

Problemas – Tema 4

CCSS Problemas resueltos - 4 - resolver ecuaciones matriciales

1. Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación $A \cdot X = B$

Estos problemas de ecuación matriciales se pueden resolver de dos formas:

- Colocando incógnitas en los elementos de $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, operar y resolver el sistema resultante.
- Aplicar matriz inversa y despejar X , de la forma: $X = A^{-1}B$ (en capítulos posteriores del tema aprenderemos a obtener la matriz inversa)

La primera opción es práctica para matrices 2×2 ya que resulta un sistema 4×4 que no suele ser difícil de resolver. Pero para matrices 3×3 es poco práctico porque genera un sistema 9×9 largo de resolver.

La segunda opción se puede aplicar siempre que exista la inversa A^{-1} . Si esta inversa existe, la solución de X será única y podremos aplicar este método. Si no existe A^{-1} la solución de X no será única y solo podremos resolverla con la primera opción, dando incógnitas a los elementos de X .

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \quad A \cdot X = B \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ x+2z & y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Igualamos cada coeficiente de las matrices, y obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$\begin{cases} 2x+3z=3 \\ 2y+3t=1 \\ x+2z=2 \\ y+2t=-5 \end{cases} \rightarrow \text{De la tercera } x=2-2z \rightarrow \begin{cases} 2(2-2z)+3z=3 \\ 2y+3t=1 \\ y+2t=-5 \end{cases} \rightarrow \text{De la primera } z=1$$

$$\begin{cases} 2y+3t=1 \\ y+2t=-5 \end{cases} \rightarrow \text{De la segunda } y=-5-2t \rightarrow \text{En la primera } 2(-5-2t)+3t=1 \rightarrow t=-11$$

La solución general es: $x=0, y=17, z=1, t=-11 \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$

2. Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **resolver la ecuación** $X \cdot A + B = C$

Llamamos $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ y operamos.

$$X A = C - B \rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+y & x+2y \\ z+t & z+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Igualamos componentes y formamos un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x+2y=1 \\ z+t=1 \\ z+2t=-2 \end{cases} \rightarrow \text{De la tercera } z=1-t \rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x+2y=1 \\ 1-t+2t=-2 \end{cases} \rightarrow \text{De la tercera } t=-3$$

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x+2y=1 \end{cases} \rightarrow \text{Restamos ambas ecuaciones } -y=-2 \rightarrow y=2 \rightarrow \text{En la primera } x=-3$$

La matriz solución resulta $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

3. Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **resolver las ecuaciones:**

- a) $X \cdot A = B + I$
- b) $A X + B X = C$
- c) $X A B - X C = 2 C$

a) $X \cdot A = B + I \rightarrow$ si existe $A^{-1} \rightarrow X = (B + I) A^{-1}$ (fíjate que la inversa se aplica por la derecha)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ sus vectores no son proporcionales porque $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} \rightarrow$ rango 2 $\rightarrow$ existe A^{-1}

$$A A^{-1} = I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ 3a+4c=0 \\ 3b+4d=1 \end{cases} \rightarrow \text{De la primera } a=1-c \rightarrow \begin{cases} b+d=0 \\ 3(1-c)+4c=0 \\ 3b+4d=1 \end{cases} \rightarrow \text{De la segunda } c=-3 \rightarrow$$

$$\begin{cases} b+d=0 \\ 3b+4d=1 \end{cases} \rightarrow \text{De la primera } b=-d \rightarrow \text{En la segunda } -3d+4d=1 \rightarrow d=1$$

La matriz inversa resulta $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = (B + I) A^{-1} \rightarrow X = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 12-3 & -3+1 \\ 4-6 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A X + B X = C \rightarrow$ Sacamos factor común por la derecha $\rightarrow (A + B) X = C \rightarrow X = (A + B)^{-1} C$

Fíjate que aplicamos inversa por la izquierda.

Podremos resolver de esta forma si existe la inversa $(A + B)^{-1}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$(A + B)$ Admite inversa porque el rango es 2 al tener dos vectores independientes $\rightarrow \frac{3}{4} \neq \frac{2}{5}$

$$(A+B)(A+B)^{-1}=I \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 4a+5c & 4b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a+2c=1 \\ 3b+2d=0 \\ 4a+5c=0 \\ 4b+5d=1 \end{cases} \rightarrow \text{De la tercera } a = \frac{-5}{4}c \rightarrow \begin{cases} 3\left(\frac{-5}{4}c\right)+2c=1 \\ 3b+2d=0 \\ 4b+5d=1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{De la primera } \frac{-15}{4}c+2c=1 \rightarrow c = \frac{-4}{7} \rightarrow \begin{cases} 3b+2d=0 \\ 4b+5d=1 \end{cases} \rightarrow \text{De la primera } b = \frac{-2}{3}d$$

$$\rightarrow 4\left(\frac{-2}{3}d\right)+5d=1 \rightarrow \frac{-8}{3}d+5d=1 \rightarrow d = \frac{3}{7}$$

La matriz inversa resulta $(A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

$$X = (A+B)^{-1}C = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}-\frac{2}{7} & \frac{10}{7}-\frac{6}{7} \\ \frac{-4}{7}+\frac{9}{7} & \frac{-8}{7}+\frac{9}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

c) $XAB - XC = 2C \rightarrow$ Sacamos factor común por la izquierda $\rightarrow X(AB - C) = 2C$

$X = 2C(AB - C)^{-1} \rightarrow$ Podremos resolver de esta forma si existe la inversa $(AB - C)^{-1}$

Fíjate que en esta ocasión hemos aplicado inversa por la derecha.

$$AB - C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+1 \\ 6+4 & 3+4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz $AB - C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ admite inversa, ya que el rango es dos por ser sus vectores linealmente

independientes, ya que no son proporcionales $\rightarrow \frac{2}{9} \neq \frac{0}{4}$. Calculemos su inversa.

$$(A B - C)(A B - C)^{-1} = I \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a=1 \\ 2b=0 \\ 9a+4c=0 \\ 9b+4d=1 \end{cases} \rightarrow a=\frac{1}{2}, b=0$$

$$\begin{cases} \frac{9}{2}+4c=0 \\ 4d=1 \end{cases} \rightarrow c=\frac{-9}{8}, d=\frac{1}{4}$$

La matriz inversa resulta $\rightarrow (A B - C)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-9}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

La matriz solución resulta $\rightarrow X = 2C(A B - C)^{-1} \rightarrow X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-9}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$X = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{9}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{27}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{-7}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-23}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{2} & 1 \\ \frac{-23}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

4. Determina la matriz X que satisface la ecuación

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Suponemos: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Primero realizo el producto de matrices del término izquierdo.

$$\begin{pmatrix} -x+2z & -y+2t \\ 3x & 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Sumamos en el término de la izquierda.

$$\begin{pmatrix} -x+2z & -y+2t+2 \\ 3x+5 & 3y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualamos término a término, formando un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$\begin{cases} -x+2z=-3 \\ -y+2t+2=8 \\ 3x+5=8 \\ 3y-1=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x+2z=-3 \\ -y+2t=6 \\ 3x=3 \\ 3y=6 \end{cases} \rightarrow x=1, y=2, t=4, z=-1$$

Es decir: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

5. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, calcula el valor del número real a para que se cumpla $A^2 = I$

$$A^2 = I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operamos e igualamos a cada término m_{ij} de la matriz identidad:

$$m_{11} \rightarrow 1 = 1$$

$$m_{12} \rightarrow 1 + a = 0 \rightarrow a = -1$$

$$m_{13} \rightarrow 1 + a = 0 \rightarrow a = -1$$

$$m_{21} \rightarrow 0 = 0$$

$$m_{22} \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

$$m_{23} \rightarrow 0 = 0$$

$$m_{31} \rightarrow 0 = 0$$

$$m_{32} \rightarrow 0 = 0$$

$$m_{33} \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

Por lo tanto, la condición que cumple todas las igualdades es $a = -1$.

6. Determina las matrices cuadradas de dimensión 2x2 de la forma $M = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ que verifiquen que

$$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Operamos y obtenemos un sistema de 4 ecuaciones y 2 incógnitas.}$$

$$\begin{cases} 1+x^2=1 \\ x \cdot y=0 \\ y \cdot x=0 \\ y^2=4 \end{cases} \rightarrow x=0 \text{ , } y=\pm 2 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ , } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

7. Sea el sistema matricial
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de a para que el sistema sea compatible.

b) Calcule todas las soluciones en el caso en el que sea compatible indeterminado y en el caso $a=3$.

a) Resolvemos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 3a & 2a & 2a & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_2 \Leftrightarrow F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 3a & 2a & 2a & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 - 3aF_1 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -a & -a & | & 1-6a \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow F'_3 = F_3 - F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -a & -a & | & 1-6a \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Obviamos } F_3 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -a & -a & | & 1-6a \end{pmatrix}$$

Tras obtener la matriz triangular del método de Gauss, comprobar que no hay absurdos matemáticos y eliminar filas proporcionales, el rango del sistema coincide con el número de ecuaciones con al menos un coeficiente no nulo.

Para la discusión de casos, consideramos: $-a=0 \rightarrow a=0$

- Si $a=0 \rightarrow$ En la matriz fina de Gauss $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ En la segunda ecuación encontramos el absurdo $0=1 \rightarrow$ Absurdo matemático $\rightarrow$ No hay solución $\rightarrow$ Sistema Incompatible.
- Caso complementario si $a \neq 0 \rightarrow$ En la matriz final de Gauss tenemos Rango 2 $\rightarrow$ Al ser el sistema de 3 incógnitas, tendremos SCI con infinitas soluciones con un parámetro libre.

b) Tenemos SCI para el caso $a \neq 0$. El sistema resulta:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -ay-az=1-6a \end{cases} \rightarrow \text{Si } z=b \in \mathbb{R} \text{ parámetro libre, en cada ecuación podremos despejar el resto}$$

de incógnitas $\rightarrow$ En la segunda ecuación $\rightarrow -ay=1-6a+ab \rightarrow y=\frac{-1}{a}+6-b \rightarrow$ Llevando este

resultado a la primera ecuación $\rightarrow x=\frac{1}{a}-4$

Para el caso particular $a=3$ las soluciones serán:

$$x=\frac{1}{3}-4=\frac{-11}{3} \rightarrow y=\frac{-1}{3}+6-b=\frac{17}{3}-b \rightarrow z=b$$

8. Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule el valor de x para que se cumpla $A+B+C^2=3 \cdot I$

b) Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X + C^2 = 3 \cdot I$

$$a) \quad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A+B+C^2 = \begin{pmatrix} 3 & x-2 \\ x-2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A+B+C^2 = 3 \cdot I \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & x-2 \\ x-2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si igualamos coeficientes, la igualdad de matrices se cumple si $x=2$

$$b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+1 & b-2 \\ a-c-2 & b-d+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Igualemos coeficientes y tendremos un sistema 4x4.

$$\begin{cases} a+1=3 \\ b-2=0 \\ a-c-2=0 \\ b-d+5=3 \end{cases} \rightarrow a=2, \quad b=2, \quad c=0, \quad d=4$$