Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 16 - método por partes

1. Resuelve $\int x \cdot arcotg(x)\, dx$

$\int x \cdot arcotg(x)\, dx$ → Integramos por partes → $I = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\, dx$

$$u = arcotg(x) \quad \rightarrow \quad u' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$v' = x \quad \rightarrow \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \frac{x^2 arcotg(x)}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \frac{x^2 arcotg(x)}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\, dx$$

$$I = \frac{x^2 arcotg(x)}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{1+x^2}\, dx - \frac{1}{2} \int \frac{-1}{1+x^2}\, dx = \frac{x^2 arcotg(x)}{2} - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$I = \frac{x^2 arcotg(x)}{2} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} arcotg(x) + C$$

2. Resuelve $I=\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$

Integramos por partes.

$$u=\ln(x) \quad \rightarrow \quad du=\frac{1}{x}dx$$

$$dv=\frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad \rightarrow \quad v=2\sqrt{x}$$

$$I=\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln(x)-2\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx=2\sqrt{x}\ln(x)-2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln(x)-4\sqrt{x}+C$$

$$I=2\sqrt{x}(\ln(x)-2)+C$$

3. Determina la función $f:(0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=\ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,2)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

Nos dan la segunda derivada de la función: $f''(x)=\ln(x)$.

Para obtener la función $f(x)$ deberemos integrar dos veces. En cada integración obtendremos una constante de integración. El valor de cada constante lo obtendremos aplicando las dos condiciones que nos da el enunciado.

$$f''(x)=\ln(x) \quad\rightarrow\quad f'(x)=\int \ln(x)\,dx$$

Aplicamos partes:

$$u=\ln(x) \quad\rightarrow\quad du=\frac{1}{x}dx$$

$$dv=dx \quad\rightarrow\quad v=x$$

$$f'(x)=x\cdot\ln(x)-\int dx=x\cdot\ln(x)-x+C$$

La constante de integración C la obtenemos del dato de que la función posee tangente horizontal en $P(1,2)$. Es decir, en $x=1$ la derivada de la función es nula (por ser 0 la pendiente de la recta tangente).

$$f'(1)=0 \quad\rightarrow\quad 1\cdot\ln(1)-1+C=0 \quad\rightarrow\quad C=1 \quad\rightarrow\quad f'(x)=x\cdot\ln(x)-x+1$$

Nuevamente integramos, para obtener la función buscada $f(x)$.

$$f(x)=\int f'(x)\,dx \qquad f(x)=\int (x\cdot\ln(x)-x+1)\,dx \quad\rightarrow\quad f(x)=\int x\cdot\ln(x)\,dx-\int x\,dx+\int 1\,dx$$

$$f(x)=\int x\cdot\ln(x)\,dx-\frac{x^2}{2}+x$$

Nuevamente debemos aplicar partes para la integral que nos aparece.

$$u=\ln(x) \quad\rightarrow\quad du=\frac{1}{x}dx$$

$$dv=x\,dx \quad\rightarrow\quad v=\frac{x^2}{2}$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\int\frac{x}{2}dx-\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+x+D$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\frac{3x^2}{4}+x+D$$

La constante de integración D la obtenemos del dato de que la función pasa por el punto $P(1,2)$.

$$f(1)=2 \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\cdot\ln(1)-\frac{3\cdot 1}{4}+1+D=2 \;\rightarrow\; D=\frac{7}{4}$$

Finalmente la función buscada resulta:

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\frac{3x^2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{x^2}{2}\cdot(\ln(x)-\frac{3}{2})+x+\frac{7}{4}$$

4. Calcula una función primitiva de $f'(x)=x\cdot\ln(x^2+1)$ **que pase por el punto** $(0,1)$ **.**

Nos dan la derivada de la función: $f'(x)=x\cdot\ln(x^2+1)$.

Para obtener la función $f(x)$ deberemos integrar. El valor de la constante lo obtendremos aplicando la condición que nos da el enunciado.

$$f'(x)=x\cdot\ln(x^2+1) \quad\rightarrow\quad f(x)=\int x\cdot\ln(x^2+1)\,dx$$

Aplicamos integración por partes.

$$u=\ln(x^2+1) \quad\rightarrow\quad du=\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$dv=x\,dx \quad\rightarrow\quad v=\frac{x^2}{2}$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\int\frac{x^3}{x^2+1}dx+C$$

Obtenemos una integral como cociente de dos polinomios, con grado del numerador mayor que el grado del denominador. Ejecutamos la división.

$$\frac{x^3}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\int x\,dx+\int\frac{x}{x^2+1}dx+C$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+C$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

Según el enunciado la función pasa por el punto $(0,1)$.

$$f(0)=1 \quad\rightarrow\quad f(0)=C \quad\rightarrow\quad C=1$$

Finalmente la función buscada resulta:

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+1=\frac{1}{2}((x^2+1)\ln(x^2+1)-x^2)+1$$

5. Calcula $I=\int sen(x)\cdot\ln(\cos(x))\,dx$

Integramos por partes → $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx$

$$u(x)=\ln(\cos(x)) \quad\rightarrow\quad u'(x)=\frac{-sen(x)}{\cos(x)}$$

$$v'(x)=sen(x) \quad\rightarrow\quad v(x)=-\cos(x)$$

$$I=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx=-\cos(x)\cdot\ln(\cos(x))-\int \cos(x)\cdot\frac{sen(x)}{\cos(x)}\,dx$$

$$I=-\cos(x)\cdot\ln(\cos(x))-\int sen(x)\,dx$$

$$I=-\cos(x)\cdot\ln(\cos(x))+\cos(x)+C=\cos(x)[1-\ln(\cos(x))]+C$$

6. Resuelve $\int x\cdot\ln(\sqrt{1+x^2})\,dx$

Integramos por partes → $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\,dx$

$$u(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}) \quad\rightarrow\quad u'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{1+x^2}$$

$$v'(x)=x \quad\rightarrow\quad v(x)=\frac{x^2}{2}$$

$$I=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx=\frac{x^2\ln(\sqrt{1+x^2})}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{x^2\ln(\sqrt{1+x^2})}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

Realizamos la división de polinomios.

$$\frac{x^3}{1+x^2}=x-\frac{x}{1+x^2}$$

Sustituimos en la integral.

$$I=\frac{x^2\ln(\sqrt{1+x^2})}{2}-\frac{1}{2}\int x\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{x^2\ln(\sqrt{1+x^2})}{2}-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}\ln|1+x^2|+C$$

7. Resuelve $\int x \cdot e^x \, dx$

$u = x$ → diferenciamos → $du = dx$

$dv = e^x \, dx$ → integramos → $v = e^x$

$I = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = \underline{x \cdot e^x - e^x + C} = (x-1) e^x + C$

8. Resuelve $\int x\cdot 2^x\cdot 3^x\,dx$

$\int x\cdot 2^x\cdot 3^x\,dx=\int x\cdot(2\cdot 3)^x\,dx=\int x\cdot(6)^x\,dx$ → Aplicamos partes

$$I=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

$$u=x \quad \rightarrow \quad u'=1$$

$$v'=6^x \quad \rightarrow \quad v=\frac{6^x}{\ln(6)}$$

$$I=\frac{x6^x}{\ln(6)}-\frac{1}{\ln(6)}\int 6^x\,dx=\frac{x6^x}{\ln(6)}-\frac{6^x}{[\ln(6)]^2}+C$$

9. Resuelve $\int [1-\ln(x+1)]dx$

$$I=\int [1-\ln(x+1)]dx=\int dx-\int \ln(x+1)dx=x-\int \ln(x+1)dx$$

Aplicamos partes en la integral que queda por resolver.

$$\int \ln(x+1)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx$$

$$u=\ln(x+1) \quad \rightarrow \quad u'=\frac{1}{x+1}$$

$$v'=1 \quad \rightarrow \quad v=x$$

$$\int \ln(x+1)dx=x\cdot\ln(x+1)-\int \frac{x}{x+1}dx=x\cdot\ln(x+1)-\int \frac{x+1-1}{x+1}dx$$

Donde hemos sumado y restado “1” en el numerador de la integral (otra opción sería realizar la división de polinomios, al aparecer un cociente de polinomios con grado en el numerador igual al grado del denominador).

Rompemos el numerador de la fracción en dos tramos (ojo con el signo negativo que aparece fuera de la integral).

$$\int \ln(x+1)dx=x\cdot\ln(x+1)-\int \frac{x+1}{x+1}dx+\int \frac{1}{x+1}dx=x\cdot\ln(x+1)-\int dx+\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$\int \ln(x+1)dx=x\cdot\ln(x+1)-x+\ln|x+1|=\ln|x+1|\cdot(x+1)-x$$

Sustituimos este valor en la integral de partida, añadiendo la constante de integración.

$$I=x-\ln|x+1|\cdot(x+1)+x+C=2x-\ln|x+1|\cdot(x+1)+C$$

10. Determina la función $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=\frac{1}{x}$ y su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,1)$.

La condición de la recta tangente del enunciado nos dice que $f'(1)=0$. Además sabemos que la función pasa por $P(1,1)$, por lo que se cumple $f(1)=1$.

Integramos dos veces y aplicamos las correspondientes condiciones de contorno.

$$f'(x)=\int f''(x)\,dx \;\rightarrow\; f'(x)=\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$$

$$f'(1)=0 \;\rightarrow\; \ln(1)+C=0 \;\rightarrow\; C=0 \;\rightarrow\; f'(x)=\ln|x|$$

Integramos nuevamente.

$$f(x)=\int f'(x)\,dx \;\rightarrow\; f(x)=\int \ln|x|\,dx$$

Aplicamos partes.

$$u=\ln(x) \;\rightarrow\; u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$v'=1 \;\rightarrow\; v(x)=x$$

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx=x\cdot\ln(x)-\int \frac{x}{x}\,dx=x\cdot\ln(x)-\int dx=x\cdot\ln(x)-x+D$$

Aplicamos la segunda condición de contorno $f(1)=1$.

$$1\cdot\ln(1)-1+D=1 \;\rightarrow\; D=2 \;\rightarrow\; f(x)=x\cdot\ln|x|-x+2$$

En la solución final siempre aplicamos valor absoluto al argumento del logaritmo para garantizar que sea positivo.

11. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f'(x)=\ln(x^2+1)$. Determina la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f'(x)=\ln(x^2+1)$. Determina la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

La condición de contorno es $f(0)=0$, con la que podremos resolver la constante de integración.

$$f(x)=\int f'(x)dx \quad \to \quad f(x)=\int \ln(x^2+1)dx$$

Aplicamos partes.

$$u=\ln(x^2+1) \quad \to \quad u'=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$v'=1 \quad \to \quad v=x$$

$$f(x)=x\cdot\ln(x^2+1)-2\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=x\cdot\ln(x^2+1)-2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$f(x)=x\cdot\ln(x^2+1)-2\int dx+2\int\frac{1}{x^2+1}dx=x\cdot\ln(x^2+1)-2x+2\,arctg(x)+C$$

$$f(0)=0 \quad \to \quad 0-0+0+C=0 \quad \to \quad C=0 \quad \to \quad f(x)=x\cdot\ln(x^2+1)-2x+2\,arctg(x)$$

En la solución final no hemos aplicado valor absoluto al logaritmo porque su argumento siempre es positivo.

12. Sea la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f'(x)=(2x+1)e^{-x}$. Determina la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

Si $f(x)$ pasa por el origen de coordenadas → $f(0)=0$ → Con esta condición de contorno podremos determinar la constante de integración.

$f(x)=\int f'(x)dx \rightarrow f(x)=\int (2x+1)e^{-x}dx$ → Integramos por partes

$u=2x+1 \rightarrow u'=2$

$v'=e^{-x} \rightarrow v=-e^{-x}$

$f(x)=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx=-(2x+1)e^{-x}+2\int e^{-x}dx=-(2x+1)e^{-x}-2e^{-x}+C$

$f(0)=0 \rightarrow -1-2+C=0 \rightarrow C=3 \rightarrow f(x)=-(2x+1)e^{-x}-2e^{-x}+3$

13. Resuelve $\int x^2 \cdot \ln(x)\,dx$

Aplicamos partes:

$$u(x)=\ln(x) \quad \rightarrow \quad u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$v'(x)=x^2 \quad \rightarrow \quad v(x)=\frac{x^3}{3}$$

$$I=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

$$I=\frac{x^3}{3}\cdot\ln|x|-\int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}\cdot\ln|x|-\frac{1}{3}\int x^2\,dx$$

$$I=\frac{x^3}{3}\cdot\ln|x|-\frac{1}{9}x^3+C$$

14. Resuelve $\int x \cdot e^{-x} dx$

Aplicamos partes.

$$I = \int x \cdot e^{-x} dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

$$u = x \quad \rightarrow \quad u' = 1$$

$$v' = e^{-x} \quad \rightarrow \quad v = -e^{-x}$$

$$I = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C$$