Resolución y formulación de problemas

1. $f(x) = x^2 + C$.

¿cómo construir una curva $y(x)$ que sea perpendicular a toda la familia de curvas $f(x)$?

En primer lugar, ubicamos un punto sobre la curva $f(x) = x^2 + C$. (para este paso supongamos que $c = 0$)

$f(1) = 1^2 + 0$

$f(1) = 1 \longrightarrow$ forma general para este caso $f(1) = 1 + C$

$\boxed{P = (1, 1)}$

sabemos que la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente, entonces

$f'(x) = 2x$

si evaluamos 1, $f'(1) = 2(1) = 2$ → pendiente de la recta tangente a $f(x)$.

construimos la ecuación de esa recta usando punto-pendiente

$P(1, 1)$ ó $P(1; 1+C)$.

$m = 2$.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 1 = 2(x - 1)$$
$$y = 2x - 2 + 1$$
$$\boxed{y = 2x - 1}$$

Ahora, solo falta hallar una recta perpendicular a la anterior y que pase por el punto P.

La recta perpendicular a $y = 2x - 1$.

tiene la forma $y = -\frac{1}{2}x + C$. (reemplazamos el punto P para hallar C)

$1 = -\frac{1}{2}(1) + C \longrightarrow 1 + \frac{1}{2} = C \longrightarrow C = \frac{3}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

El anterior proceso, se hizo para un punto incial P. pero la forma general sería:

① $x = 2$

$f(x) = x^2 + c$

$f(2) = 2^2 + c$

$f(2) = 4 + c$

$P(2, 4+c)$ ó $P(2, f(2))$.

$f'(x) = 2x$

$f'(2) = 4$ → pendiente recta tangente

② Ecuación recta tangente usando punto - pendiente.

$y - (4+c) = 4(x-2)$

$y - (4+c) = 4x - 8$.

$y = 4x + (-8 + 4 + c)$

$\boxed{y = 4x + c - 4}$

→ recta tangente a $f(x)$ en el punto $(2, f(2))$.

Hallar la recta perpendicular a la recta tangente.

$y = -\frac{1}{4}x + K$.

$\frac{1}{4} \rightarrow f'(2)^{-1}$ → llamemolo b

(Reemplazamos las coordenadas del punto).

$\underbrace{(4+c)}_{f(2)} = -b(2) + K$.

$K = f(2) + 2b$.

y por tanto $y(x)$ perpendicular a $f(x)$ es:

$y = -bx + (f(2) + 2b)$.

Hoja de trabajo 3.

a) construcción geogebra.

b) i es una parabola con vértice en (0, -1)

$y = x^3 - x$

ii "La derivada es la pendiente de la recta tangente".

$y' = m$

$y' = 3x^2 - 1$

velocidad instantanea

$f(1) = 0$ $\quad y' = 3x^2 - 1$

$y = x^3 - x + C_1$

$0 = \cancel{1} - \cancel{1} + C_1$

$C_1 = 0$

$y = x^3 - x$

1) Encuentre la razón de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo [0,2].

$x_0 = 0$

$x_1 = 2$

$f(0) = 0$

$f(2) = 6$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\frac{6 - 0}{2} = \boxed{3}$$

La razón de cambio promedio en el intervalo [0,2] es un aumento de 3 unidades en "y" por cada aumento en "x".

2) cuál es la razón de cambio (velocidad) instantaneo de "y" con respecto a "x" en x = 2.

$f(x) = x^3 - x$

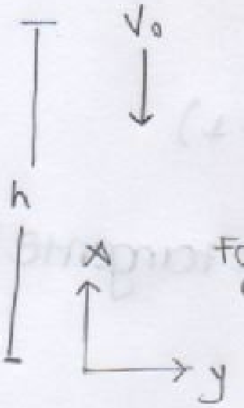
$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f'(2) = 3(2)^2 - 1 = \boxed{11}$

La razón de cambio instantaneo de "y" con respecto a "x" en x=2 es 11

Ley de Newton

• (1)



0
$\downarrow$
$F_g = mg.$

$F = ma$ → aceleración

$$\boxed{F = m\frac{d^2h}{dt^2}}$$

$$F_g = m\frac{d^2h}{dt^2}, \quad F_g = -mg$$

$$-mg = m\frac{d^2h}{dt^2}$$

$$-g = \frac{d^2h}{dt^2}$$

$$-\int g = \int \frac{d^2h}{dt^2} \longrightarrow \boxed{-gt + c_1 = \frac{dh}{dt}} \ \dots$$

$$\dots \ -\int gt + c_1 \, dt = \int \frac{dh}{dt}$$

$$\boxed{-\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2 = h(t)}$$

$c_1 \rightarrow V_0$. $\quad c_2 \rightarrow h_0$

$$\frac{-1}{2}gt^2 + V_0 t + h_0 = h$$

$$h - h_0 = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$h - h_0 \rightarrow h$

(construcción geogebra).

Astro	(a) m/s^2
Mercurio	3,70
Venus	8,85
Luna	1,62
Marte	3,72
Júpiter	26,39.
Saturno	11,67.
Urano	11,43
Neptuno	11,07.

Punto 2 Lenguaje de las ecuaciones diferenciales

a) recta tangente a la gráfica de $y(x)$ en el punto (x,y) pasa por el punto $(x/2, 0)$.

pendiente $= m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{x_2 \; y_2}{\left(\frac{x}{2}, 0\right)} \\ \underset{x_1 \; y_1}{(x, y)} \end{array}\right\} \longrightarrow m = \frac{0 - y}{\frac{x}{2} - x} = \frac{-y}{-\frac{x}{2}} = \boxed{\frac{2y}{x}}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial que cumple con las características descritas, es: $\boxed{y' = \dfrac{2y}{x}}$

Es una ecuación diferencial separable.

$$y' = \frac{dy}{dx} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2y}\, dy = \frac{1}{x}\, dx}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\frac{1}{2} \ln|y| = \ln|x| + C$$

Esta constante también hace referencia a la resultante de la integral del otro lado de la ecuación, dado que $C_1 + C_2 = C$.

$$\cancel{\ln}|y| = 2\ln|x| + C \longrightarrow 2 \cdot C = C$$

$$\cancel{e} \quad = e$$

$$y = e^{2\ln|x|} \cdot e^{C} \longrightarrow e^{C} = C$$

$\boxed{y = x^2 \cdot C}$ solución a la ecuación diferencial $y' = \dfrac{2y}{x}$.

b). Toda linea recta normal a la gráfica de $y(x)$ pasa por el punto $(0,1)$

por definición la pendiente de una recta normal a y es: $m = \frac{-1}{y'}$.

$$\left.\begin{matrix} \overset{x_1\ y_1}{(x,y)} \\ \underset{x_2\ y_2}{(0,1)} \end{matrix}\right\} \longrightarrow m = \frac{1-y}{0-x} = \frac{1-y}{-x} = \boxed{\frac{y-1}{x}}$$

dado que tenemos:

$$m = \frac{-1}{y'}, \quad m = \frac{y-1}{x}$$

igualamos para despejar y'

$$\frac{y-1}{x} = -\frac{1}{y'}$$

$$y' = -\frac{x}{y-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y-1}$$

$$y-1\,dy = -x\,dx$$

$$\int y-1\,dy = -\int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} - y = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$y^2 - 2y = -x^2 + C$$

$$y^2 - 2y + x^2 - C = 0$$

función solución a $y' = \frac{-x}{y-1}$

$a = 1 \quad b = -2 \quad c = x^2 - C$

$$y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(x^2 - C)}}{2(1)}$$

$$y = \frac{2 + \sqrt{4 - 4x^2 + 4C}}{2}$$

$$y = \frac{2 + \sqrt{4(1 - x^2 + C)}}{2}$$

$$y = \frac{2 + 2\sqrt{1 - x^2 + C}}{2}$$

$$y = 1 + \sqrt{1 - x^2 + C}$$

$$\boxed{y = 1 \pm \sqrt{-x^2 + 1 + C}}$$

(si elevo al cuadrado)

$$y^2 = 1 + (-x^2) + 1 + C$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 2 + C} \longrightarrow \text{circunferencia}$$