilación estará entre $12\frac{1}{2}in$ y $-12\frac{1}{2}in$.
- 10 vueltas en: $20s$

  Se toman varias vueltas para poder calcular la revolución de la rueda de forma más exacta: $\frac{20}{10} = 2$
- Tiempo de una revolución de la rueda: $2s$
- Gráfica de la función en una revolución de la rueda:

  La grafica en geogebra se hace a partir de la tabla de valores que va desde $0s$ hasta $2s$ qué es lo que se demora en dar una vuelta completa la rueda. Para esto se ingresaron los valores en la vista de hoja de cálculo, después se dio clic derecho y crear lista de puntos, después en entrada se coloca ajusteseno($< listadepuntos >$). Por último en entrada se ingresó función $(f(x), 0, 2)$.

  En esta parte se puede decir que la amplitud será de $25in$ con un periodo de $2s$

  Ahora pasando a encontrar una expresión que nos permita encontrar el valor de y para cualquier s se parte primero de la siguiente gráfica y de las siguientes preguntas orientadoras y a la imagen 7:

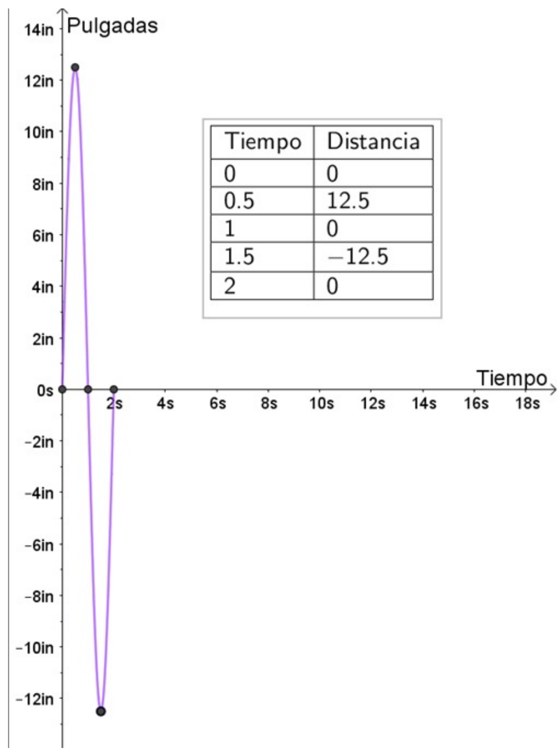


Figure 6: Creación propia: Gráfica de la función en una revolución de la rueda

- ¿Por qué cambia y?
- ¿De qué depende el ángulo θ?

El ángulo θ cambia y este a su vez depende de s, porque y depende del ángulo y al girar la rueda estamos haciendo que dependa de s. Entonces tenemos lo siguiente:

$$y\ en\ funci\acute{o}n\ de\ \theta$$
$$\theta\ en\ funci\acute{o}n\ de\ s$$

Lo que se hace entonces es encontrar una expresión para cada una de estas funciones y después proceder a "unir" ambas expresiones.

1. Se encuentra y en términos de θ.

$$\frac{y}{12.5} = Sin\theta$$
$$y = 12.5 \cdot Sin\theta$$

La anterior expresión indica que estamos haciendo cambiar el ángulo θ con el tiempo, de modo que en diferentes momentos se tengan diferentes valores de θ.

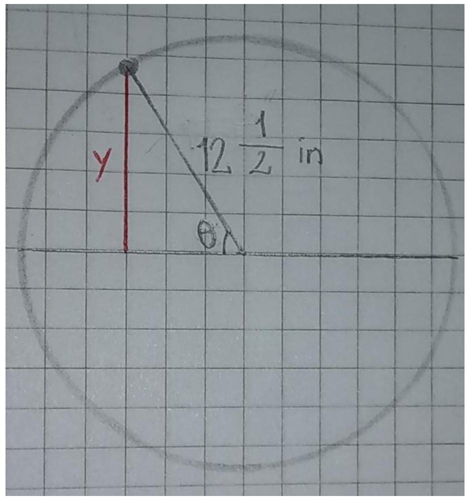


Figure 7: Creación propia: Hallar y en cualquier s

2. Ahora se hace una tabla de valores entre el tiempo y el ángulo tomado en radianes, como la que se muestra a continuación:

Tiempo (s)	Ángulo (θ)
0	0
0.5	$\frac{\pi}{2}$
1	π
1.5	$3\frac{\pi}{2}$
2	2π

Esta tabla se hace para encontrar alguna regularidad, se observa que aumenta de forma proporcional, si queremos saber el ángulo al pasar 0.3 segundos se tendría el siguiente razonamiento: el ángulo θ en $\frac{\pi}{2}$ aumenta 0.5 segundos además sabemos que al pasar 2 segundos el ángulo será 2π. Entonces se plantea lo siguiente con una regla de tres

$$\theta = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 0.3s}{0.5s}$$

Para hacer un poco más fácil los cálculos se decide pasar los numeros decimales a fracción:

$$0,3 = \frac{3}{10}$$
$$0,5 = \frac{1}{2}$$

Reemplazando en la primera expresión se tendría:

$$\theta = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} rad$$
$$\theta = \frac{\frac{3\pi}{20}}{\frac{1}{2}} rad$$

$$\theta = \frac{6\pi}{20} rad$$
$$\theta = \frac{3\pi}{10} rad$$

Ahora al pasar los radianes a grados tenemos:

$$\theta = \frac{6}{20} \cdot \frac{180}{1}$$
$$\theta = \frac{1080}{20}$$
$$\theta = 54°$$

Pero si tomamos en cuenta que 2s es el periodo de la oscilación la forma general quedaría de la siguiente forma:

$$\theta = 2\pi \cdot \frac{s}{2}$$

Ahora si reemplazamos la anterior expresión en $y = 12.5 \cdot sin\theta$, se tendría lo siguiente:

$$y = 12.5 \cdot sin(2\pi \frac{s}{2})$$

- Interpretación de la expresión anterior:
  * 12.5 hace referencia a $12\frac{1}{2}in$ que es el radio de la rueda, es decir es la amplitud del movimiento.
  * 2 es el tiempo que le toma a la rueda en una revolución y es el período de oscilación. Cuando el tiempo aumenta en $2s$ la expresión entre paréntesis aumentará en 2π, y que hará que la función seonosoidal vuelva a donde estaba.

3 Recurso Interactivo

La situación experimental es describir la altura de la marca de la rueda respecto al palo (se mide el radio de la rueda en pulgadas) en función del tiempo medido en segundos, el recurso interactivo lo encuentra en el siguiente link: `https://www.geogebra.org/m/y2rpc8xr`

3.1 Representación tabular

La variable independiente es el tiempo medido en segundos (s) y la variable dependiente es la distancia que hay entre el diámetro de la rueda y la marca realizada en la rueda (in). Los ángulos se medirán en radianes (rad). La escala entre las variables serán 1 a 1. La tabla se realizó con datos encontrados en la situación experimental, teniendo en cuenta que el radio de la rueda es $12\frac{1}{2}in$ y el periodo es $2s$.

Las imágenes correspondientes son la 8 y la 9

Tiempo (s)	Pulgadas (in)
0	0
0.5	12.5
1	0
1.5	-12.5
2	o
2.5	12.5
3	0
3.5	-12.5
4	0
4.5	12.5
5	0
5.5	-12.5
6	0

Figure 8: Creación propia: Marca del palo alineada con la marca de la rueda de la bicicleta

3.2 Representación conjuntista

El dominio de está función son todos los valores del tiempo medido en segundos, el codominio son los números reales, el rango toma valores entre 12.5 y -12,5 y la función no es inyectiva porque existen diferentes tiempos con la misma longitud del radio, no es sobreyectiva porque hay números reales en el codominio que no tienen ningún tiempo y por ende no es biyectiva porque no es ni inyectiva, ni sobreyectiva.

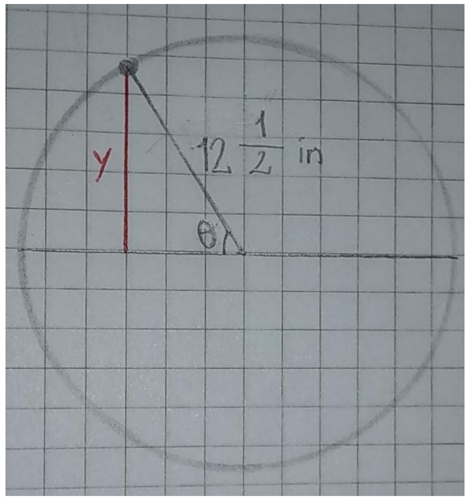


Figure 9: Creación propia: Hallar y en cualquier s

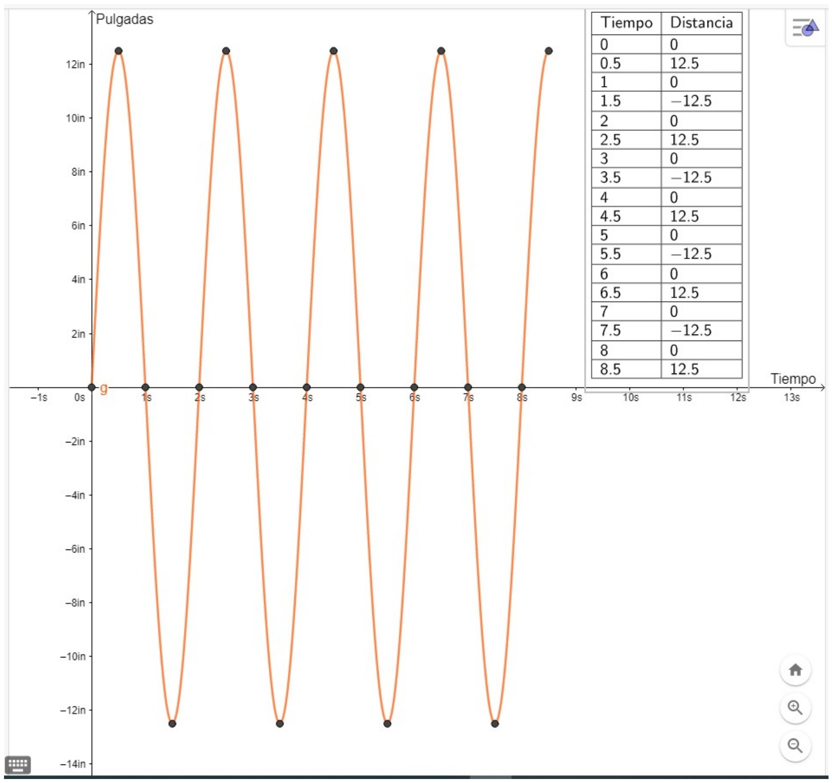
3.3 Representación analítica

La situación es describir la altura de la marca de la rueda respecto al palo (radio de la rueda medido en pulgadas) en función del tiempo medido en segundos, siendo las variables las pulgadas y el tiempo, en la que su conexión sería en cierto tiempo, encontrar la altura de la marca de la rueda, esa altura sería el radio de la rueda medido en pulgadas, para eso se usa la siguiente expresión algebraica:

$$y = 12.5 \cdot sin(2\pi \frac{s}{2})$$

3.4 Representación gráfica

La paridad de la función es impar, debido a que es simétrica respecto al orígen, la función senosoidal es cóncava y convexa, con puntos de inflexión (la función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava).



Tiempo	Distancia
0	0
0.5	12.5
1	0
1.5	−12.5
2	0
2.5	12.5
3	0
3.5	−12.5
4	0
4.5	12.5
5	0
5.5	−12.5
6	0
6.5	12.5
7	0
7.5	−12.5
8	0
8.5	12.5

Figure 10: Creación propia: Hallar y en cualquier s