Problemas – Tema 3

Problemas resueltos - 8 - ampliación sobre optimización

1. El valor de un rubí es proporcional al cuadrado de su peso. Divide un rubí de 2 gramos en dos partes de forma que la suma de los valores de los dos rubíes formados sea mínima.

Si la masa del primer trozo es m gramos, la del segundo trozo será $(2-m)$ gramos.

El precio es proporcional al cuadrado del peso, por lo tanto la función precio será la suma de los precios de los dos trozos:

$$P=P_1+P_2=k\cdot m^2+k\cdot(2-m)^2=k(m^2+(2-m)^2)=k(2m^2-4m+4)$$

El dominio es toda la recta real por ser polinómica. Aunque si el valor de la masa inicial es de 2 gramos, tiene sentido físico que consideremos únicamente el intervalo $m=(0,2)$ como dominio de definición.

Donde k es una constante de proporción positiva. No necesitamos conocer el valor exacto de k . Al ser una constante real no influirá al derivar y obtener los puntos críticos.

$P'=k(4m-4) \rightarrow P'=0 \rightarrow 4m-4=0 \rightarrow m=1$ punto crítico

Aplicamos condición suficiente de extremo relativo.

$$P''=k(4) \rightarrow p''(1)=4k>0$$

El punto crítico evaluado en la segunda derivada devuelve un valor positivo. Por lo tanto, el valor $m=1$ es un mínimo relativo.

Al ser el único extremo relativo en el dominio, el mínimo relativo también será mínimo absoluto. Por lo que debemos romper el rubí justo por la mitad para conseguir el precio mínimo de ambas partes.

2. Una fábrica construye cajas de latón sin tapa de volumen $500\,cm^3$, para almacenar un líquido colorante. Las cajas tienen base cuadrada. Hallar la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de latón empleada sea mínima.

La base cuadrada tendrá igual anchura que profundidad → x

La altura de la caja → h

El volumen de la caja → $500=x^2\cdot h$

La cantidad de latón será proporcional a la superficie de la caja (sin tapa). Esta superficie será igual a:

$A=A_{base}+4\cdot A_{lateral}=x^2+4\cdot x\cdot h$ → función a minimizar → dominio toda la recta real por polinómica

Esta función depende de dos variables, por lo que usamos → $500=x^2\cdot h$ → $h=\frac{500}{x^2}$ → Llevamos esta relación a la función área.

$A=x^2+\frac{2000}{x}$ → Derivamos a igualamos a cero por ser condición necesaria de extremo.

$$A'=2\cdot x-\frac{2000}{x^2}=\frac{2\cdot x^3-2000}{x^2} \quad , \quad A'=0 \;\rightarrow\; 2\cdot x^3-2000=0 \;\rightarrow\; x^3=1000 \;\rightarrow\; x=10$$

Comprobamos si es un mínimo evaluando la segunda derivada.

$A''=2+\frac{4000}{x^3}$ → $A''(10)>0$ → $x=10\,cm$ es un mínimo relativo → $h=\frac{500}{x^2}=5\,cm$

Al ser el único extremo relativo del dominio, el mínimo relativo también será el mínimo absoluto.

3. Sea f: [1,+∞) → ℝ la función definida por $f(x)=\sqrt{x-1}$. Determina el punto P perteneciente a $f(x)$ que se encuentre a menor distancia del punto $A(2,0)$. ¿Cuál es esa distancia?

Sea $P(x,y)$ el punto de la función buscado. Su distancia al punto $A(2,0)$ será:

$$d(P,A)=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$ → función a minimizar

La función distancia depende de dos variables. Sabemos que $P(x,y)\in f(x)$ → por lo tanto $y=f(x)=\sqrt{x-1}$. Llevando este valor a la función distancia, la dejaremos expresada según una única variable.

$$d(x)=\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{x-1})^2}=\sqrt{(x-2)^2+x-1}=\sqrt{x^2+4-4x+x-1}=\sqrt{x^2-3x+3}$$

Derivamos e igualamos a cero, como condición necesaria de extremo relativo.

$$d'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}} \quad , \quad d'(x)=0 \;\rightarrow\; 2x-3=0 \;\rightarrow\; x=\frac{3}{2}$$ → punto crítico

Para determinar si este valor es un mínimo, estudiamos el dominio de la función de partida $d(P,A)=\sqrt{x^2-3x+3}$. Obtenemos las raíces del discriminante.

$$x^2-3x+3=0 \;\rightarrow\; x=\frac{3\pm\sqrt{9-12}}{2}\notin\mathbb{R}$$

El discriminante nunca se anula. Si tomamos, por ejemplo, $x=0 \;\rightarrow\; 0-0+3>0$ → El discriminante siempre es positivo → El dominio de la función son todos los números reales. Si evaluamos la función derivada a ambos lados del punto crítico:

$$(-\infty,\frac{3}{2}) \;\rightarrow\; d'(0)<0 \;\rightarrow\; d(x)\downarrow$$

$$(\frac{3}{2},\infty) \;\rightarrow\; d'(2)>0 \;\rightarrow\; d(x)\uparrow$$

Por lo tanto $x=\frac{3}{2}$ minimiza la función distancia. Al ser el único extremo relativo del dominio, también será mínimo absoluto.

Así → $y=f\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}-1}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ → El punto buscado es $P\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La distancia mínima resulta → $d\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\left(\frac{3}{2}\right)+3}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+3}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ u$

4. Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea al mínimo posible.

La función que debemos optimizar es la cantidad de chapa utilizada, que será suma de la chapa empleada para la base cuadrada más la chapa empleada en las cuatro paredes verticales. En cada caso, la cantidad de chapa será igual al volumen de chapa necesaria para construir cada parte.

Si la base es cuadrada supondremos x el valor del lado. Las paredes serán rectangulares, de base x y de altura y .

El grosor de la chapa, que es uniforme (es decir, constante), lo llamaremos d .

$$Volumen \quad chapa \quad base \ = x \cdot x \cdot d = x^2 \cdot d$$

$$Volumen \quad chapa \quad paredes \ = 4 \cdot x \cdot y \cdot d$$

$$Volumen \quad total \quad chapa \ = x^2 \cdot d + 4 \cdot x \cdot y \cdot d = d\left(x^2 + 4 \cdot x \cdot y\right) \quad \rightarrow \quad V = d\left(x^2 + 4 \cdot x \cdot y\right)$$

Donde recordamos que el grosor d es un valor constante. En la práctica, al ser el grosor uniforme, lo que buscamos optimizar es la superficie total de chapa empleada.

La función V obtenida depende de dos variables: x, y . Con el dato del volumen del enunciado podemos relacionar ambas variables.

$$13,5 \quad m^3 = x \cdot x \cdot y \quad \rightarrow \quad 13,5 = x^2 \cdot y \quad \rightarrow \quad y = \frac{13,5}{x^2}$$

Llevamos este valor a la función $V \quad \rightarrow \quad V = d\left(x^2 + 4 \cdot x \cdot y\right) = d\left(x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{13,5}{x^2}\right) = d\left(x^2 + \frac{54}{x}\right)$

El dominio de esta función es $Dom(V) = \mathbb{R} - \{0\}$. Solo tienen sentido físico distancias positivas, por lo que exigiremos valores positivos de la variable x .

El gasto mínimo de chapa se produce para aquel valor de la variable que minimiza la función $V(x)$. Por lo tanto, deberemos derivarla, igualarla a cero para obtener los puntos críticos, y demostrar que punto crítico es un mínimo relativo.

$V = d\left(x^2 + \frac{54}{x}\right) \quad \rightarrow \quad d$ es una constante $\rightarrow \quad V' = d\left(2x - \frac{54}{x^2}\right) \quad \rightarrow \quad V' = d\left(\frac{2x^3 - 54}{x^2}\right)$

$$V' = 0 \quad \rightarrow \quad d\left(\frac{2x^3 - 54}{x^2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2x^3 - 54}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^3 - 54 = 0 \quad \rightarrow \quad x^3 = 27 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

Vamos a determinar si el punto crítico $x=3$ es un mínimo relativo. Para ello evaluamos el signo de la primera derivada en los siguientes intervalos.

$(0,3) \rightarrow V'(1)<0 \rightarrow V(x)$ estrictamente decreciente

$(3,+\infty) \rightarrow V'(10)>0 \rightarrow V(x)$ estrictamente creciente

Por lo tanto, en $x=3$ encontramos un mínimo relativo.

Si $x=3 \rightarrow y=\frac{13,5}{x^2}=\frac{13,5}{9}=\frac{3}{2}$

Las dimensiones solicitadas son: una base cuadrado de lado $x=3$ m y paredes verticales de base $x=3$ m y altura $y=\frac{3}{2}$ m .

El volumen de chapa mínimo es igual a $V(3)=d(3^2+\frac{54}{3})=27\cdot d$ m^3 , que lógicamente resulta en función del grosor desconocido d .

5. Obtener las dimensiones del rectángulo inscrito en la circunferencia de radio unidad y centrada en el origen de coordenadas, con mayor área posible. Obtener el valor de dicha área máxima.

Para resolver los problemas de optimización puede ser útil seguir el **siguiente esquema de trabajo**:

1. Hacer un dibujo ilustrativo (si es posible).

2. Indicar claramente cuál es la magnitud que debemos optimizar (perímetro, área, volumen, distancia, coste económico, tiempo, etc.). Para este tipo de problemas es bueno tener claro las fórmulas del perímetro, área y volumen de las siguientes figuras geométricas: **triángulo, rectángulo, circunferencia, círculo, esfera, cilindro, cono y paralelepípedo**.

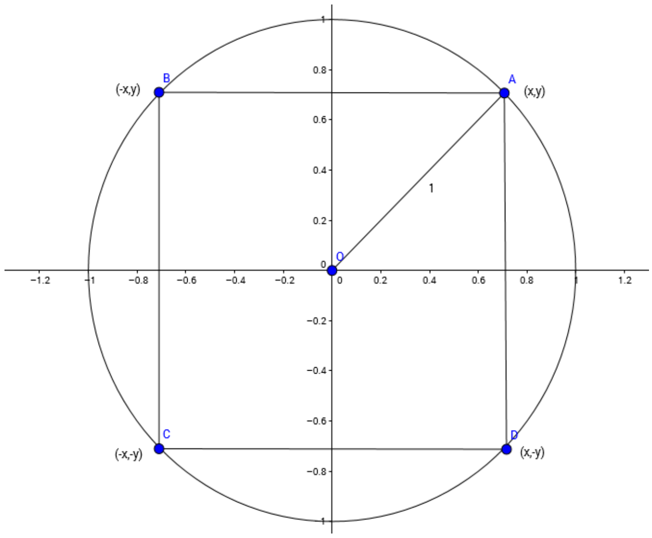
3. Escribir la ecuación de la función a optimizar. Si esta función depende de varias variables, usar los datos del enunciado para dejar la función dependiente de una única variable.

4. Imponer la condición necesaria de extremo relativo: primera derivada igual a cero. Los puntos que cumplan esa igualdad serán los puntos críticos, candidatos a extremos relativos.

5. Demostrar si estamos ante un máximo o mínimo relativo. Tenemos dos formas de demostrarlo. Evaluando el signo de la primera derivada a ambos lados del punto crítico (y comprobando que cambia de signo), o bien evaluando el punto crítico en la segunda derivada (si la segunda derivada es positiva, estaremos ante un mínimo; si la segunda derivada es negativa, estaremos ante un máximo). En el primer método, al evaluar a ambos lados de los puntos críticos, debemos estar atentos a los puntos donde la función a optimizar no está definida.

6. Si el enunciado nos pide obtener la imagen del punto crítico, debemos obtener el valor del punto crítico en la función de partida.

En nuestro problema podemos representar la siguiente gráfica. El rectángulo inscrito tiene un vértice en cada uno de los cuadrantes, siendo (x, y) las coordenadas del vértice del primer cuadrante.



El área del rectángulo es la magnitud a maximizar, siendo su fórmula:

$$A = base \cdot altura = 2x \cdot 2y = 4xy$$

Esta función depende de dos variables. Vamos a relacionarlas con la ecuación de la circunferencia de radio unidad centrada en el origen.

$$x^2+y^2=1 \quad \rightarrow \quad y=\sqrt{1-x^2}$$

Por lo que el área queda como una función dependiente de una única variable.

$$A=4x\cdot\sqrt{1-x^2}=4\sqrt{x^2-x^4}$$

El dominio de la función área resulta → $D(A)=[-1,1]$

Derivamos e igualamos a cero, por ser la condición necesaria de extremo relativo.

$$A'=4\cdot\frac{2x-4x^3}{2\sqrt{x^2-x^4}}=4\cdot\frac{x-2x^3}{\sqrt{x^2-x^4}}$$

$$A'=0 \quad \rightarrow \quad x-2x^3=0 \quad \rightarrow \quad x(1-2x^2)=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Al ser (x,y) un punto del primer cuadrante, debemos tomar como punto crítico a máximo relativo el valor positivo $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Evaluamos la primera derivada a izquierda y derecha de $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, sin olvidar el punto crítico $x=0$ y el valor que marca el final del dominio de definición $x=1$.

$$si \;\; 0<x<\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad x=0{,}1 \quad \rightarrow \quad A'(0{,}1)>0$$

$$si \;\; \frac{\sqrt{2}}{2}<x<1 \quad \rightarrow \quad x=0{,}9 \quad \rightarrow \quad A'(0{,}1)<0$$

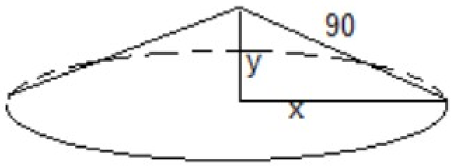
La derivada cambia de signo → $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ es un máximo relativo.

Por lo tanto el rectángulo resultante es de base $2x=\sqrt{2}\;\; u$ y de altura $2y=\sqrt{2}\;\; u$. El área máxima resulta $A_{máx}=2\;\; u^2$

6. Sea un triángulo rectángulo de hipotenusa $90\,cm$. Haciéndolo girar alrededor de uno de sus catetos genera un cono. Obtener las dimensiones de los catetos para que el volumen del cono engendrado sea máximo. Ayuda: volumen de un cono $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

La función a maximizar es el volumen. Depende de dos variables, el radio y la altura, por lo que buscaremos una relación entre ambas variables.

Imagen tomada de http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/



Según el dibujo la altura del cono coincide con el cateto de longitud y . El radio de la base coincide con el cateto de longitud x . Por lo que el volumen resulta:

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Por Pitágoras → $90^2=x^2+y^2 \rightarrow x^2=8100-y^2 \rightarrow V=\frac{1}{3}\pi(8100-y^2)y=\frac{1}{3}\pi(8100y-y^3)$

Ya tenemos la función a optimizar dependiendo de una sola variable. Derivamos e igualamos a cero para aplicar la condición necesaria de extremo relativo.

$$V'=\frac{1}{3}\pi(8100-3y^2) \quad , \quad V'=0 \rightarrow 8100-3y^2=0 \rightarrow y^2=2700 \rightarrow y=\pm 30\sqrt{3}$$

Donde tomaremos la solución positiva ya que las distancias tienen sentido físico positivas.

Para demostrar si estamos ante un máximo de la función volumen, evaluamos el punto crítico en la segunda derivada.

$V''=\frac{1}{3}\pi(-6y)=-2\pi y \rightarrow V''(30\sqrt{3})<0 \rightarrow y=30\sqrt{3}$ es un máximo relativo

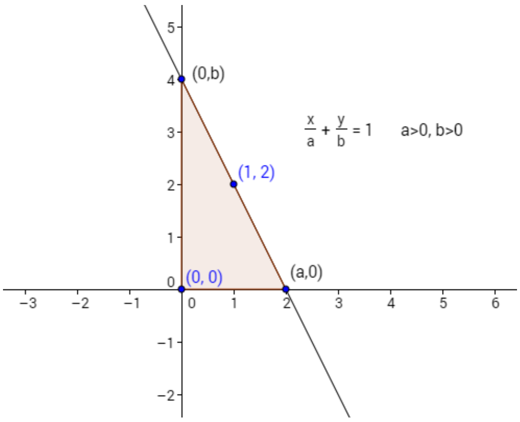
Dimensiones de los catetos: $y=30\sqrt{3}\ cm \rightarrow x=30\sqrt{6}\ cm$

7. Encontrar, de entre todas las rectas que pasan por el punto $(1,2)$, aquella que forma con la partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima. Obtener dicha área mínima.

La **ecuación canónica de la recta** nos permite expresar la recta a partir de los **puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas**.

$$r: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \rightarrow \quad (a,0),(0,b)\in r$$

Con $a>0, b>0$ para nuestro problema, ya que la recta pasa por el punto $(1,2)$ y corta a los semiejes positivos de coordenadas formando un triángulo. Por lo que la pendiente de la recta será negativa (ver imagen).



El área del triángulo rectángulo formado por la recta y los ejes cartesianos es:

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$$

Y esta es la función que debemos optimizar para buscar su máximo relativo.

La función depende de dos variables. ¿Cómo podemos relacionar ambas variables, para dejar A en función de una sola variable?

Con ayuda de la ecuación de la recta, que pasa por el punto $(1,2)$.

$$r: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad , \quad (1,2)\in r \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}=1-\frac{2}{b} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}=\frac{b-2}{b} \quad \rightarrow \quad a=\frac{b}{b-2}$$

Llevamos esta relación a la ecuación del área del triángulo.

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b \quad\rightarrow\quad A=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{b-2}\cdot b \quad\rightarrow\quad A=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{b-2}$$

El dominio de la función área es $Dom(A)=\mathbb{R}-\{2\}$. Y según la condiciones de nuestro enunciado, solo tienen sentido valores positivos de b , ya que la recta solo corta al eje OY en su semieje positivo.

Derivamos e igualamos a cero la función, como condición necesaria de extremo relativo.

$$A'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b(b-2)-b^2}{(b-2)^2} \quad\rightarrow\quad A'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2-4b-b^2}{(b-2)^2} \quad\rightarrow\quad A'=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-4b}{(b-2)^2}$$

$$A'=0 \quad\rightarrow\quad b^2-4b=0 \quad\rightarrow\quad b=0 \quad , \quad b=4$$

Tenemos dos puntos candidatos a extremos relativos. Vamos a evaluar la derivada en los siguientes intervalos, para decidir si son máximos o mínimos.

$$(-\infty,0) \quad\rightarrow\quad A'(-10)>0$$
$$(0,2) \quad\rightarrow\quad A'(1)<0$$
$$(2,4) \quad\rightarrow\quad A'(3)<0$$
$$(4,+\infty) \quad\rightarrow\quad A'(5)>0$$

En $b=0$ la función presenta un máximo relativo (aunque este valor no lo contemplamos realmente, según las condiciones de nuestro enunciado), y en $b=4$ aparece un mínimo relativo (que también es absoluto si nos cernimos a valores positivos de b , que son lo que tienen sentido en nuestro problema).

Por lo tanto, si $b=4 \quad\rightarrow\quad a=2 \quad\rightarrow\quad A=4 \;\; u^2$

La ecuación de la recta resulta:

$$r:\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \quad\rightarrow\quad r:y=-2x+4$$

8. Sea un cono de $120\,cm^3$ de volumen, de altura h, radio de la base x y arista a.

a) Comprobar que $a^2=\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h}+h^2$

b) Calcular la altura del cono que tiene la arista de longitud mínima.

a) Aplicando Pitágoras:

$$a^2=x^2+h^2$$

Comparando con la expresión a demostrar, debemos concluir que $x^2=\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h}$

Para ello usamos el dato del volumen, que coincide con un tercio del volumen del cilindro recto de misma base y misma altura que el cono.

$120=\frac{1}{3}\pi x^2 h$ → Despejamos → $x^2=\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h}$ → c.q.d.

b) Debemos optimizar la arista → $a=\sqrt{\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h}+h^2}=\sqrt{\frac{360+\pi h^3}{\pi h}}$ → $a'=0$

$$a'=\frac{\frac{(3\pi h^2)(\pi h)-(360+\pi h^3)\pi}{(\pi h)^2}}{2\sqrt{\frac{360+\pi h^3}{\pi h}}} \rightarrow 3\pi^2 h^3-360\pi-\pi^2 h^3=0 \rightarrow 2\pi^2 h^3-360\pi=0 \rightarrow$$

$2\pi(\pi h^3-180)=0 \rightarrow h=\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}$ → punto crítico

Aplicamos la condición suficiente de evaluar el signo de la derivada a izquierda y derecha del punto crítico.

Como la altura h es una distancia, no tiene sentido valores negativos. Y viendo la forma dela función arista $a=\sqrt{\frac{360+\pi h^3}{\pi h}}$, tampoco podemos dividir por una altura igual a 0.

Por lo tanto, evaluamos la derivada en los siguientes intervalos.

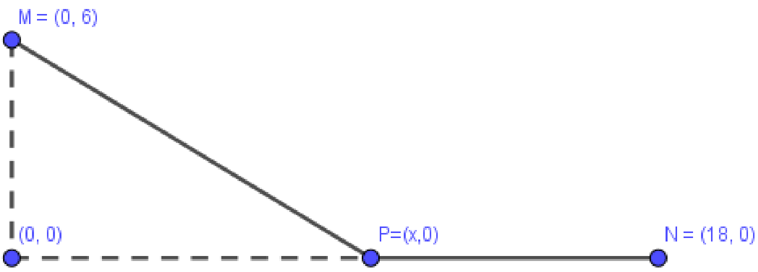
$(0,\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}) \rightarrow h=1 \rightarrow a'(1)<0$ → función arista decreciente

$(\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}},+\infty) \rightarrow h=10 \rightarrow a'(10)>0$ → función arista creciente

En $h=\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}$ tenemos un mínimo relativo de la función arista.

9. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m de anchura, conel punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N.

Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que M=(0, 6), P=(x, 0) y N=(18, 0).



El cable MP tiene que ser más grueso, debido a que cruza la calla sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10€/m. El precio del cable PN es de 5€/m.

a) Obtener el coste C de los dos cables en función de la abscisa x **, del puento P, cuando** $0 \leq x \leq 18$ **.**

b) Obtener el valor de x **, con** $0 \leq x \leq 18$ **, para que el coste total C sea mínimo.**

c) Calcular dicho coste mínimo.

a) La función coste resulta de multiplicar la longitud de cada cable por el precio que cuesta cada metro.

$$(\overline{MP})^2 = x^2 + 36 \rightarrow \overline{MP} = \sqrt{x^2+36}$$

$$\overline{PN} = 18 - x$$

$$C = 10\sqrt{x^2+36} + 5(18-x)$$

b) Minimizamos la función coste derivando e igualando a cero.

$$C' = 10\frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}} - 5 = \frac{10x - 5\sqrt{x^2+36}}{\sqrt{x^2+36}} \rightarrow C' = 0 \rightarrow 10x - 5\sqrt{x^2+36} = 0 \rightarrow$$

$10x = 5\sqrt{x^2+36} \rightarrow 4x^2 = x^2 + 36 \rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$ → solo tiene sentido físico el valor positivo.

Como la función coste está definida en el intervalo $0 \leq x \leq 18$, evaluamos la derivada en los intervalos:

$(0, 2\sqrt{3}) \rightarrow x = 1 \rightarrow C'(1) < 0$ → función estrictamente decreciente.

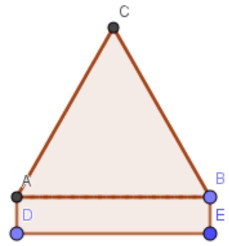
$(2\sqrt{3}, 18) \rightarrow x = 10 \rightarrow C'(10) > 0$ → función estrictamente creciente.

El valor $x = +2\sqrt{3}$ minimiza la función coste.

c) El valor del coste mínimo es la imagen del mínimo relativo en la función.

$$C = 10\sqrt{x^2+36} + 5(18-x) \rightarrow C(2\sqrt{3}) = 141{,}96\,€$$

10. Tenemos que diseñar una ventana como la de la figura. Es decir, el polígono ACBED, de 30 m de perímetro exterior. Es un rectángulo con un triángulo equilátero en su parte superior. Calcula las dimensiones del rectángulo para que el área de la ventana sea máxima.



Llamamos x a la longitud de cada lado del triángulo equilátero.

Llamamos h a la altura del triángulo.

Llamamos y a la altura del rectángulo.

Así, el área será la suma del área del triángulo y el área del rectángulo.

$A=\frac{1}{2}x\,h+x\,y$ → función a maximizar

Por Pitágoras, se cumple → $x^2=h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

Del perímetro exterior de la ventana sacamos la relación → $30=3x+2y \rightarrow y=15-\frac{3}{2}x$

Sustituimos estas dos expresiones en la función a maximizar:

$$A=\frac{1}{2}x\,h+x\,y \rightarrow A=\frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2}x+x\left(15-\frac{3}{2}x\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+15x-\frac{3}{2}x^2=\frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2+15x$$

Derivamos a igualamos a cero.

$$A'=\frac{\sqrt{3}-6}{2}x+15 \rightarrow A'=0 \rightarrow x=\frac{-30}{\sqrt{3}-6}\simeq 7{,}03\,m$$

Aplicamos condición suficiente de segunda derivada:

$A''=\frac{\sqrt{3}-6}{2}$ → función siempre negativa → $x\simeq 7{,}03\ m$ es un máximo relativo de la función área.

Y la altura del rectángulo resulta → $y=15-\frac{3}{2}x \rightarrow y=4{,}46\,m$

11. La producción mensual de una fábrica de bombillas viene dada por $P=2LK^2$ (en millones de unidades). Donde L es el coste de la mano de obra y K es el coste del equipamiento (en millones de euros).

La fábrica pretende producir 8 millones de unidades al mes. ¿Qué valores de L y K minimizarían el coste total L+K?

Si se desean fabricar 8 millones de bombillas → $8=2LK^2 \rightarrow 4=LK^2 \rightarrow L=\frac{4}{K^2}$

Buscamos optimizar L + K → $f=L+K$ → sustituyendo → $f=\frac{4}{K^2}+K \rightarrow f=\frac{4+K^3}{K^2}$

Esta es la función de una variable a optimizar.

$$f'=0 \rightarrow f'=\frac{3K^2K^2-(4+K^3)2K}{K^4}=\frac{3K^3-(4+K^3)2}{K^3}=\frac{K^3-8}{K^3} \rightarrow K^3-8=0$$

$K=2$ → punto crítico.

Evaluamos la primera derivada a la izquierda y derecha del punto crítico, sabiendo que la función original $f=\frac{4+K^3}{K^2}$ es continua en toda la recta real menos en $K=0$, y que no tiene sentido un valor negativo de K . Por lo tanto, evaluamos en:

$(0,2) \rightarrow K=1 \rightarrow f'(1)<0$ → función estrictamente decreciente.

$(2,+\infty) \rightarrow K=10 \rightarrow f'(10)>0$ → función estrictamente creciente.

$K=2$ es un mínimo relativo de la función coste → $L=\frac{4}{K^2} \rightarrow L=1$

Para minimizar costes se necesitan 2 millones de euro en equipamiento y 1 millón de euros en mano de obra.

12. Sea $f(x)=1-\frac{1}{4}x^2$ y $C(m,n)$ un punto perteneciente a la gráfica en el primer cuadrante. Determinar los valores (m,n) para que el área del triángulo rectángulo CDE sea máxima.

El área del triángulo será un medio de base por altura:

$$A=\frac{1}{2}m\cdot n$$

Donde la base coincide con la coordenada m y la altura con la coordenada n .

Relacionamos ambas variables con el dato de que el punto $C(m,n)$ pertenece a la gráfica.

Si $x=m \rightarrow f(m)=n \rightarrow 1-\frac{1}{4}m^2=n$

Sustituimos este valor en la fórmula del área.

$$A=\frac{1}{2}m\cdot(1-\frac{1}{4}m^2)=\frac{1}{2}m-\frac{1}{8}m^3$$

Esta es la función, de una variable, a optimizar.

La condición necesaria de extremos relativo es primera derivada igual a cero.

$$A'=0 \rightarrow A'=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}m^2 \rightarrow \frac{1}{2}-\frac{3}{8}m^2=0 \rightarrow m=\frac{\pm 2\sqrt{3}}{3}$$

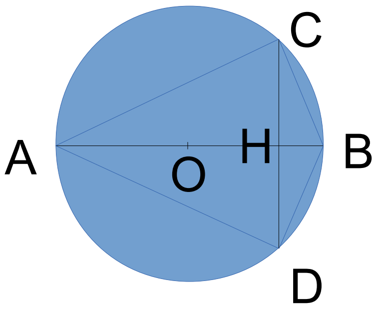
Nos quedamos con el valor positivo porque el punto $C(m,n)$ pertenece al primer cuadrante.

Aplicamos condición suficiente dela segunda derivada para comprobar que le punto es un máximo relativo.

$$A''=\frac{-3}{4}m \rightarrow A''(2\frac{\sqrt{3}}{3})<0 \rightarrow m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$ es un máximo relativo.

Las coordenadas del punto son $C(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3})$

13. En una circunferencia de centro O y radio $10\,cm$, se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar la cuerda CD para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC y BCD sea máxima? (ver imagen)



El área del triángulo ACD es dos veces el área del triángulo rectángulo ACH.

$$A_{ACD}=2\,A_{ACH}$$

El área del triángulo BCD es dos veces el área del triángulo rectángulo BCH.

$$A_{BCD}=2\,A_{BCH}$$

La diferencia de áreas resulta:

$$D=A_{ACD}-A_{BCD}=2\,A_{ACH}-2\,A_{BCH}$$

La distancia $\overline{OH}$ la llamamos x . Y la distancia $\overline{CH}$ la llamaremos y .

Por lo tanto, la distancia $\overline{BH}$ será $10-x$. Y la distancia $\overline{AH}=10+x$.

Con esto, podemos calcular las áreas.

$$A_{ACH}=\frac{1}{2}\cdot base\cdot altura=\frac{1}{2}\cdot(10+x)\cdot y$$

$$A_{BCH}=\frac{1}{2}\cdot base\cdot altura=\frac{1}{2}\cdot(10-x)\cdot y$$

$$D=2\,A_{ACH}-2\,A_{BCH}=(10+x)\,y-(10-x)\,y \;\rightarrow\; D=2\,x\,y$$

Ya tenemos la función a optimizar. Pero depende de dos variables. Debemos buscar una relación entre ambas variables para poder derivar, igualar a cero y obtener el máximo relativo.

Viendo el dibujo podemos aplicar Pitágoras al triángulo rectángulo OCH, donde la hipotenusa será igual al radio de la circunferencia. Y los catetos son los valores x e y respectivamente.

Pitágoras en triángulo OCH → $100=x^2+y^2 \;\rightarrow\; y=\sqrt{100-x^2}$

Llevamos esta relación a la función $D=2\,x\,y$ que mide al diferencia de áreas.

$$D=2\,x\sqrt{100-x^2}=2\sqrt{100\,x^2-x^4}$$

El dominio de la función es $[-10,10]$. Físicamente solo tienen sentido distancias no negativas, es decir, $[0,10]$.

Derivamos e igualamos a cero.

$$D'=2\frac{200x-4x^3}{2\sqrt{100x^2-x^4}}=2\frac{100x-2x^3}{\sqrt{100x^2-x^4}}=4\frac{50x-x^3}{\sqrt{100x^2-x^4}}$$

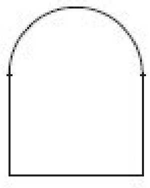
$$D'=0 \;\rightarrow\; 50x-x^3=0 \;\rightarrow\; x(50-x^2)=0 \;\rightarrow\; x=0 \;,\; x=+\sqrt{50}=+5\sqrt{2}\simeq 7{,}07 \;\; u$$

En $x=0$ el área de los triángulo es la misma, por lo que la diferencia es nula y por eso la derivada se hace también 0. Este valor no tiene sentido físico para nuestro problema.

Debemos demostrar que el punto crítico $x=+5\sqrt{2}$ es ciertamente un máximo relativo. Para ello evaluamos la derivada a la izquierda y a la derecha del punto crítico, dentro del dominio con sentido físico $(0,10)$.

$D'(1)>0$, $D'(9)<0$ $\rightarrow$ $x=+5\sqrt{2}$ es un máximo relativo y es la distancia respecto al centro de la circunferencia que maximiza la diferencia de áreas de los triángulos.

14. Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo, como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados. Si es posible, determina la base x para que el perímetro sea mínimo. La altura de la parte rectangular es h .



Sea la base $x=2r$, ya que coincide con el diámetro del semicírculo.

Con esto, el perímetro de la puerta será:

$$P=2r+2h+\frac{2\pi r}{2}=2r+2h+\pi r \quad \rightarrow \quad P=(2+\pi)r+2h$$

Esta función perímetro depende de dos variables, que relacionamos con el dato del área de la puerta.

$$16=\acute{A}rea_{rectángulo}+\acute{A}rea_{semicírculo}=2rh+\frac{\pi r^2}{2} \quad \rightarrow \quad h=\frac{32-\pi r^2}{4r}$$

Sustituimos esta relación en el perímetro.

$$P=(2+\pi)r+2\frac{32-\pi r^2}{4r}=(2+\pi)r+\frac{32-\pi r^2}{2r}=(2+\pi)r+\frac{16}{r}-\frac{\pi}{2}r=\frac{4+\pi}{2}r+\frac{16}{r}$$

Y ya tenemos la función de una sola variable a optimizar.

Aplicamos la condición necesaria de extremo relativo: primera derivada nula.

$$P'=\frac{4+\pi}{2}-\frac{16}{r^2} \quad , \quad P'=0 \quad \rightarrow \quad \frac{4+\pi}{2}-\frac{16}{r^2}=0 \quad \rightarrow \quad r=\pm\sqrt{\frac{32}{4+\pi}}=\pm 4\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}$$

El extremo que buscamos tiene sentido si es positivo, por tratarse el radio de una distancia. Por lo tanto comprobamos si $r=4\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}$ cumple alguna condición suficiente de mínimo de la función perímetro. Para ello evaluamos la segunda derivada en este valor crítico.

$$P''=\frac{32}{r^3} \quad \rightarrow \quad P''\left(r=4\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}\right)>0 \quad \rightarrow \quad r=4\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}$$ minimiza la función perímetro.

Como $x=2r \quad \rightarrow \quad r=8\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}\simeq 4{,}23\,m$

15. Dos objetos A y B se mueven en el plano de dos dimensiones. El objeto A parte del punto (0,0) y el objeto B parte del punto (250,0). Las unidades de las coordenadas se miden en kilómetros.

El objeto A se mueve verticalmente por el eje OY desde su punto de inicio hasta el punto (0, 375/2), con velocidad de 30 km/h. Simultáneamente, el objeto B se desplaza por el eje OX desde su punto de inicio hasta el origen de coordenadas, con velocidad de 40 km/h.

a) Obtener la distancia $f(t)$ entre los objetos A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse. Ayuda: la velocidad se calcula como espacio dividido por el tiempo.

b) Obtener los valores del tiempo para los que la distancia entre los objetos A y B sea máxima y mínima durante el movimiento. Calcular también dichas distancias máximas y mínimas.

a) El espacio recorrido por cada objeto será igual a la velocidad por el tiempo del desplazamiento.

La posición de A vendrá dada por $A(0{,}30\cdot t)$, ya que se mueve verticalmente en sentido ascendente por el eje OY, partiendo del origen, con una velocidad de 30 km/h. La variable tiempo t viene dada en horas.

El tiempo que dura el movimiento de A será $\frac{375/2}{30}=6{,}25\,horas$, resultante de dividir la distancia vertical total que recorre entre su velocidad.

La posición de B será $A(250-40\cdot t{,}0)$, ya que se acerca al origen desde la posición inicial (250,0), con una velocidad de 40 km/h.

El tiempo que dura el movimiento de B será $\frac{250}{40}=6{,}25\,horas$, resultante nuevamente de dividir la distancia horizontal total recorrida entre su velocidad.

Por lo tanto, tenemos un movimiento en el intervalo en horas $[0,\ 6{,}25]$. La distancia entre ambos objetos será el módulo del vector que une sus posiciones.

$$\vec{AB}=(250-40t,-30t) \quad\rightarrow\quad d(A,B)=|\vec{AB}|=\sqrt{(250-40t)^2+(-30t)^2}$$

La función distancia depende de la variable tiempo, por lo que podemos escribirla como:

$$f(t)=\sqrt{62500+1600t^2-20000t+900t^2}=\sqrt{2500t^2-20000t+62.500}$$

Como hemos razonado anteriormente, el movimiento se produce en el intervalo temporal $[0,\ 6{,}25]$.

b) Ojo, este apartado no solo preguntan por extremos relativos. Nos dicen valores máximos y mínimos dentro de un intervalo concreto $[0,\ 6{,}25]$. Por lo tanto, tendremos que obtener los extremos absolutos para saber en qué tiempo se obtiene la imagen de la función más grande y más pequeña.

Primero, sacamos candidatos a extremos relativos con la primera derivada.

$$f(t)=\sqrt{2500t^2-20000t+62.500} \quad\rightarrow\quad f'=\frac{5000t-20000}{2\sqrt{2500t^2-20000t+62.500}} \quad\rightarrow\quad f'=0$$

El punto crítico resulta → $t=\frac{20000}{5000}=4\,horas$

Para obtener el dominio de la función $f(t)=\sqrt{2500t^2-20000t+62.500}$, debemos exigir que el discriminante sea mayor o igual a cero.

$2500t^2-20000t+62500\geq 0$ → $25t^2-200t+625\geq 0$ → El polinomio de grado dos del discriminante no tiene solución real, por lo podemos saber el signo del discriminante evaluándolo en un punto cualquiera de la recta real → $t=0$ → $0-0+625\geq 0$ → El dominio de la función $f(t)$ es toda la recta real.

Por lo tanto, para saber si $t=4$ es un máximo o un mínimo relativo, evaluamos la primera derivada en un valor a la izquierda de 4 y en otro valor a la derecha de 4. Recuerda que el caso físico que estamos estudiando se produce únicamente en el intervalo $[0,\ 6{,}25]$.

De esta forma, $t=4$ resulta un mínimo relativo.

Para determinar extremos absolutos, obtenemos las imágenes.

Si $t=0$ → $f(0)=250\,km$ → Máximo absoluto

Si $t=4$ → $f(4)=150\,km$ → Mínimo relativo y absoluto

Si $t=6{,}25$ → $f(6{,}25)=187{,}5\,km$

16. De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=4-\frac{x^2}{3}$ **y** $g(x)=\frac{x^2}{6}-2$ **.**

El