5 APPROFONDIR Fonctions continues à dérivées discontinues

Les parties I, II, III, IV peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

I. Une fonction connue : la valeur absolue

1. On note f la fonction « valeur absolue ». La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

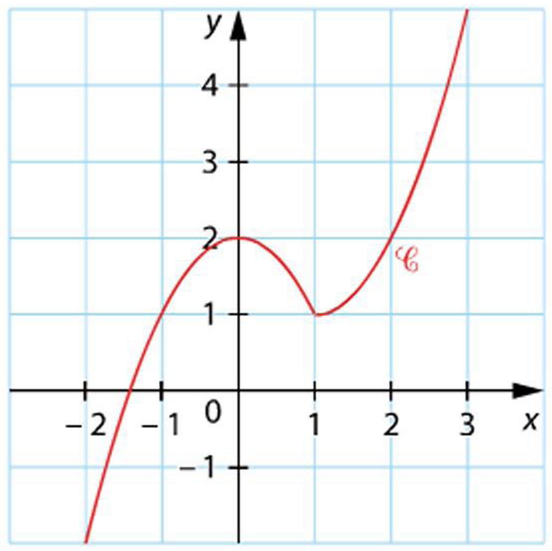
2. Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue et en déduire $f'(x)$ pour $x \neq 0$ (on distinguera deux cas).

3. Tracer la courbe représentant la fonction dérivée f' de f. La fonction f' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

II. Interprétation en termes de limite

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{pour } x \leqslant 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$ et sa courbe $\mathscr{C}$ représentative.



1. La fonction h semble-t-elle continue sur $\mathbb{R}$? dérivable sur $\mathbb{R}$?

2. Soit A(1 ; 1) et le point M(x ; $h(x)$) un point de $\mathscr{C}$ autre que A.

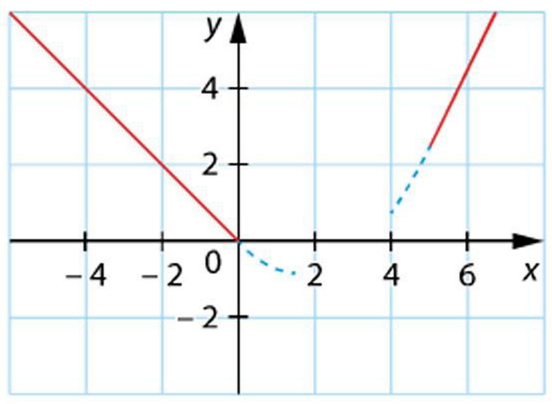
a. Écrire, en distinguant les cas $x < 1$ et $x > 1$, le coefficient directeur $m(x)$ de la droite (AM) en fonction de x.

b. Quelle est la limite de $m(x)$ quand x tend vers 1 en restant inférieur à 1 ? quand x tend vers 1 en restant supérieur à 1 ?

c. Interpréter graphiquement les deux limites obtenues pour la courbe $\mathscr{C}$ au point A. Tracer les « demi-tangentes » à $\mathscr{C}$ en A.

Bilan On dit que h est dérivable à gauche en 1, de nombre dérivé à gauche $h'_g(1) = -2$ et dérivable à droite en 1, de nombre dérivé à droite $h'_d(1) = 0$. Ces nombres dérivés sont différents, la fonction h n'est pas dérivable en 1. La courbe $\mathscr{C}$ admet en A deux demi-tangentes, mais pas de tangente.

III. Un problème de raccord



On souhaite raccorder deux tuyaux droits, par un coude de forme parabolique sans brusque changement de direction selon le graphique ci-contre. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{pour } x \leqslant 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{pour } 0 < x < 5 \\ 2x - 7{,}5 & \text{pour } x \geqslant 5 \end{cases}$$ où a, b et c sont des réels,

et on cherche a, b et c pour que g soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Expérimenter à l'aide d'un logiciel de géométrie (a, b, c variables).

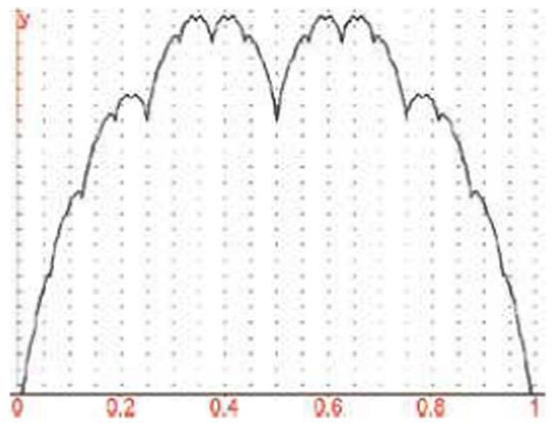
2. Déterminer a, b et c.

IV. *Pour aller plus loin* TP disponible sur le site pour construire une fonction continue avec autant de problèmes de dérivabilité que l'on souhaite…



Point histoire

Karl Weierstrass donna pour la première fois en 1871, une fonction dont il démontra qu'elle était continue mais dérivable nulle part.
Auparavant on avait « prouvé » que toute fonction continue était dérivable sauf peut être en quelques points exceptionnels !
Ces « démonstrations » fautives reposaient sur l'intuition graphique, fausse, du fait que la courbe d'une fonction continue ne pouvait présenter des problèmes de tangente qu'en quelques points.



Courbe du « blanc-manger »