

Em um grupo de discussões, um colega postou uma pergunta sobre como obter a planificação de um cubo utilizando o GeoGebra. Prontamente, os participantes do grupo escreveram recomendando que utilizasse dois comandos do software:

- `Cubo[<Ponto>, <Ponto>]`
- `Planificação[<Poliedro>, <Número>]`

Na Figura 1 aparece um cubo construído a partir dos pontos $(0, 0, 0)$ e $(1, 0, 0)$ e, para tanto, foi digitado `cubo = Cubo[(0,0,0), (1,0,0)]` no campo Entrada. Para obter a planificação foi utilizado o comando `Planificação[cubo, 1]`.

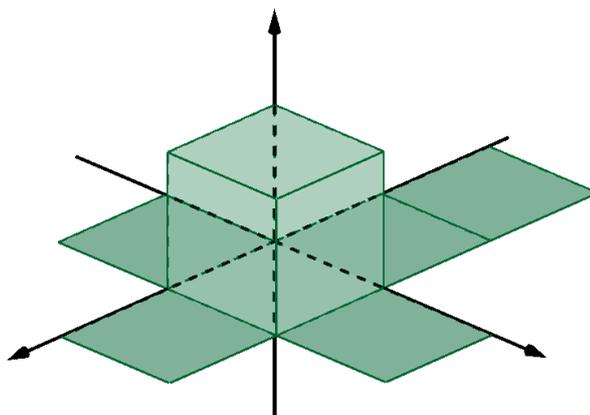


Figura 1: Um cubo e sua planificação

O parâmetro <Poliedro> é o nome do poliedro que, nesse caso, é cubo e, o parâmetro <Número>, substituído por 1 (um), indica que o molde do cubo deve estar completamente aberto, formando sua planificação. Esse parâmetro pode assumir qualquer valor no intervalo $[0, 1]$ e, com isso, obtém o molde em estágios diferenciados de abertura. Os moldes da Figura 2 possuem os seguintes valores para esse parâmetro: 0.1, 0.5 e 0.8.

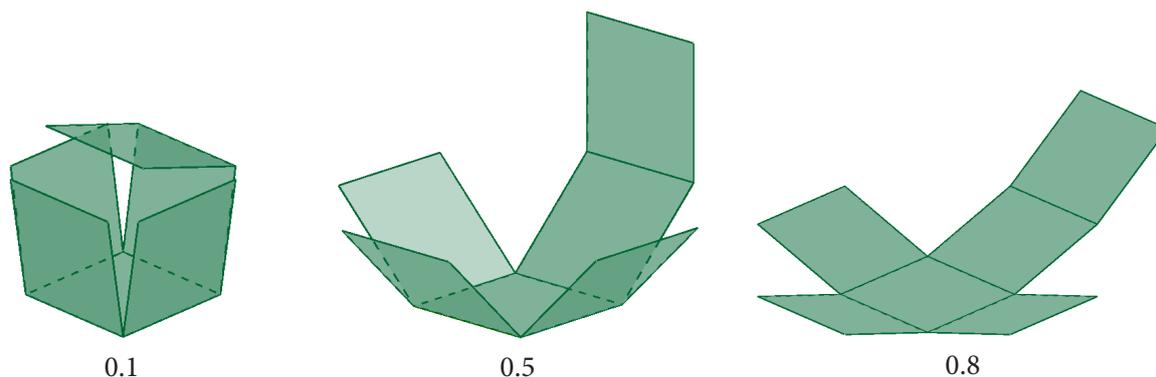


Figura 2: Moldes em três estágios de abertura

O colega do grupo não ficou completamente satisfeito com a resposta recebida, pois utilizando o comando de planificação do GeoGebra é possível obter apenas uma entre onze possibilidades de planificações do cubo.

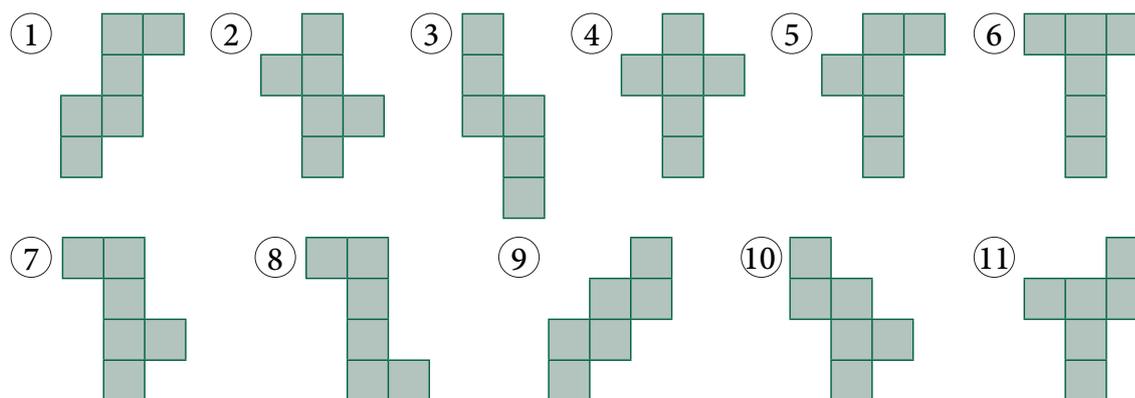


Figura 3: Onze possibilidades de planificação de um cubo

Esse texto tem o objetivo de apresentar uma forma de contruir planificações de um cubo por meio de translações e rotações de um quadrado utilizando comandos do Geogebra.

CONSTRUÇÃO DE UM MOLDE

Antes de iniciar a construção é necessário escolher uma das planificações do cubo, conforme exibidas na Figura 3. Em seguida, deve-se decidir qual das faces ficará fixa para que, a partir dela, as demais sejam obtidas por rotações e translações. Neste texto é tomada a planificação 2 que aparece na Figura 3 e a face F_1 é fixa.

Para iniciar a construção, o GeoGebra deve exibir a Janela de Álgebra, a Janela de Visualização e a Janela de Visualização 3D. Para exibir ou ocultar essas janelas, clique no menu Exibir e acesse a opção relativa ao nome da janela.

Construa a primeira face do cubo digitando $F_1 = \text{Polígono}[(0, 1, 0), (0, 0, 0), 4, \text{EixoZ}]$ no campo Entrada.

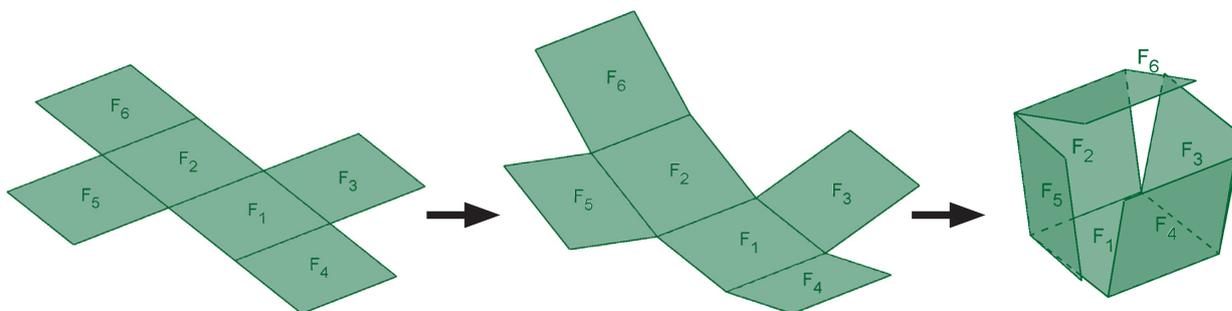


Figura 4: Molde 2 da figura 3 em processo de montagem do cubo

Em seguida, construa também três vetores. Para construir o primeiro, digite $u = (1,0,0)$ no campo Entrada. Para os demais, digite $v = (0,1,0)$ e $w = (0,0,1)$. Esses vetores e outros, obtidos a partir destes, serão úteis para transladar a face F_1 do cubo para obter outras faces.

Oculte os vetores u , v e w . Em seguida, clique na ferramenta Controle deslizante e construa, na Janela de Visualização, um controle α com valor mínimo 0° , valor máximo 90° e incremento 1° . Esse controle será utilizado para a medida do ângulo de rotação das faces derivadas de F_1 .

Na Figura 5 é possível observar a posição de cada uma das faces do cubo em relação a F_1 e em relação aos eixos x e y .

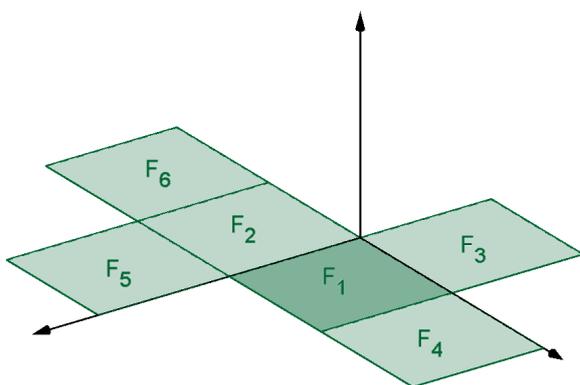


Figura 5: Planificação de um cubo

A face F_2 pode ser obtida por uma rotação de F_1 em torno do eixo x . Quando o cubo está montado F_2 é ortogonal a F_1 , ou seja, formam um ângulo de 90° . Assim, F_2 deve ser obtida nessa construção por um giro de F_1 , em torno do eixo x no sentido anti-horário, de $90^\circ + \alpha$.

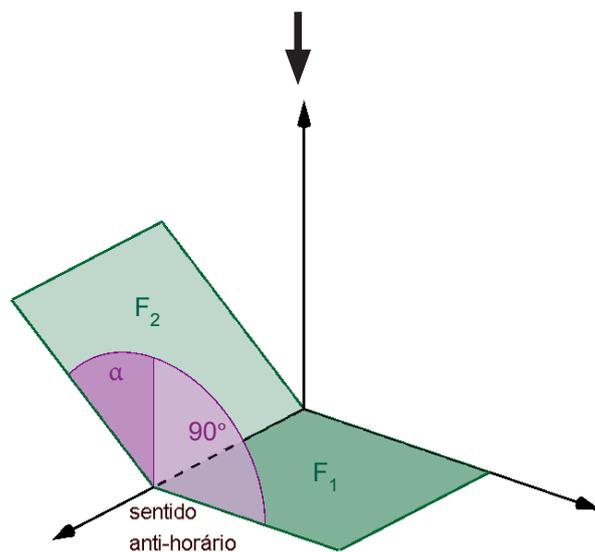
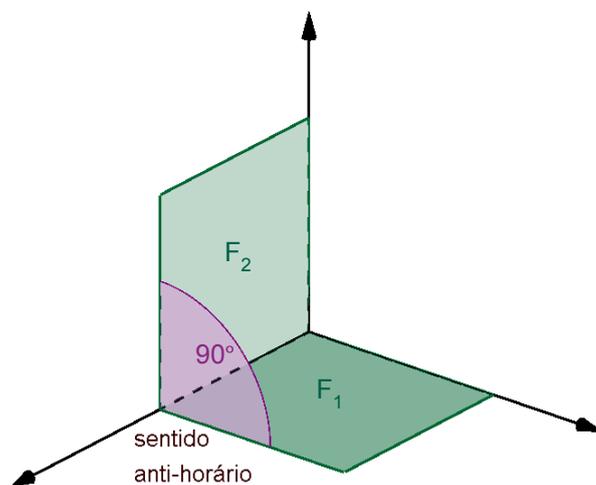


Figura 6: Processo de construção de F_2 a partir de F_1

No campo Entrada digite a seguinte expressão que constrói F_2 a partir de um giro de F_1 por meio de um giro de $90^\circ + \alpha$.

$$F_2 = \text{Girar}[F_1, 90^\circ + \alpha, \text{EixoX}]$$



A face F_3 é obtida de forma semelhante a F_2 , por uma rotação de F_1 . Porém, o giro é no sentido oposto e em relação ao eixo y . Para produzir o giro no sentido horário, o ângulo deve ser negativo.

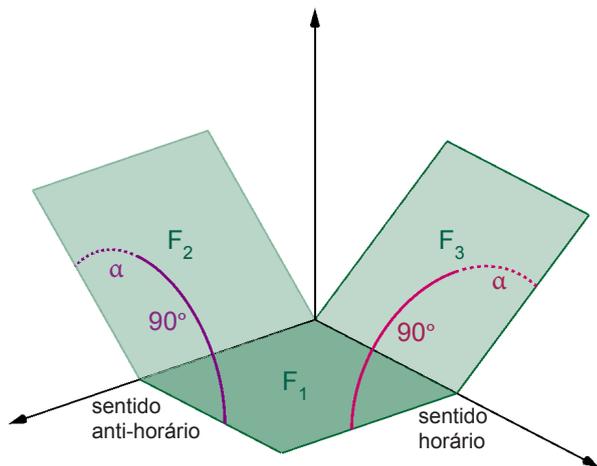


Figura 7: Processo de construção de F_3 a partir de F_1

Para obter a face F_3 , no campo Entrada, digite o comando a seguir:

$$F_3 = \text{Girar}[F_1, -90^\circ - \alpha, \text{EixoY}]$$

A face F_4 deve ser obtida girando F_1 em torno do eixo x e, em seguida, transladando o resultado obtido na direção positiva do eixo y , utilizando o vetor v .

Note que o ângulo de rotação utilizado ($90^\circ - \alpha$) é diferente dos utilizados para obter as faces F_1 , ($90^\circ + \alpha$) e F_2 , $-(90^\circ + \alpha)$. No caso de F_3 , subtrair α de 90° ao invés de adicionar, faz com que a face gire no sentido horário, ao invés de girar no sentido anti-horário.

Os movimentos de rotação e translação são obtidos por meio de uma combinação de dois comandos:

- `Transladar[<Objeto>, <Vetor>]`
- `Girar[<Objeto>, <Ângulo>, <Eixo de Rotação>]`

No campo de Entrada digite o seguinte comando:

$$F_4 = \text{Transladar}[\text{Girar}[F_1, 90^\circ - \alpha, \text{EixoX}], v]$$

Note que o comando `Girar[F_1, 90° - α, EixoX]` substitui o parâmetro <Objeto> no comando `Transladar`. Assim, o resultado final é um duplo movimento, uma rotação seguida de uma translação, que gera

apenas a face F_4 como objeto final. Se fosse utilizado o comando `Girar e`, em seguida, o comando `Transladar` aplicado ao resultado de `Girar`, seriam obtidos dois objetos.

- `A = Girar[F_1, 90° - α, EixoX]`
- `F_4 = Transladar[A, v]`

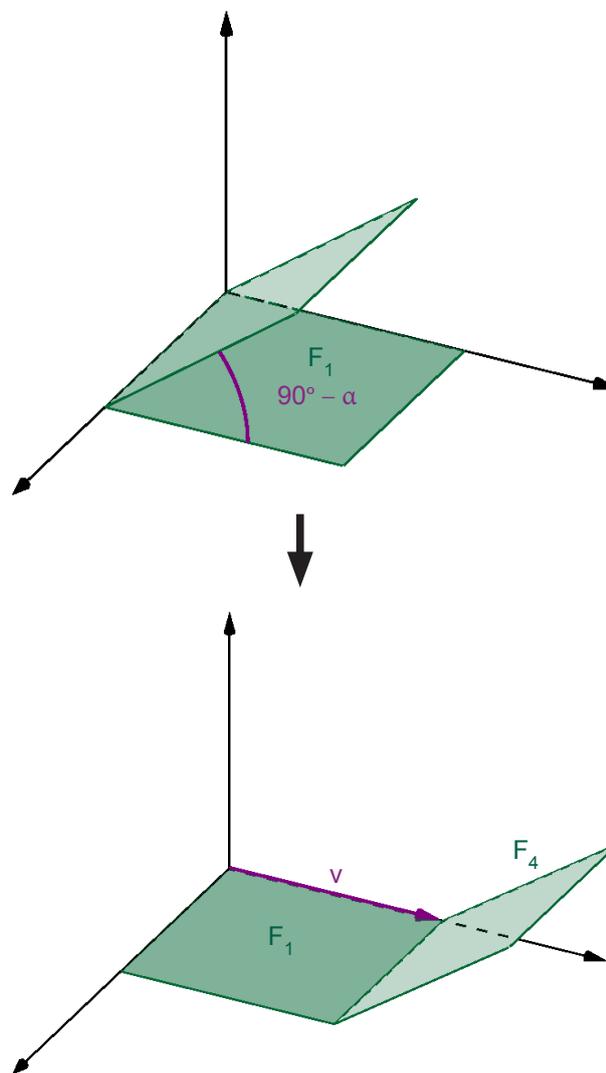


Figura 8: Movimento combinado para construção de F_4 a partir de F_1

Na planificação exibida na Figura 5, a face F_5 possui um lado adjacente a F_2 , o que implica que nesse molde a face F_5 deve se movimentar acompanhando o movimento de F_2 . Em outras palavras, F_5 deve ser sincronizada aos giros de F_2 .

Para construir F_5 gire F_1 um ângulo de medida $90^\circ - \alpha$ em torno do eixo y , obtendo um polígono A .

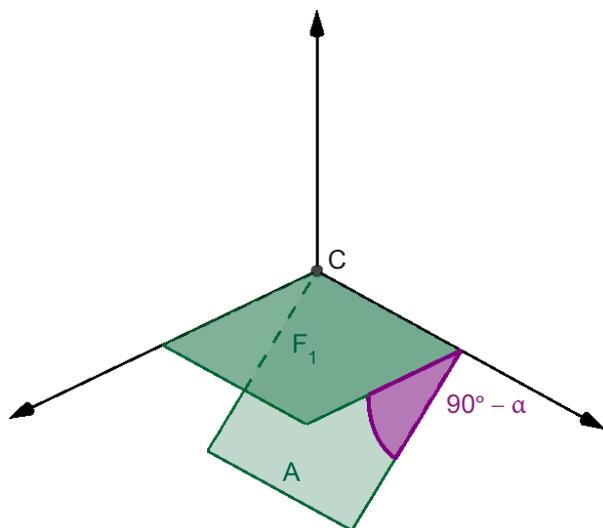


Figura 9: Primeira parte da construção de F_5 a partir de F_1

Em seguida, gire A , $\alpha + 90^\circ$ em torno do eixo x obtendo o polígono B . Esse último movimento é o mesmo utilizado para obter F_2 a partir de F_1 .

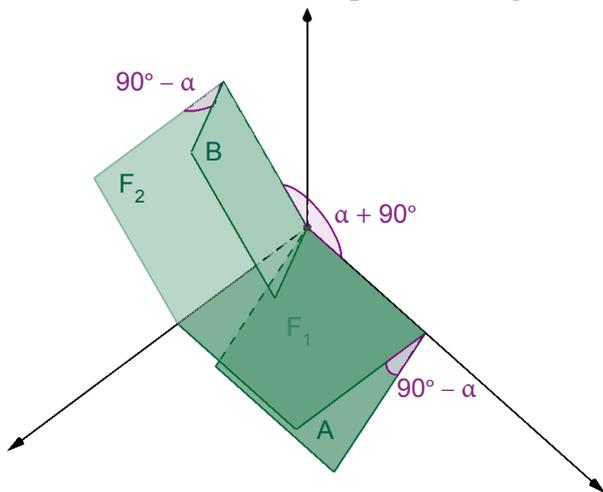


Figura 10: Rotação de A , $\alpha + 90^\circ$ em torno do eixo x , para obter B

Para concluir a construção de F_5 translade B na direção positiva do eixo x , ou seja, pelo vetor u .

O ângulo formado entre F_5 e F_2 é suplementar ao ângulo formado entre F_2 e B , ou seja $180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$.

Os polígonos A e B que correspondem a estágios da construção de F_5 podem ser obtidos no GeoGebra, digitando os seguintes comandos:

- $A = \text{Girar}[F_1, 90^\circ - \alpha, \text{EixoY}]$
- $B = \text{Girar}[A, \alpha + 90^\circ, \text{EixoX}]$
- $F_5 = \text{Transladar}[B, u]$

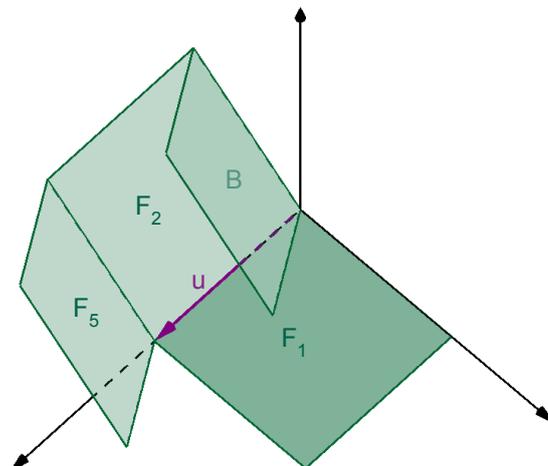


Figura 11: Translação de B na direção de u para obter F_5

Utilizando uma expressão de comandos combinados é possível obter apenas um objeto final. Para isso, é preciso fazer “ $F_5(B(A))$ ”, ou seja,

$$F_5 = \text{Transladar}[\text{Girar}[\text{Girar}[F_1, 90^\circ - \alpha, \text{EixoY}], \alpha + 90^\circ, \text{EixoX}], u]$$

A última face a ser construída é F_6 que, como é possível observar na Figura 12, se movimentada em sincronia com o giro de F_2 em torno do eixo x . Assim, F_6 altera sua posição pelo giro $90^\circ + \alpha$ de F_2 em torno do eixo x , simultaneamente, sofre também um giro de $90^\circ + \alpha$, conforme apresentado na Figura 12.

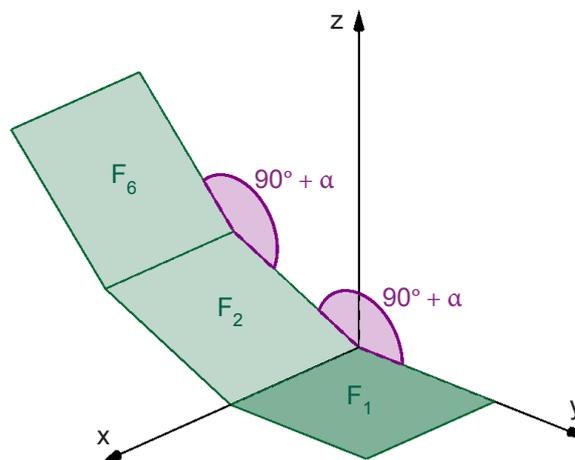


Figura 12: Movimento de F_6 em sincronia com F_2

Para obter F_6 , gire F_1 em torno do eixo x , em um ângulo de medida $2(90^\circ + \alpha) = 180^\circ + 2\alpha$. Suprimindo 180° na medida anterior obtém-se o mesmo resultado, ou seja, um polígono por uma rotação de 2α em torno do eixo x .

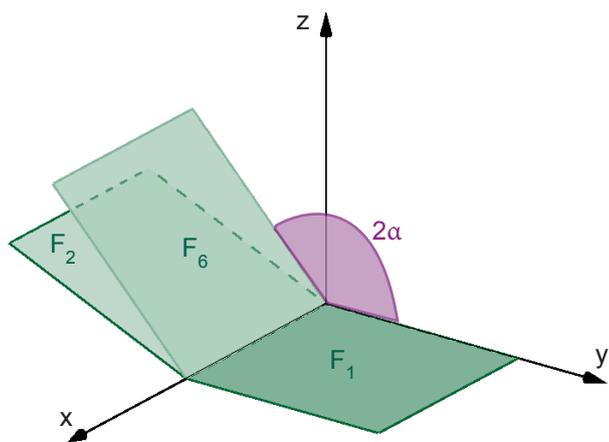


Figura 13: Giro de F_1 , 2α em torno do eixo x , para obter F_6

F_6 deve ser transladada para que um de seus lados fique adjacente a um lado de F_2 . Para isso, constrói-se um vetor com a mesma rotação de F_2 em relação ao eixo x . Esse vetor pode ser obtido girando v , em torno do eixo x , em um ângulo de medida $90^\circ + \alpha$. Ou ainda, girando w , em relação ao eixo x , por um ângulo α .

Para obter F_6 , realizando as rotações e a translação apresentadas anteriormente, digite no campo Entrada a seguinte expressão de comandos combinados.

$$F_6 = \text{Transladar}[\text{Girar}[F_1, 2\alpha, \text{EixoX}], a]$$

Após construir F_6 o molde do cubo fica completo. Variando o controle deslizante α de 0° (cubo montado) a ângulos maiores que zero, obtêm-se estágios de abertura do molde e, com $\alpha = 90^\circ$, obtêm-se a planificação do cubo.

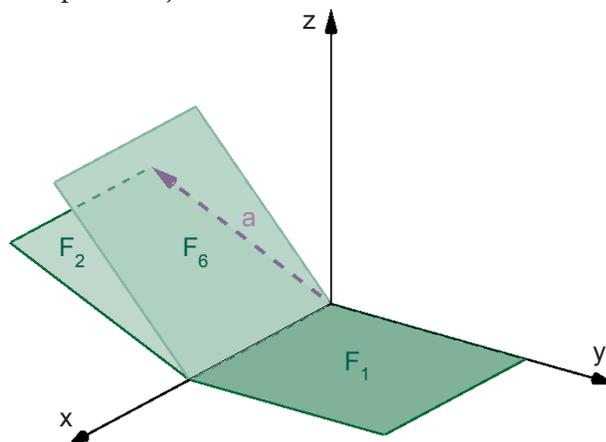


Figura 14: Translação de F_6 pelo vetor a

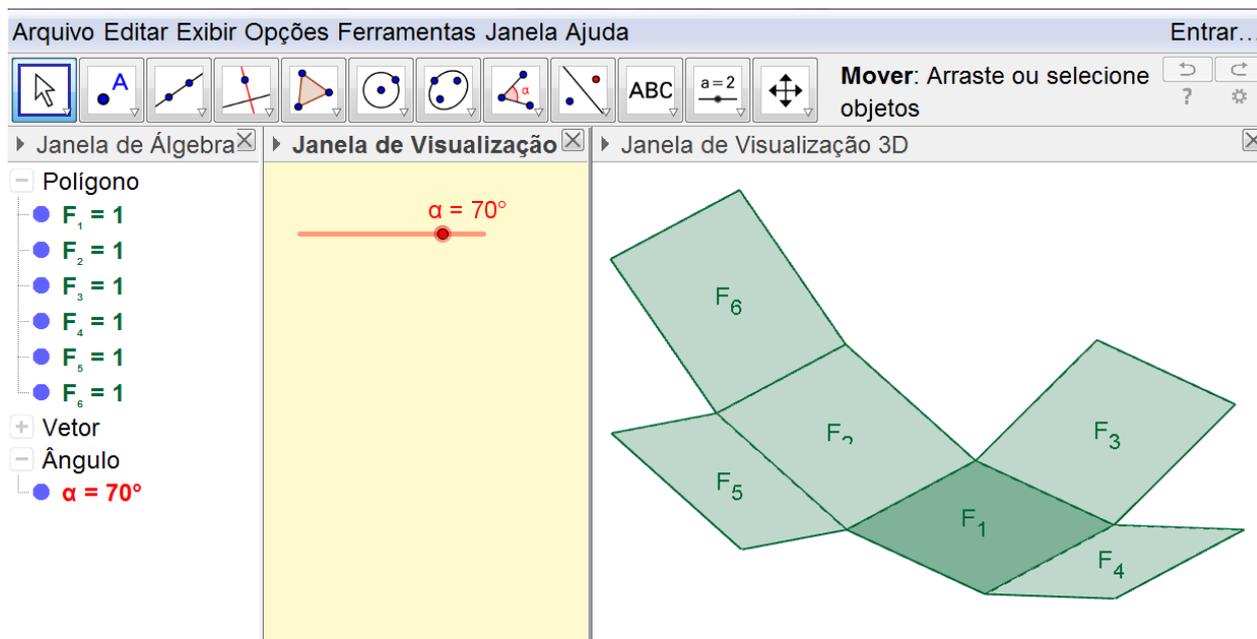


Figura 15: Molde do cubo