12 月 7 日作业

1．下列命题中，真命题是(A)

A．若 x，$y\in\mathbf{R}$ 且 $x+y>2$，则 x，y 至少有一个大于 1

B．$\forall x\in\mathbf{R},2^x>x^2$ ✗ $x=1$ 时 $2^x=x^2$

C．$a+b=0$ 的充要条件是 $\frac{a}{b}=-1$ ✗ 还有 $a=0,b=0\Rightarrow a+b=0$

D．$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2\leqslant 0$ ✗ $\because x^2\geqslant 0\ \therefore x^2+2\geqslant 2$.

2．已知 $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=1(x>0，y>0)$，则 $x+y$ 的最小值为(D)

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

$\because \frac{2}{x}+\frac{2}{y}=1$

$\therefore x+y=(x+y)(\frac{2}{x}+\frac{2}{y})=2+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}+2=2(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+4\geqslant 2\times 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+4=8$

当且仅当 $\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$ 即 $x=y$ 时 $x+y$ 有最小值 8.

3．已知 $125^x=12.5^y=1\,000$，则 $\frac{y-x}{xy}=$ $\underline{\quad \frac{1}{3} \quad}$.

$\because 125^x=1000\ \therefore x=\log_{125}1000\ \because 12.5^y=1000\ \therefore y=\log_{12.5}1000$

$\therefore \frac{y-x}{xy}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{\log_{125}1000}-\frac{1}{\log_{12.5}1000}=\frac{\lg 125}{\lg 1000}-\frac{\lg 12.5}{\lg 1000}$

$=\frac{\lg 5^3}{3}-\frac{\lg\frac{125}{10}}{3}=\lg 5-\frac{3\lg 5-1}{3}=\lg 5-\lg 5+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

4．定义集合运算：$A\odot B=\{z|z=xy(x+y)，x\in A，y\in B\}$．设集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{2,3\}$，则集合 $A\odot B=$ $\underline{\{0,6,12\}}$，其所有元素之和为 $\underline{\quad 18 \quad}$.

$0\times 2\times(0+2)=0$，$0\times 3\times(0+3)=0$，$1\times 2\times(1+2)=6$，$1\times 3\times(1+3)=12$

$A\odot B=\{0,6,12\}$

5．已知 $a>0$，$b>0$，且 $a\neq b$，比较 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$ 与 $a+b$ 的大小.

解：$(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a})-(a+b)$

$=\frac{a^3+b^3}{ab}-\frac{a^2b+ab^2}{ab}$

$=\frac{a^2(a-b)-b^2(a-b)}{ab}$

$=\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{ab}=\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}$

$\because a>0,b>0$ 且 $a\neq b\ \therefore (a-b)^2>0,a+b>0,ab>0\ \therefore \frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}>0$

$\therefore \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}>a+b$.