

Problemas duales en el plano

Polígonos, triangulación y envolvente convexa

William Roberto Gutiérrez-Herrera
wgutierrez@ecfm.usac.edu.gt

Departamento de Matemáticas
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de San Carlos de Guatemala

14 de julio de 2016

Tabla de Contenidos

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Mediatriz

Problema de los tres puntos

Circuncentro y circuncírculo

Coloreado de regiones de influencia

Teselado

Diagrama de Voronoi

Triangulación de Delaunay

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Preguntas básicas.

- ▶ Tengo dos puntos distintos, A y B , en el plano. Determinar el conjunto de puntos que están más cerca de A , y cuáles son los puntos que están más cerca de B .

Preguntas básicas.

- ▶ Tengo dos puntos distintos, A y B , en el plano. Determinar el conjunto de puntos que están más cerca de A , y cuáles son los puntos que están más cerca de B .
- ▶ Tengo tres puntos A , B y C , los cuales son distintos. ¿Cómo determino los puntos más cercanos a cada uno de ellos?

Preguntas básicas.

- ▶ Tengo dos puntos distintos, A y B , en el plano. Determinar el conjunto de puntos que están más cerca de A , y cuáles son los puntos que están más cerca de B .
- ▶ Tengo tres puntos A , B y C , los cuales son distintos. ¿Cómo determino los puntos más cercanos a cada uno de ellos?
- ▶ La misma pregunta, solamente que ahora tengo más de tres puntos.

Preguntas básicas.

- ▶ Tengo dos puntos distintos, A y B , en el plano. Determinar el conjunto de puntos que están más cerca de A , y cuáles son los puntos que están más cerca de B .
- ▶ Tengo tres puntos A , B y C , los cuales son distintos. ¿Cómo determino los puntos más cercanos a cada uno de ellos?
- ▶ La misma pregunta, solamente que ahora tengo más de tres puntos.

El resolver estos problemas nos lleva a la creación de *conceptos matemáticos nuevos* y el *diseño de algoritmos*.

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Mediatriz

Problema de los tres puntos

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

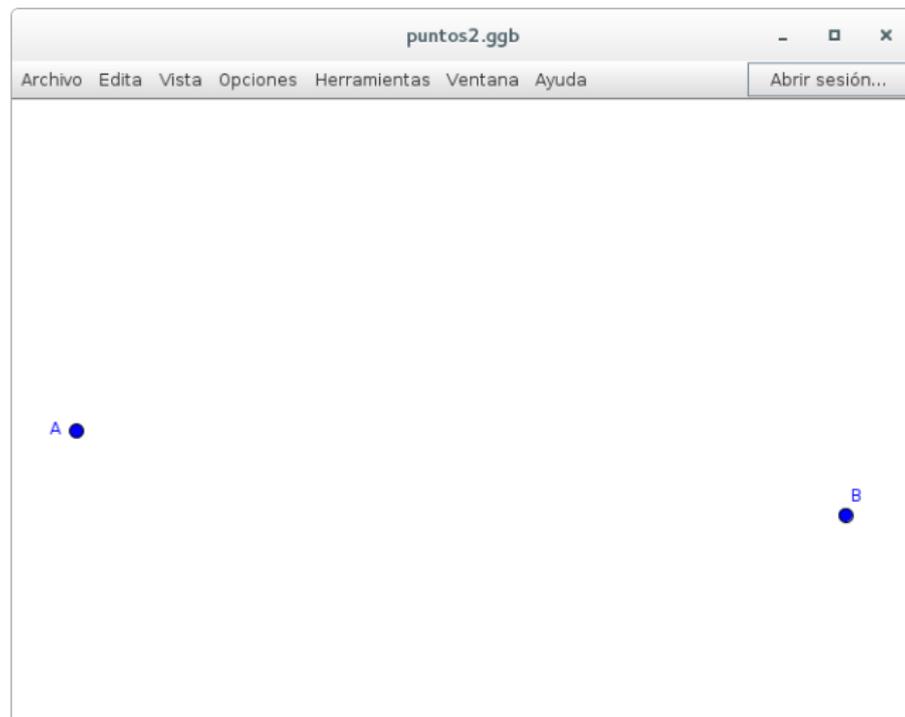


Figura: Consideremos dos puntos A y B .

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Mediatriz

Problema de los tres puntos

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

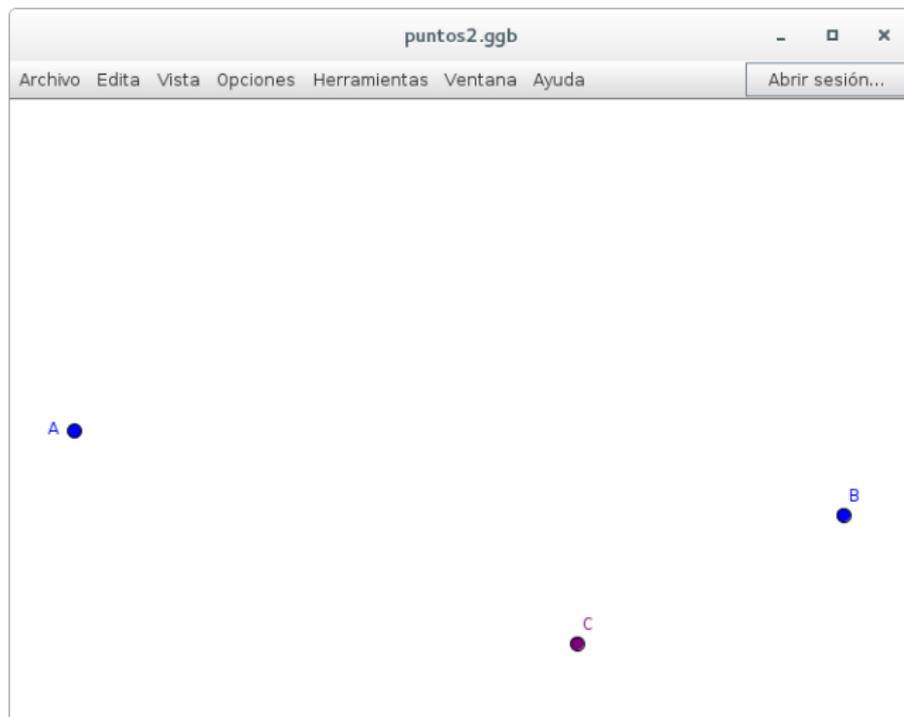


Figura: Sea C un tercer punto, distinto de los anteriores.

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Mediatriz

Problema de los tres puntos

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

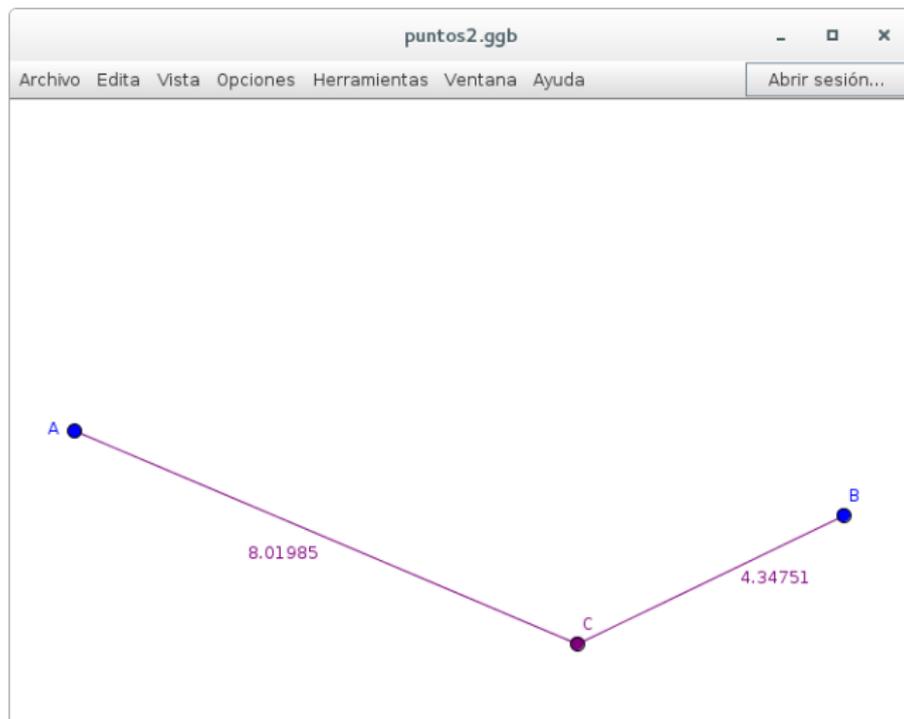


Figura: Calculemos las distancias, C está más cerca de B .

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Mediatriz

Problema de los tres puntos

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

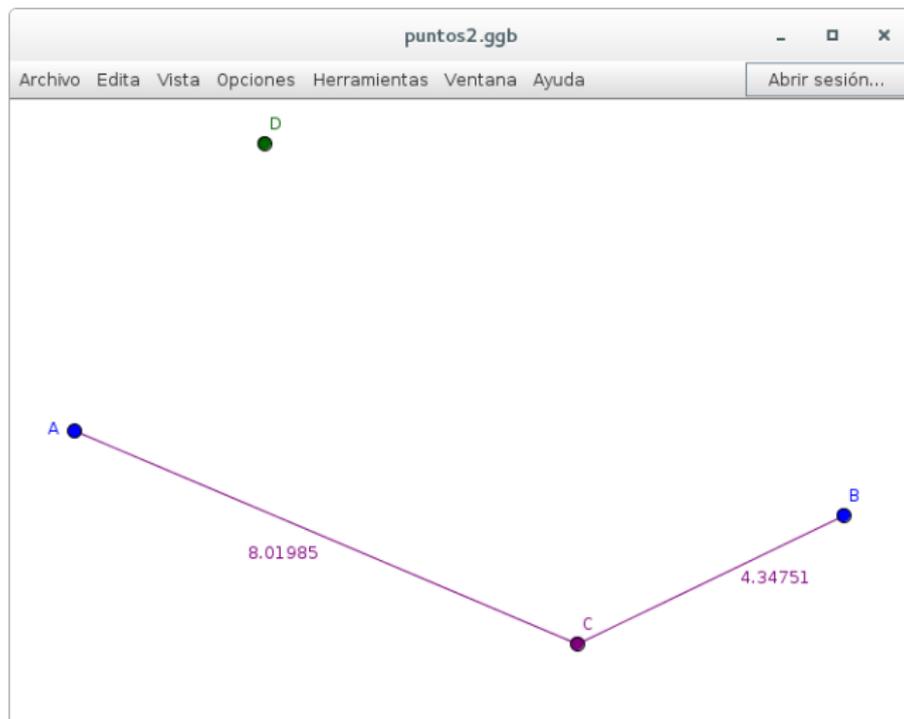


Figura: Consideremos un cuarto punto D .

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Mediatriz

Problema de los tres puntos
Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

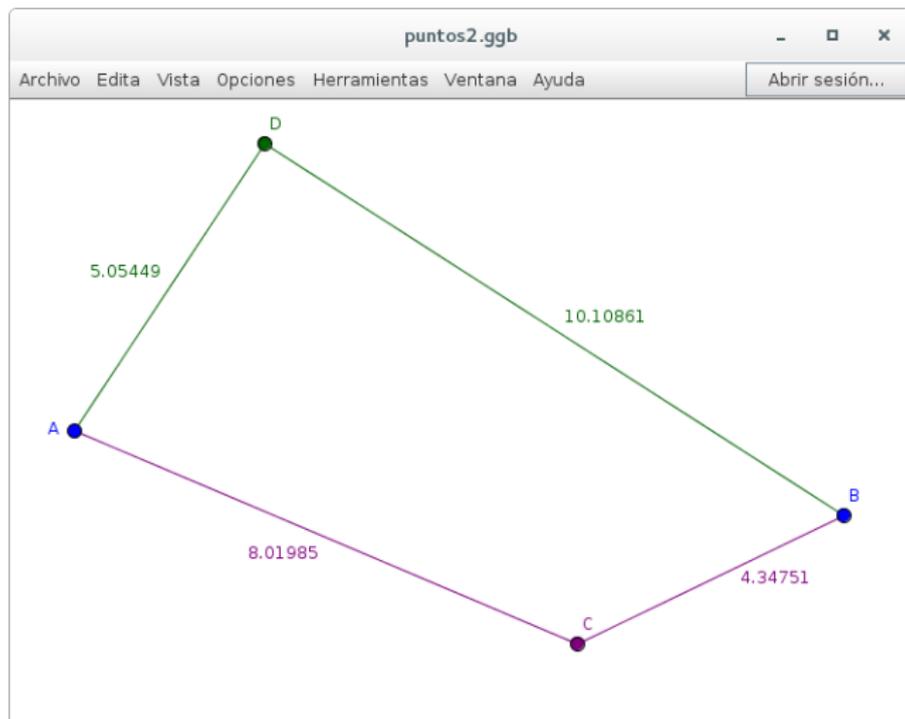


Figura: Las distancias establecen que D está más cerca de A .

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

¡No hay matemáticas de interés con seguir así!

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Mediatriz

Problema de los tres puntos

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Mediatriz

Problema de los tres puntos

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

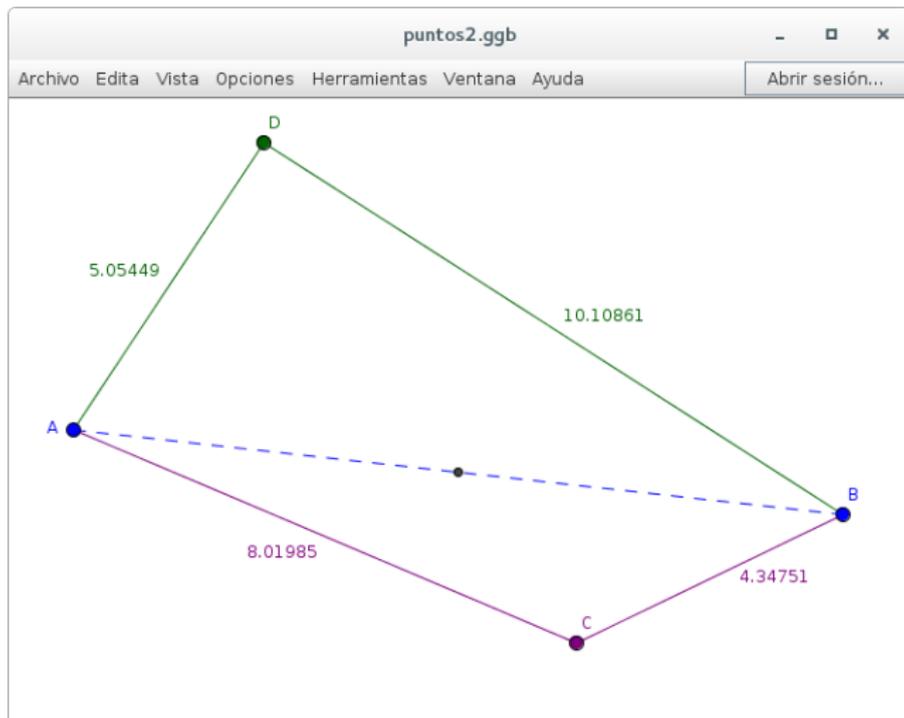


Figura: Construyamos el segmento AB y su punto medio M .

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Definición.

Sea AB un segmento de recta, y E su punto medio, a la recta m perpendicular a este segmento que pasa por el punto E le llamaremos **mediatriz** de AB .

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Mediatriz

Problema de los tres puntos
Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

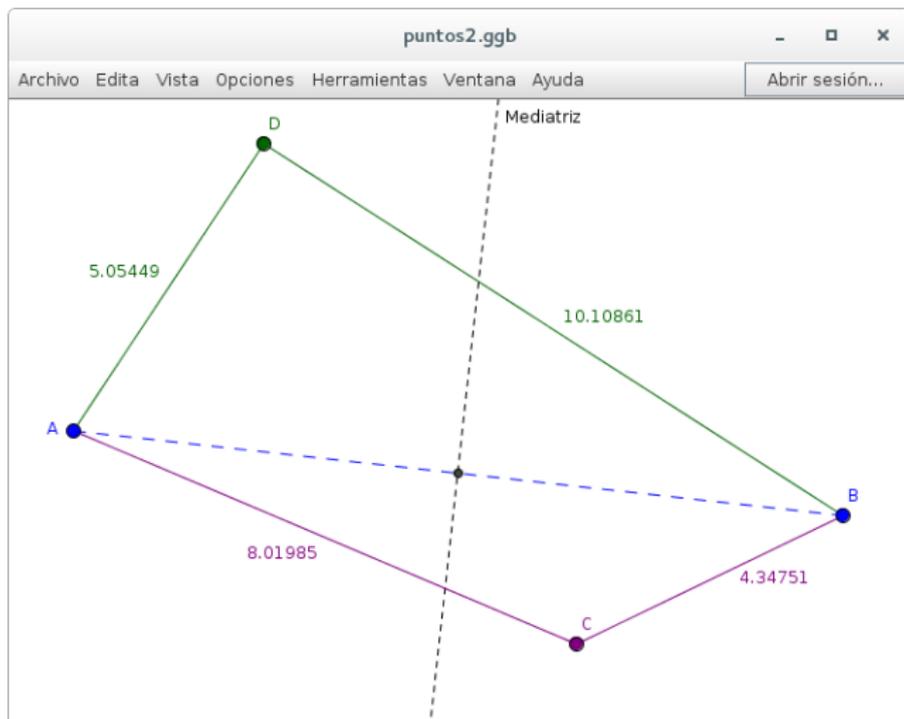


Figura: Construyamos la mediatriz del segmento AB dado.

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

¿Notan algo?

Problemas duales en
el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas
elementales y
soluciones

Problema de los dos puntos

Mediatriz

Problema de los tres puntos
Tesselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Mediatriz

Problema de los tres puntos
Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

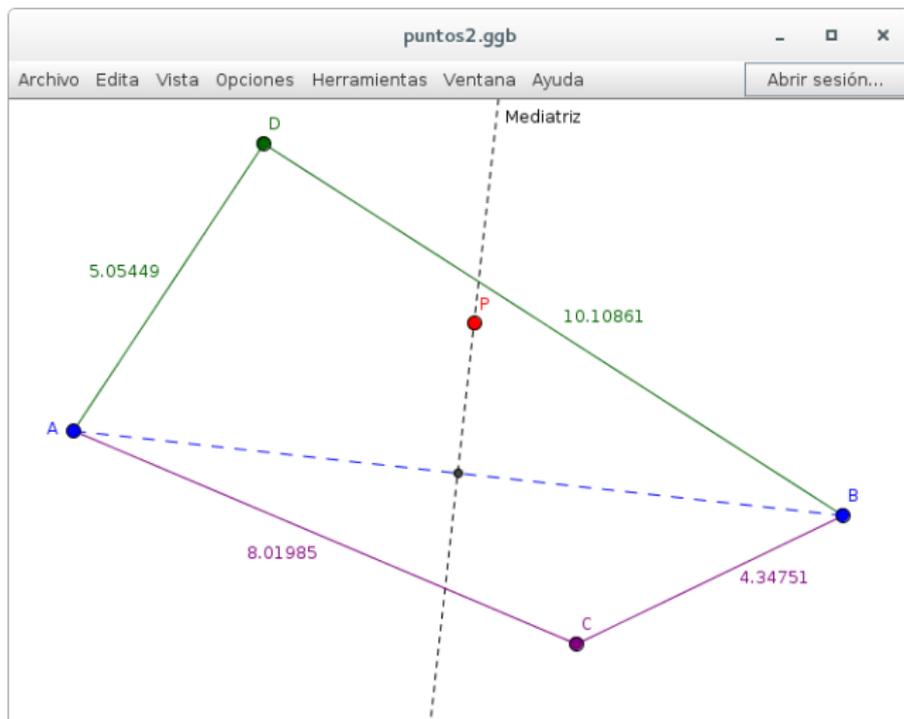


Figura: Sea P un punto sobre la mediatriz.

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Mediatriz

Problema de los tres puntos
Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

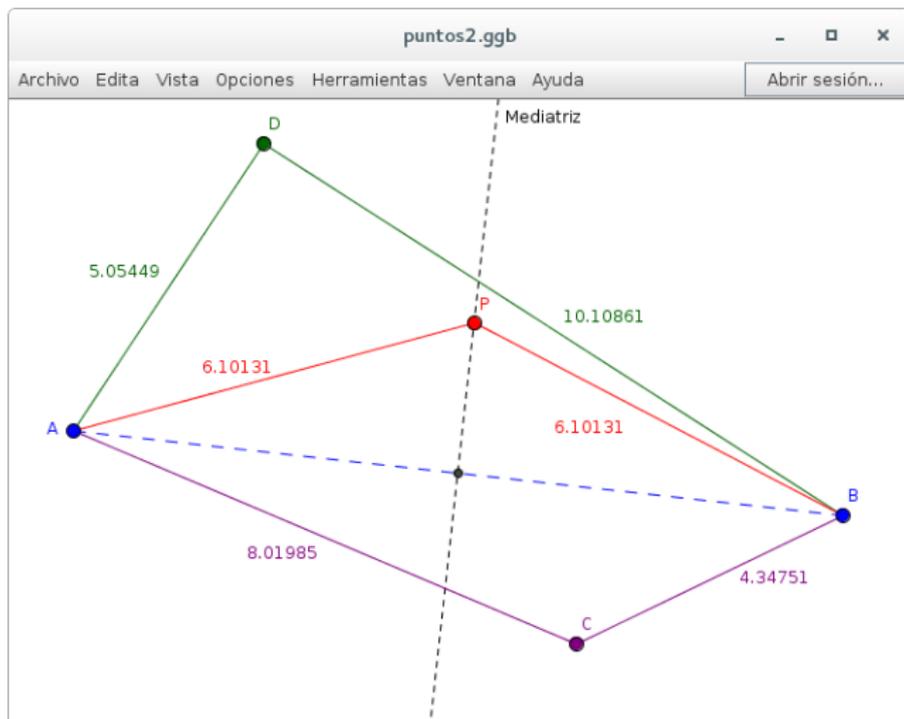


Figura: Calculemos las distancias.

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Teorema.

Sean A y B dos puntos distintos en el plano.

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Mediatriz

Problema de los tres puntos

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Teorema.

Sean A y B dos puntos distintos en el plano.

- 1. La mediatriz de AB es el lugar geométrico de los puntos equidistantes a los puntos A y B .*

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Teorema.

Sean A y B dos puntos distintos en el plano.

- 1. La mediatriz de AB es el lugar geométrico de los puntos equidistantes a los puntos A y B .*
- 2. Si un punto Q está a la misma distancia de los puntos A y B , entonces Q está en la mediatriz de éstos.*

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Teorema.

Sean A y B dos puntos distintos en el plano.

- 1. La mediatriz de AB es el lugar geométrico de los puntos equidistantes a los puntos A y B .*
- 2. Si un punto Q está a la misma distancia de los puntos A y B , entonces Q está en la mediatriz de éstos.*

Demostración.

Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Mediatriz

Problema de los tres puntos

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Teorema.

Sean A y B dos puntos distintos en el plano.

- 1. La mediatriz de AB es el lugar geométrico de los puntos equidistantes a los puntos A y B .*
- 2. Si un punto Q está a la misma distancia de los puntos A y B , entonces Q está en la mediatriz de éstos.*

Demostración.

Ejercicio.



Problema de los dos puntos.

Mediatriz

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Mediatriz

Problema de los tres puntos
Tesselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Teorema.

Sean A y B dos puntos distintos en el plano.

- 1. La mediatriz de AB es el lugar geométrico de los puntos equidistantes a los puntos A y B .*
- 2. Si un punto Q está a la misma distancia de los puntos A y B , entonces Q está en la mediatriz de éstos.*

Demostración.

Ejercicio. □

Abrir el archivo <http://ggbtu.be/m2803343>, para experimentar. Fue creado con *GeoGebra*.

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

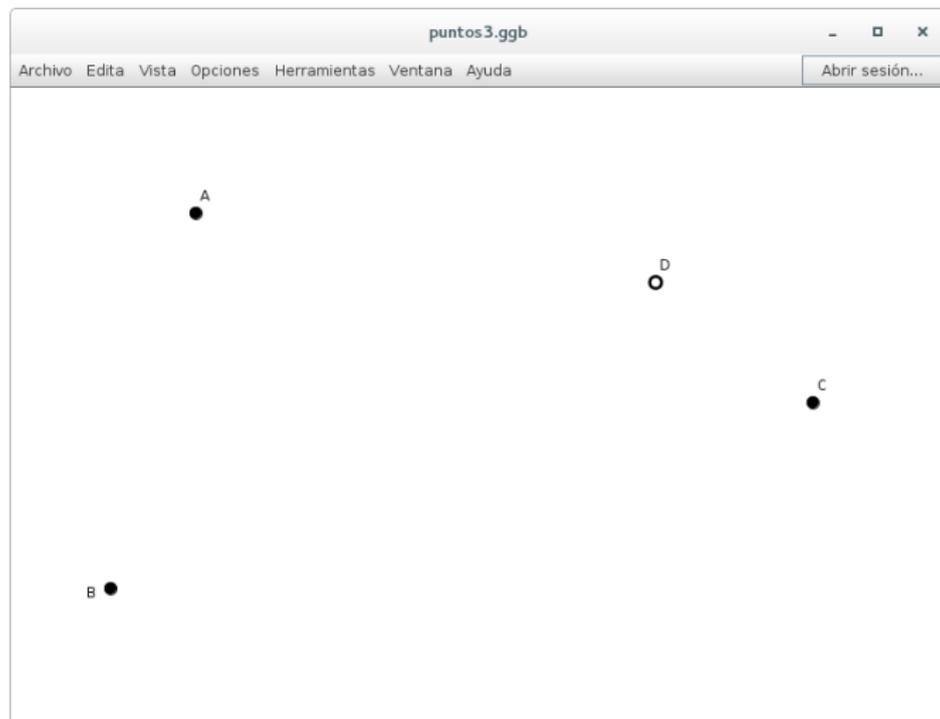


Figura: Sean A , B y C tres puntos fijos, y D un punto cualquiera.

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Circuncentro y circuncírculo

Coloreado

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

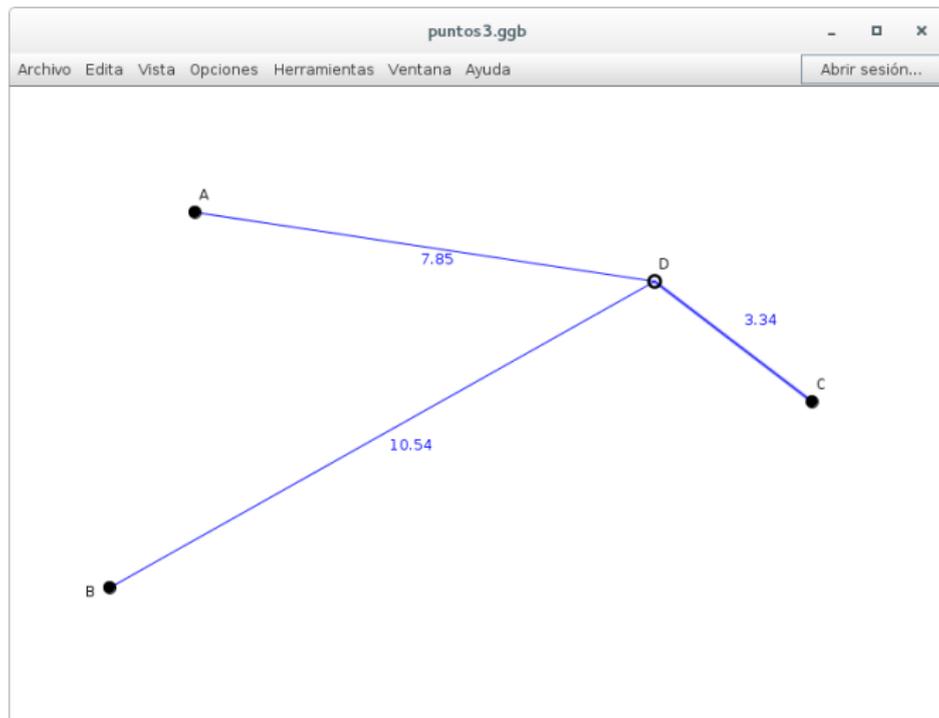


Figura: Calculemos las distancias.

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Circuncentro y circuncírculo

Coloreado

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

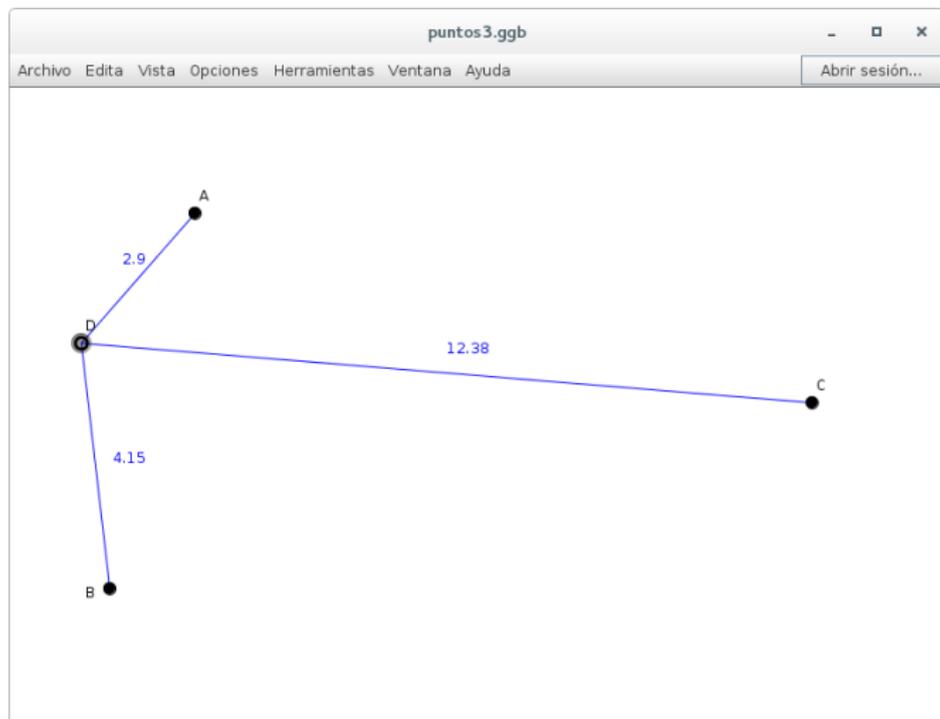


Figura: Al mover D , cambian las distancias.

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

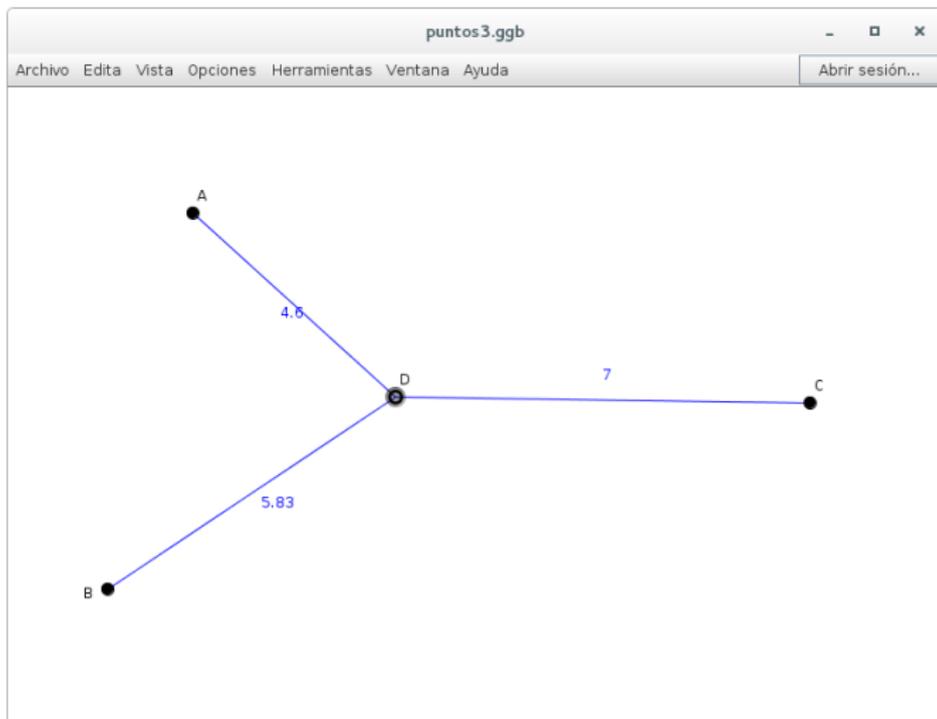


Figura: En cada caso cambia de zona de los puntos más cercanos a un punto dado.

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

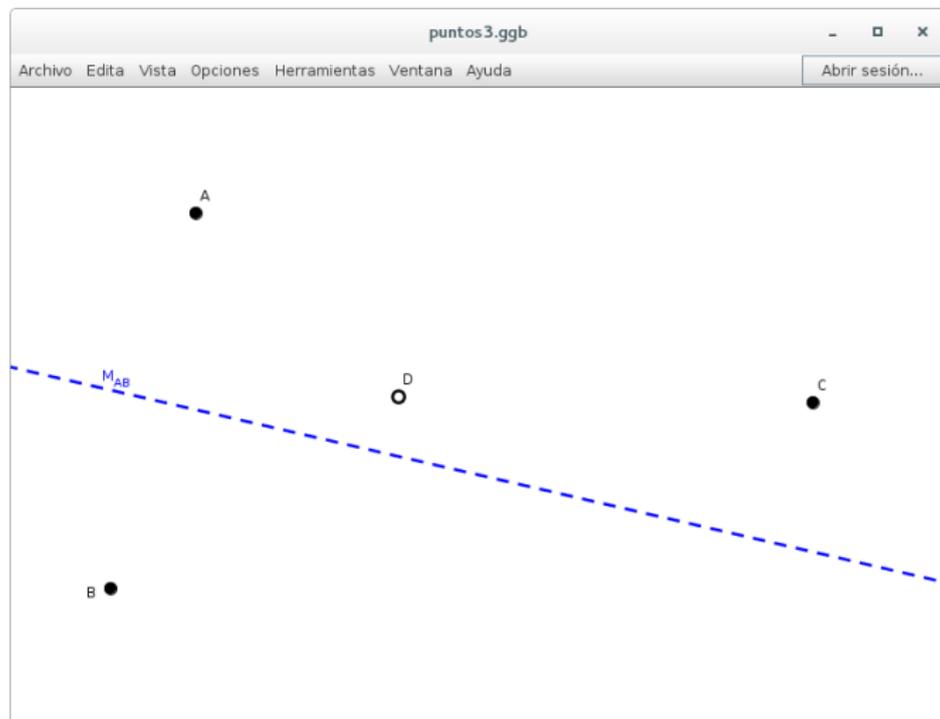


Figura: Por parejas, consideremos mediatriz M_{AB} .

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

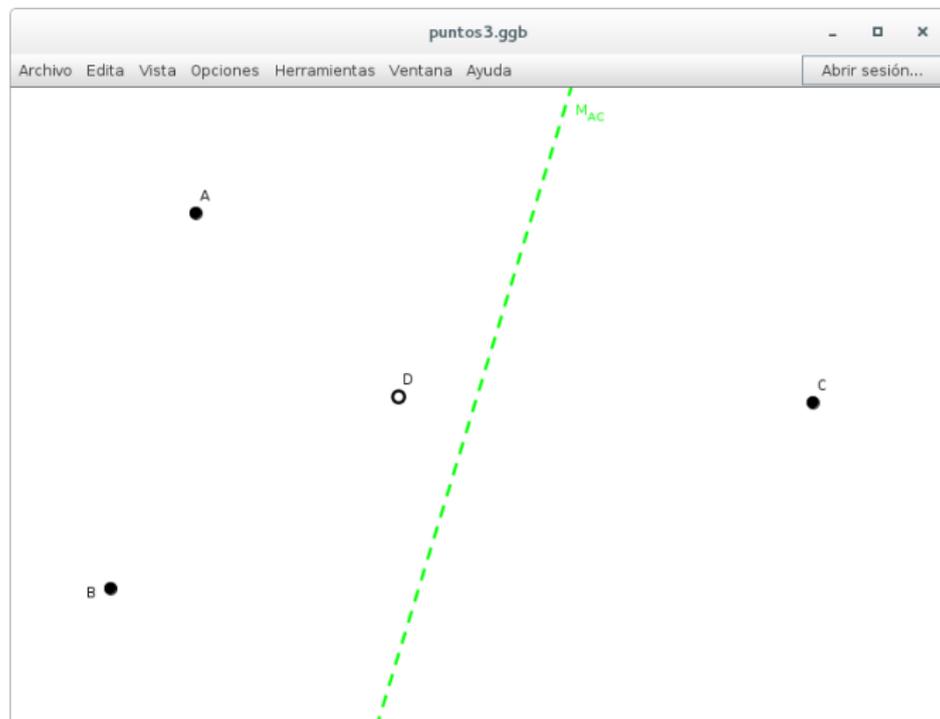


Figura: Mediatriz M_{AC} .

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

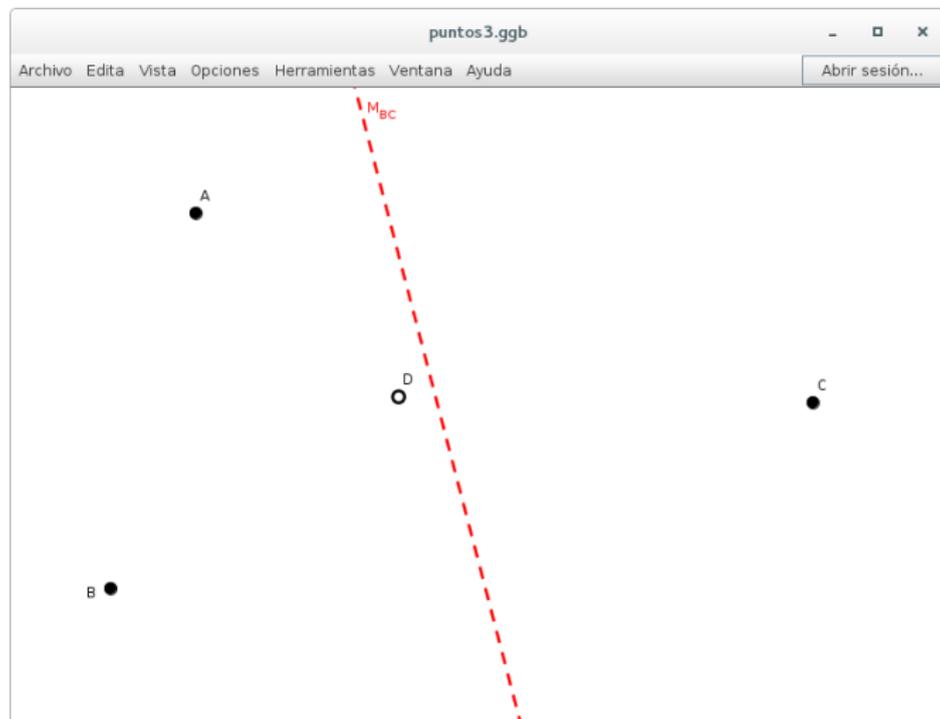


Figura: Mediatriz M_{BC} .

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

Veamos las tres mediatrices.

Problemas duales en
el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas
elementales y
soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Circuncentro y
circuncírculo

Coloreado

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

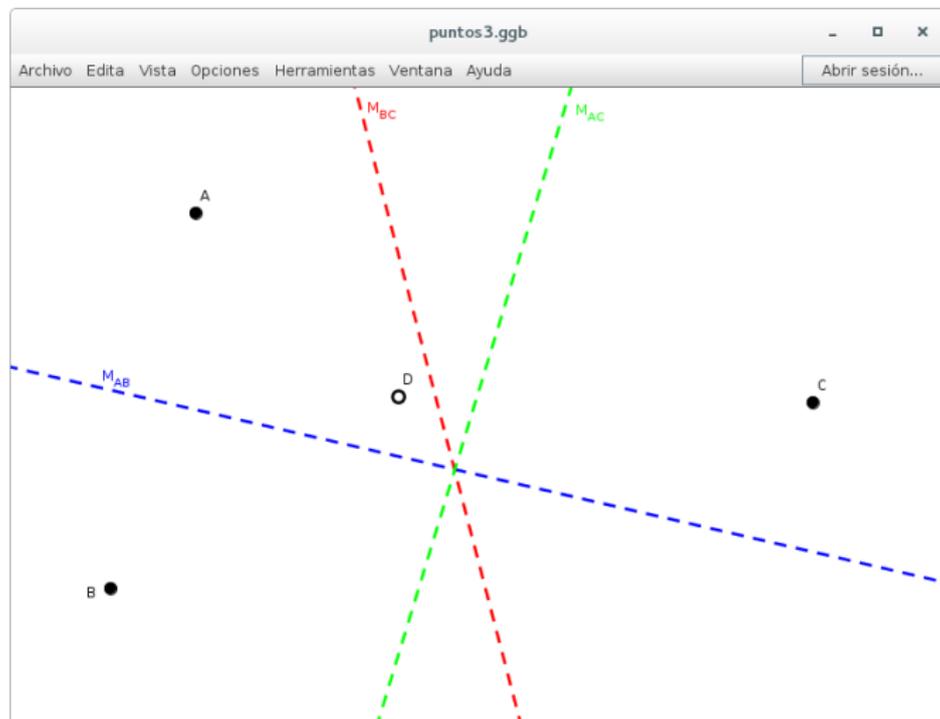


Figura: Las tres mediatrices.

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

Notemos que las tres mediatrices se cortan en un único punto.

Tal vez le sea más fácil visualizar esta situación si considera el triángulo ABC .

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Circuncentro y circuncírculo

Coloreado

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

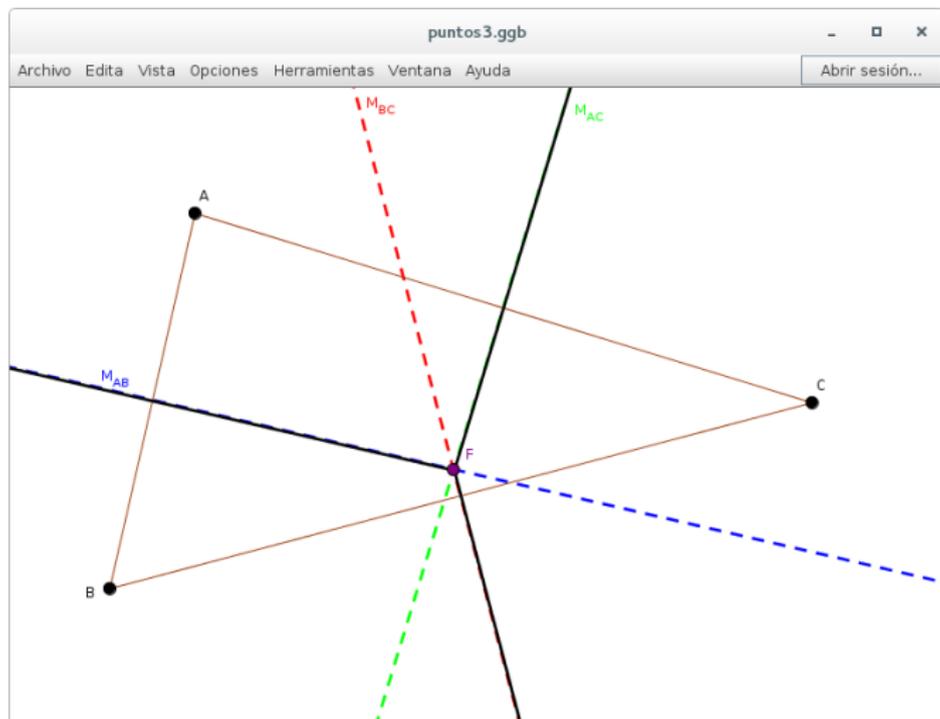


Figura: Triángulo y sus mediatrices.

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

Teorema.

En un triángulo ABC , las mediatrices son concurrentes.

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Circuncentro y circuncírculo

Coloreado

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

Teorema.

En un triángulo ABC , las mediatrices son concurrentes.

Demostración.

Ejercicio.



Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Circuncentro y circuncírculo

Coloreado

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

Teorema.

En un triángulo ABC , las mediatrices son concurrentes.

Demostración.

Ejercicio. □

Definición.

Al punto donde concurren las mediatrices de un triángulo, le llamaremos **circuncentro**.

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Circuncentro y circuncírculo

Coloreado

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

Teorema.

En un triángulo ABC , las mediatrices son concurrentes.

Demostración.

Ejercicio. □

Definición.

Al punto donde concurren las mediatrices de un triángulo, le llamaremos **circuncentro**.

Teorema.

En un triángulo ABC el circuncentro es el centro de la circunferencia que pasa por A , B y C .

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

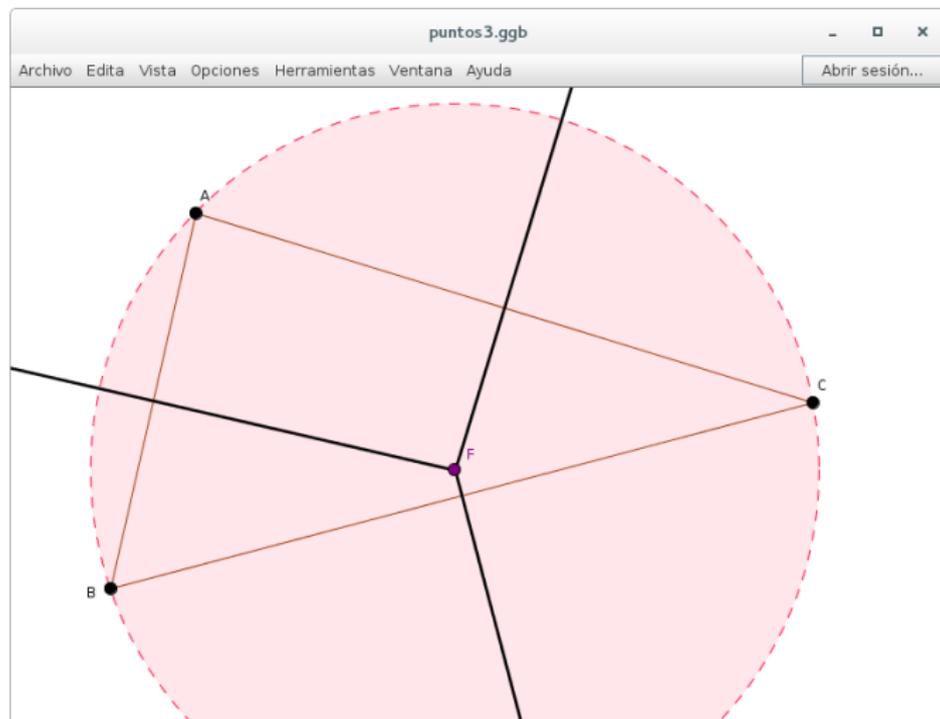


Figura: Circuncentro y circuncírculo.

Problema de los tres puntos.

Coloreado de regiones de influencia

De manera coloquial diremos que la **zona de influencia** de un punto, digamos A , la conforman todos los puntos del plano que son más cercanos a él.

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Circuncentro y circuncírculo

Coloreado

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Problema de los tres puntos.

Coloreado de regiones de influencia

De manera coloquial diremos que la **zona de influencia** de un punto, digamos A , la conforman todos los puntos del plano que son más cercanos a él.

Para ilustrar esto, consideremos los puntos A , B y C , y asignemos colores según las reglas:

- ▶ Rojo si el punto está más cerca de A .
- ▶ Verde si el punto está más cerca de B .
- ▶ Azul si el punto está más cerca de C .

Problema de los tres puntos.

Coloreado de regiones de influencia

De manera coloquial diremos que la **zona de influencia** de un punto, digamos A , la conforman todos los puntos del plano que son más cercanos a él.

Para ilustrar esto, consideremos los puntos A , B y C , y asignemos colores según las reglas:

- ▶ Rojo si el punto está más cerca de A .
- ▶ Verde si el punto está más cerca de B .
- ▶ Azul si el punto está más cerca de C .

Abrir el archivo <http://ggbtu.be/m2803365>, para experimentar.

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Circuncentro y circuncírculo

Coloreado

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Problema de los tres puntos.

Coloreado de regiones de influencia

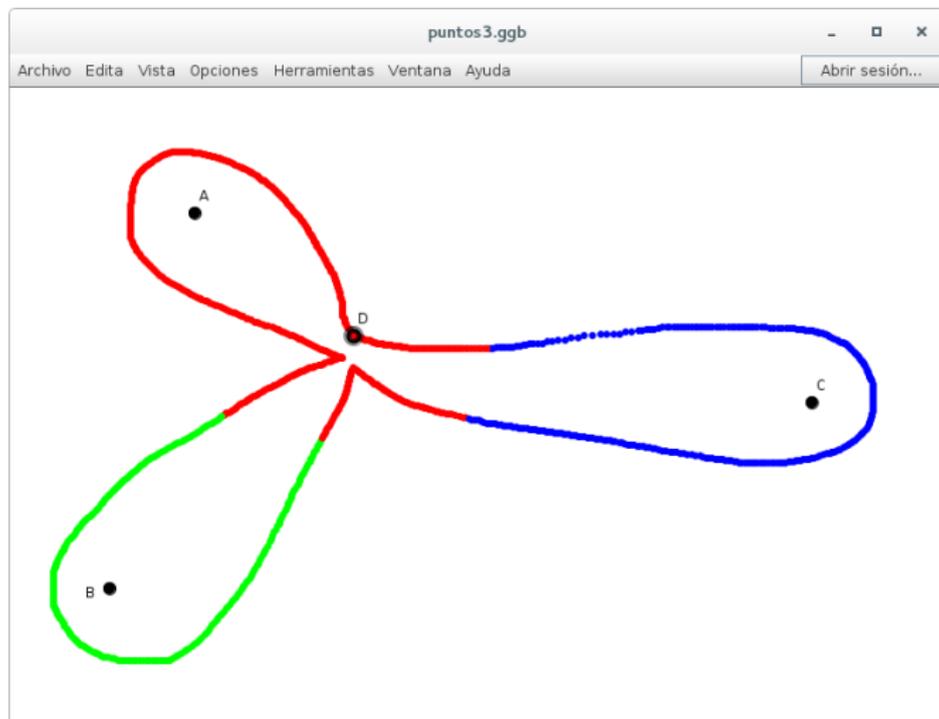


Figura: Primer recorrido para establecer zonas de influencia.

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Circuncentro y circuncírculo

Coloreado

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Circuncentro y circuncírculo

Coloreado

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

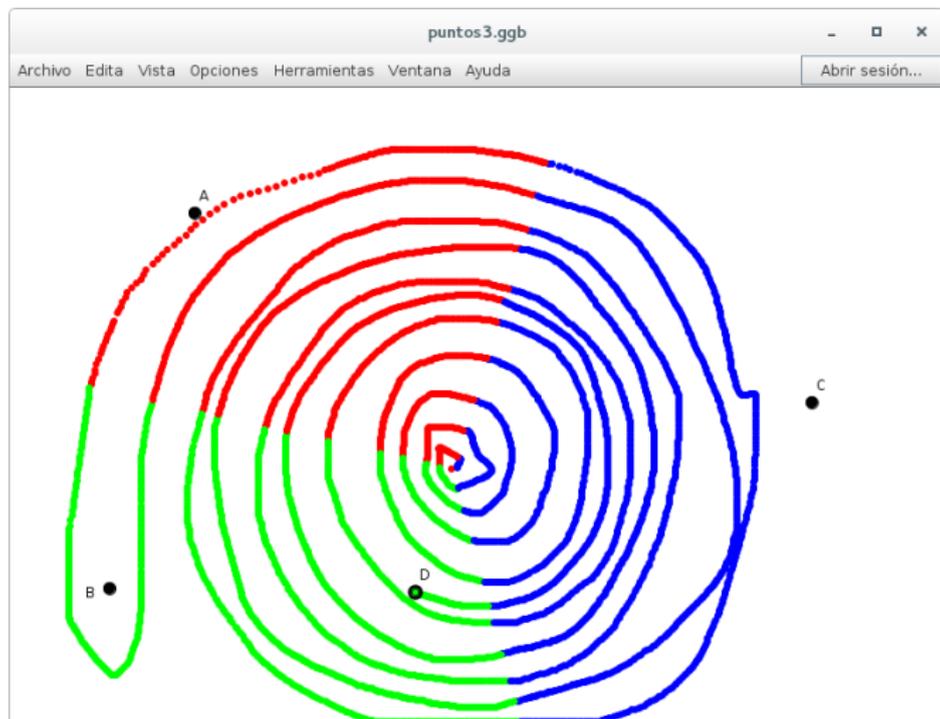


Figura: Un recorrido más ilustrativo.

Problema de los tres puntos.

Circuncentro y circuncírculo

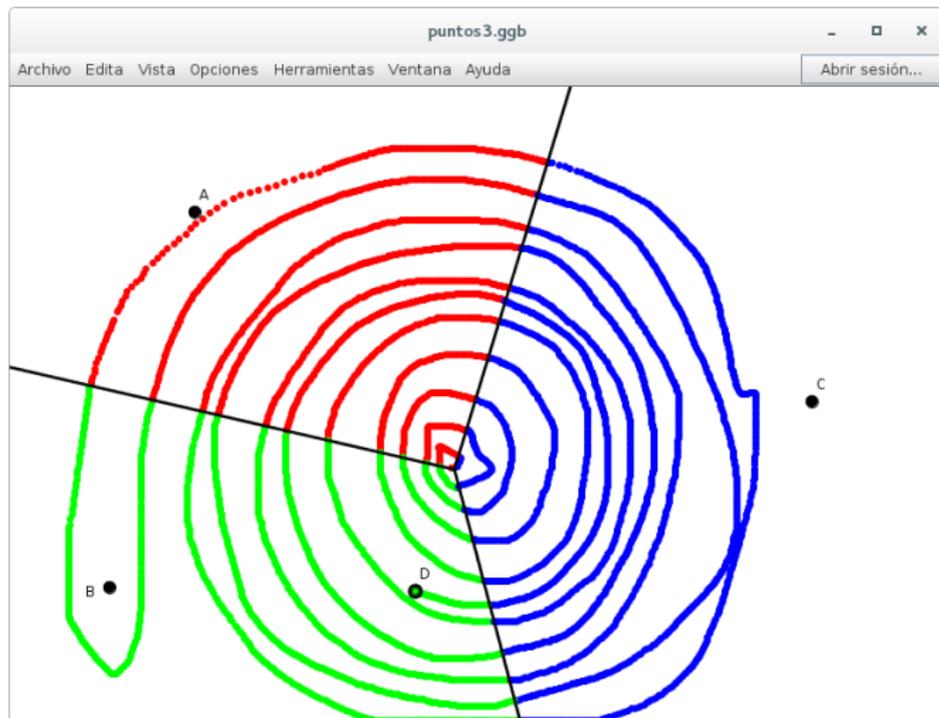


Figura: Ocultemos los trazos innecesarios.

Problema de los tres puntos.

Teselación

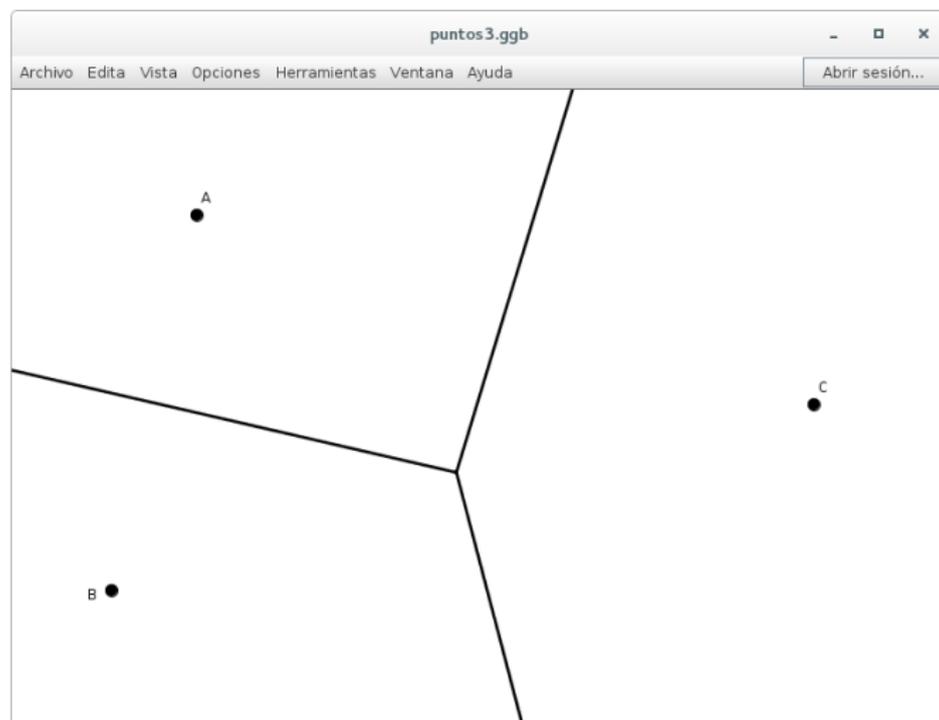


Figura: Quitemos la trayectoria coloreada.

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Circuncentro y circuncírculo

Coloreado

Teselado

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Teselado

Conceptos básicos

Los términos **teselaciones** y **teselado** hacen referencia a una regularidad o patrón de figuras que recubren o pavimentan completamente una superficie plana que cumple con dos requisitos:

1. No hay espacios entre las figuras.
2. No se superpongan o traslapen las figuras.

Teselado

Conceptos básicos

Los términos **teselaciones** y **teselado** hacen referencia a una regularidad o patrón de figuras que recubren o pavimentan completamente una superficie plana que cumple con dos requisitos:

1. No hay espacios entre las figuras.
2. No se superpongan o traslapen las figuras.

Tipos de teselados:

- ▶ Regulares: las figuras son polígonos regulares (triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares).
- ▶ Semirregulares: contienen dos o más polígonos regulares en su formación.
- ▶ Irregulares: están formados por polígonos no regulares.

Teselado

Conceptos básicos

Los términos **teselaciones** y **teselado** hacen referencia a una regularidad o patrón de figuras que recubren o pavimentan completamente una superficie plana que cumple con dos requisitos:

1. No hay espacios entre las figuras.
2. No se superpongan o traslapen las figuras.

Tipos de teselados:

- ▶ Regulares: las figuras son polígonos regulares (triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares).
- ▶ Semirregulares: contienen dos o más polígonos regulares en su formación.
- ▶ Irregulares: están formados por polígonos no regulares.

En esta charla nos interesan los teselados irregulares.

Teselado

Polígonos de Voronoi (o de Thiessen)

Definición.

La **distancia euclidiana** entre dos puntos p y q la denotamos con $\|p - q\|$. En el plano entonces se tiene:

$$\|p - q\| = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}.$$

Sea $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un conjunto de n puntos distintos en el plano, a estos puntos les llamaremos **sitios**. Se define el **diagrama de Voronoi** de P como la subdivisión del plano en n regiones, una para cada $p_i \in P$, cumpliendo la propiedad de proximidad en la que un punto q pertenece a la región de un sitio p_i si y sólo si $\|q - p_i\| < \|q - p_j\|$ para cada $p_j \in P$, $j \neq i$. Se denotará al diagrama de Voronoi de P mediante $Vor(P)$. Cada región que corresponde a un sitio p_i se denotará como $\mathcal{V}(p_i)$ y será llamada **región de Voronoi** de p_i .

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Teselado

Diagrama de Voronoi

Triangulación de Delaunay

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Teselado irregular

Polígonos de Voronoi (o de Thiessen)

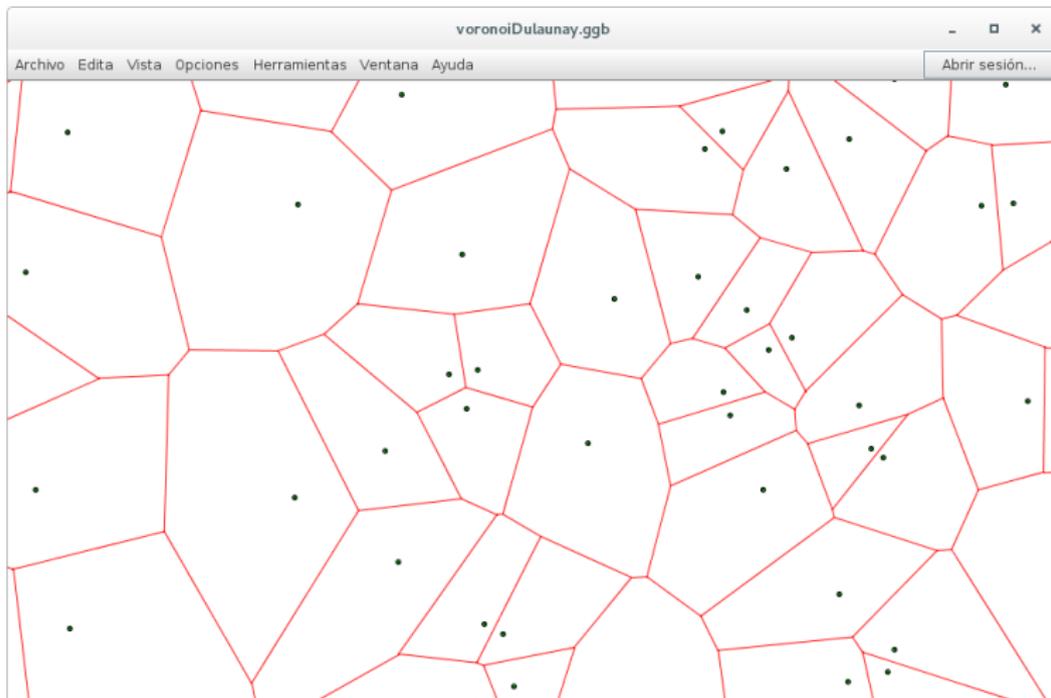


Figura: Ejemplo de un diagrama de Voronoi.

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Teselado

Diagrama de Voronoi

Triangulación de Delaunay

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Teselado irregular

Condición de Delaunay

Definición. (Condición de Delaunay)

La *circunferencia circunscrita* de un triángulo es la circunferencia que contiene los tres vértices del triángulo. Según la definición de Delaunay la circunferencia circunscrita es **vacía**, si no contiene otros vértices aparte de los tres que la definen.

Definición.

Sea P un conjunto de cuatro o más puntos en el plano. Una red de triángulos, cuyos vértices son los elementos de P , es una **triangulación de Delaunay** si todas las circunferencias circunscritas de todos los triángulos de la red son vacías.

Abrir <http://ggbtu.be/m2803571>.

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Teselado

Diagrama de Voronoi

Triangulación de Delaunay

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Teselado irregular

Condición de Delaunay

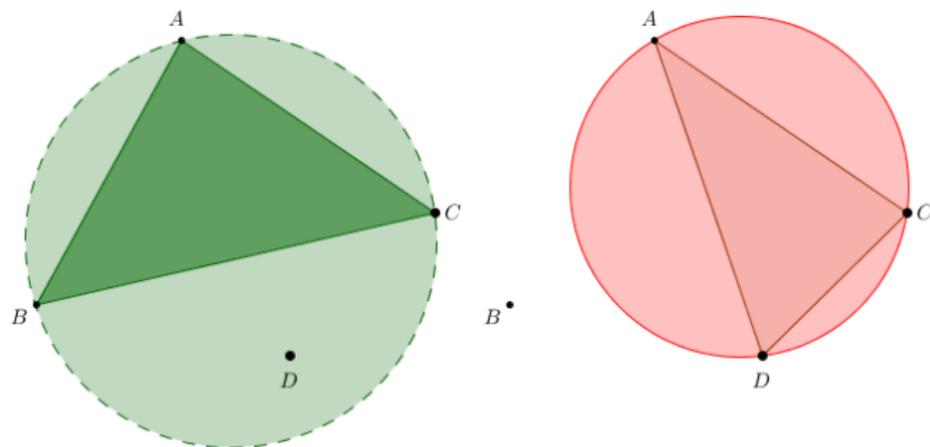


Figura: Circunferencia no vacía – Circunferencia vacía.

Consultar <https://youtu.be/Ix8vuoHysa0>.

Teselado irregular

Triangulación de Delaunay

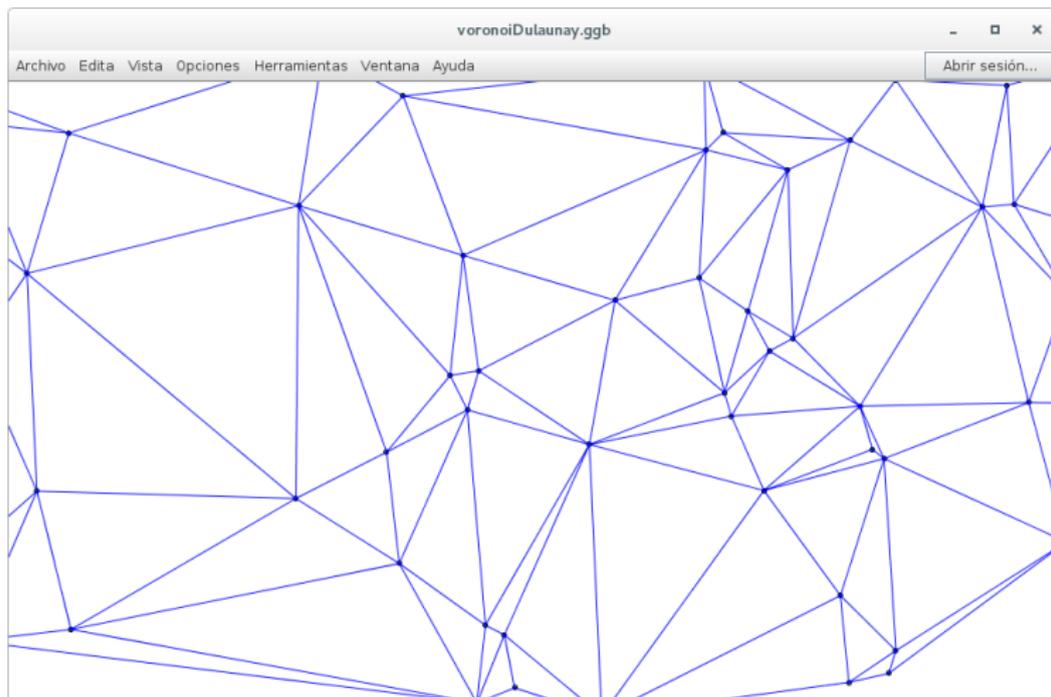


Figura: Ejemplo de la triangulación de Delaunay.

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Teselado

Diagrama de Voronoi

Triangulación de Delaunay

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Problemas duales 1

Triangulación de Delaunay – Polígono de Voronoi

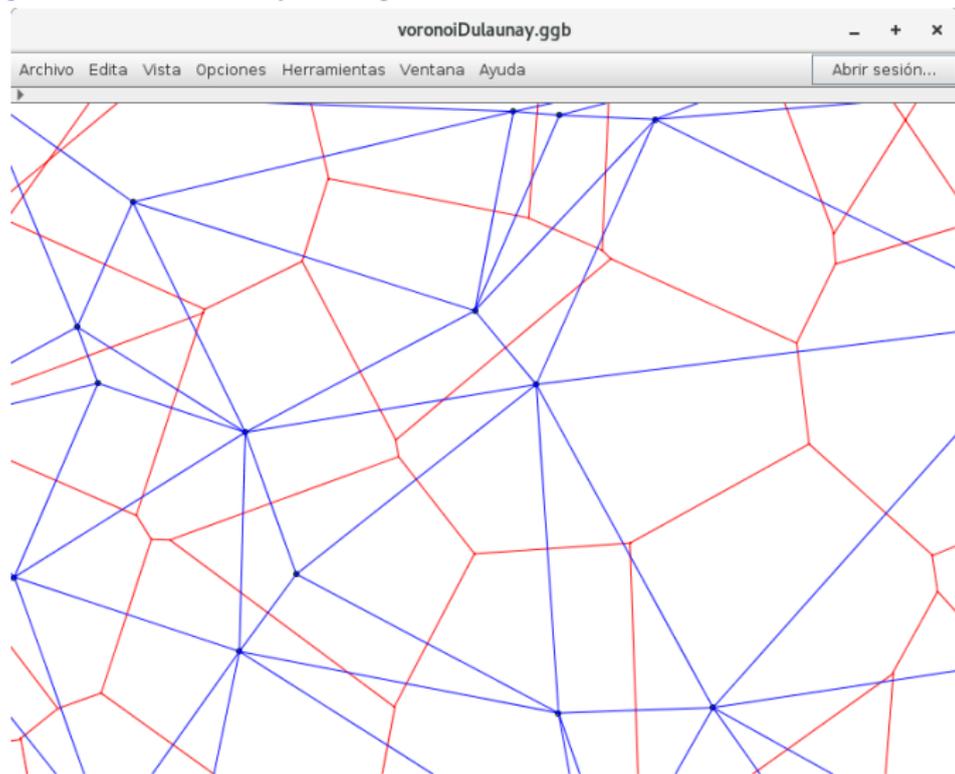


Figura: Triangulación de Delaunay – Polígono de Voronoi.

Teselado irregular

Propiedades Voronoi

En lo que sigue, en el conjunto P se supone que no existen cuatro puntos cíclicos.

Teorema.

Sea P un conjunto de n sitios en el plano. Si todos los sitios son colineales, entonces $\text{Vor}(P)$ consiste de $n - 1$ líneas paralelas. De otra forma, $\text{Vor}(p)$ es conexo y sus aristas podrían ser segmentos de recta o semirrectas.

Teorema.

Para $n \geq 3$, el número de vértices en el diagrama de Voronoi de un conjunto de n sitios en el plano es a lo más $2n - 5$ y el número de aristas es a lo más $3n - 6$.

Teselado irregular

Propiedades Voronoi

Teorema.

Cada vecino más cercano del sitio p_i en P define una arista de $\mathcal{V}(p_i)$.

Teorema.

La región de Voronoi $\mathcal{V}(p_i)$ es abierta (región infinita) si y sólo si p_i es un punto en la envolvente convexa del conjunto P .

Teorema.

La gráfica dual del diagrama de Voronoi define la triangulación de Delaunay.

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Teselado

Diagrama de Voronoi

Triangulación de Delaunay

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Teselado irregular

Envolvente convexa

Definición.

Dado un conjunto finito de puntos P , la **envolvente convexa** de P denotado por $EC(P)$ es el conjunto convexo Q más pequeño que contiene a P . Se supone que P tiene al menos tres puntos y éstos son no colineales.

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Teselado

Diagrama de Voronoi

Triangulación de Delaunay

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Teselado irregular

Envolvente convexa

Definición.

Dado un conjunto finito de puntos P , la **envolvente convexa** de P denotado por $EC(P)$ es el conjunto convexo Q más pequeño que contiene a P . Se supone que P tiene al menos tres puntos y éstos son no colineales.

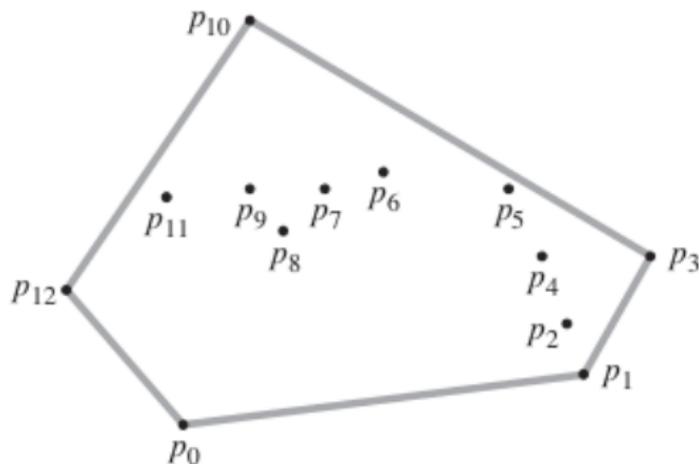


Figura: Conjunto de puntos $P = \{p_1, \dots, p_{12}\}$, $EC(P)$ está en gris.

Problemas duales 2

Envolvente convexa – Polígono de Voronoi

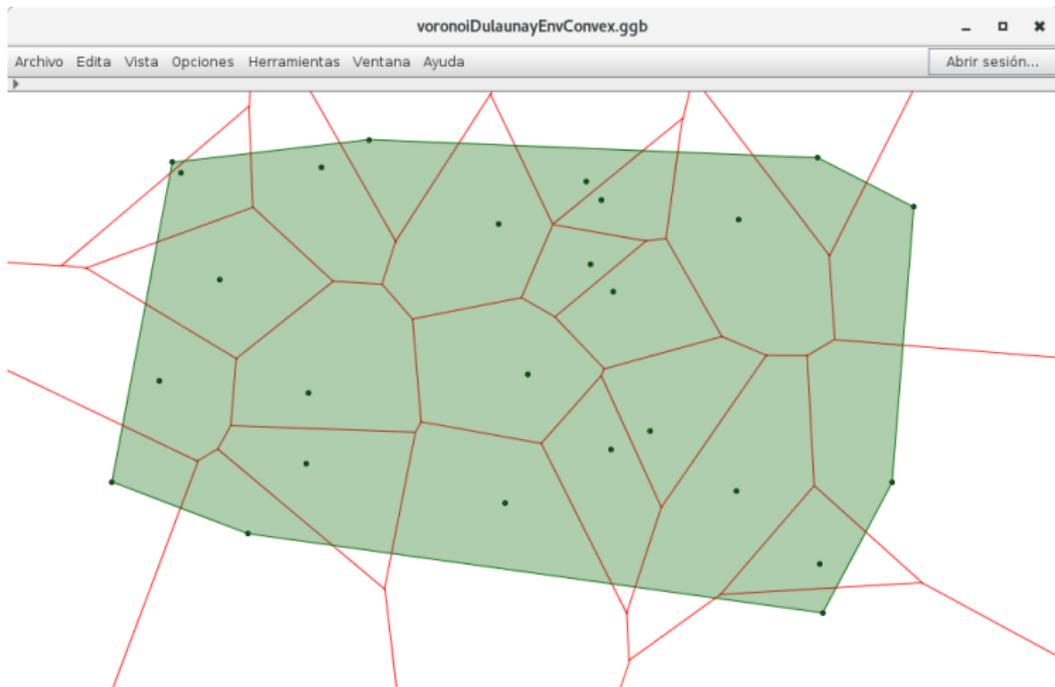


Figura: Ejemplo de una envolvente convexa.

Teselado irregular

Propiedades Delaunay

Teorema.

La triangulación forma la envolvente convexa del conjunto de puntos.

Teorema.

El ángulo mínimo dentro de todos los triángulos está maximizado. Los ángulos del interior de los triángulos son lo más grandes posible.

Teorema.

La triangulación es única si en ningún borde de circunferencia circunscrita hay más que tres vértices.

Demostración.

Para los detalles de todas las demostraciones consultar [4].



Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Problema de los dos puntos

Problema de los tres puntos

Teselado

Diagrama de Voronoi

Triangulación de Delaunay

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Geometría Computacional

Conceptos y preguntas

La **geometría computacional** es la rama de la informática que estudia algoritmos para resolver problemas geométricos.

En la ingeniería y las matemáticas modernas, geometría computacional tiene aplicaciones en campos tan diversos como la infografía, la robótica, el diseño VLSI (*Very Large Scale Integration* – integración a escala muy grande), diseño asistido por computadora, modelado molecular, metalurgia, el diseño textil, forestal y estadísticas.

La *entrada* en un problema de geometría computacional es típicamente una descripción de un conjunto de objetos geométricos, tales como un conjunto de puntos, un conjunto de segmentos de recta, o los vértices de un polígono con sentido antihorario. La *salida* es a menudo una respuesta a una pregunta sobre los objetos, si algunas de las rectas se cruzan, o tal vez un nuevo objeto geométrico, digamos la envolvente convexa del conjunto de puntos.

Geometría Computacional

Conceptos y preguntas

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Muchos de los algoritmos en geometría computacional requieren la respuesta a preguntas acerca de propiedades de segmentos de recta.

Algunas de las preguntas:

1. ¿Dados dos segmentos dirigidos $\overrightarrow{p_0p_1}$ y $\overrightarrow{p_0p_2}$, está $\overrightarrow{p_0p_1}$ en sentido horario de $\overrightarrow{p_0p_2}$ con respecto a su punto extremo común p_0 ?
2. ¿Dados dos segmentos de recta $\overline{p_0p_1}$ y $\overline{p_1p_2}$, si se recorre $\overline{p_0p_1}$ y luego $\overline{p_1p_2}$, hacemos un giro a la izquierda en el punto p_1 ?
3. ¿Los segmentos $\overline{p_1p_2}$ y $\overline{p_3p_4}$ se cruzan?

Algoritmos – Voronoi

Fuerza bruta

Algoritmo. (Fuerza bruta)

Por cada sitio $p_i \in P$ se construirá su región de Voronoi a través del cálculo explícito de los $n - 1$ semiplanos originados debido a los mediatrices trazadas con respecto a los demás sitios. Posteriormente, se computará la intersección de estos $n - 1$ semiplanos para, finalmente, dar origen a $\mathcal{V}(p_i)$.

Desventajas:

- ▶ Problemas de precisión en la computadora.
- ▶ No se produce información inmediata de los vecinos más próximos.
- ▶ El algoritmo tiene una complejidad del orden de $O(n^2 \lg n)$.

Algoritmos – Voronoi

Algoritmo de de Fortune (recta de barrido)

El algoritmo de Fortune está basado en una de las técnicas clave dentro de la *geometría computacional* y que se denomina: **recta de barrido**. La esencia de esta técnica yace en suponer que existe una recta ℓ que recorre el plano de arriba hacia abajo (o de izquierda a derecha, incluso en direcciones opuestas) y que a lo largo de su recorrido interseca las estructuras que deseamos procesar.

Cuando se da esta intersección, se guarda cierta información de tal forma que ayude en los cálculos. La invariante que se cumple es que la información que se haya obtenido en regiones ya visitadas por la recta nunca va a cambiar.

Teorema.

El algoritmo de Fortune requiere un tiempo de ejecución de $O(n \lg n)$ con un costo de almacenamiento del orden $O(n)$.

Demostración.

Para los detalles consultar [4].



Algoritmos – Voronoi

Algoritmo de de Fortune (barrido de recta)

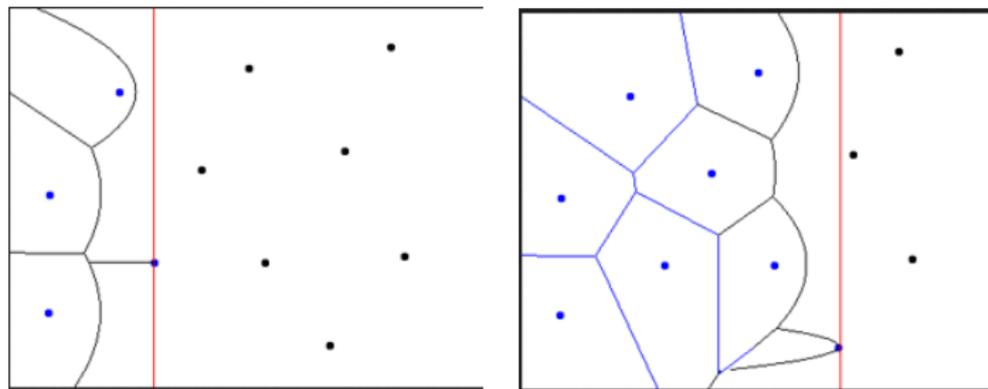


Figura: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/25/Fortunes-algorithm.gif>

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

Inicialmente los diagramas de Voronoi los utilizó el meteorólogo estadounidense Alfred H. Thiessen, (*polígonos de Thiessen*) y los utilizó para el análisis de datos meteorológicos (estaciones pluviométricas).

En la actualidad también se aplican en estudios en los que hay que determinar áreas de influencia (centros hospitalarios, estaciones de bomberos, bocas de metro, centros comerciales, control del tráfico aéreo, telefonía móvil, análisis de poblaciones de especies vegetales, etcétera). Es una de las funciones de análisis básicas en los *Sistemas de Información Geográfica (SIG)*.

Para un ejemplo de **zonas de influencia dinámica** consultar <https://www.geogebra.org/m/mDdKFMjV>.

Aplicaciones

Diagramas de Voronoi

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

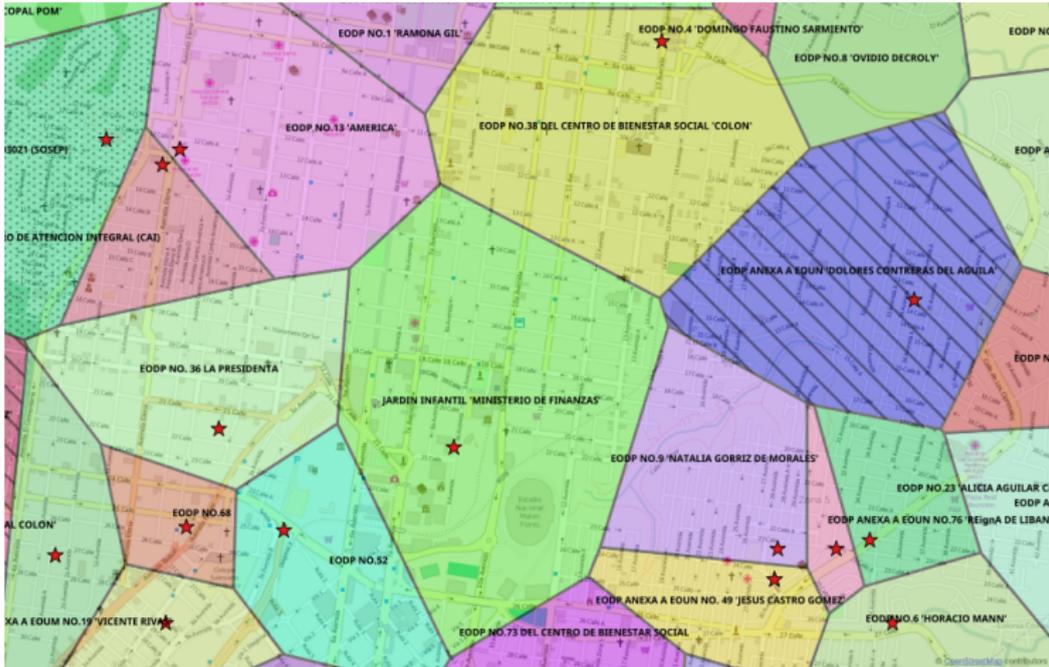


Figura: Zonas de influencia de escuelas de párvulos.

Aplicaciones

Triangulación

Problemas duales en el plano

William Gutiérrez

Preguntas básicas

Problemas elementales y soluciones

Algoritmos

Aplicaciones

Referencias

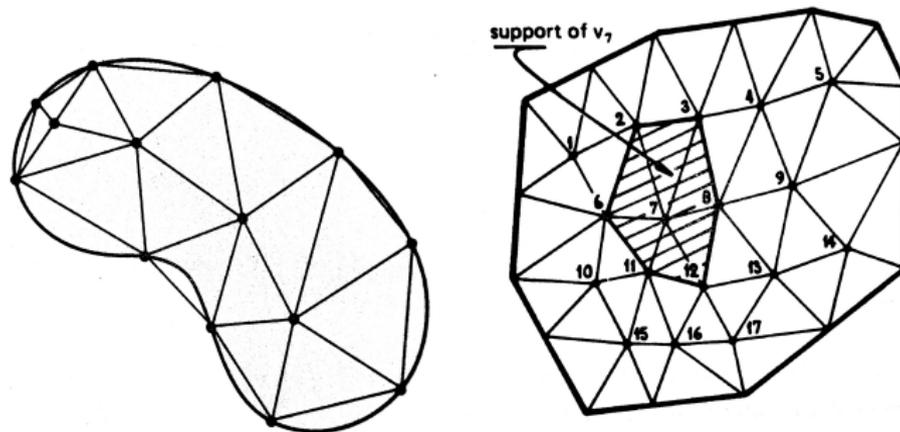


Figura: Método del elemento finito (problemas de valor frontera 2D)

Aplicaciones

Triangulación

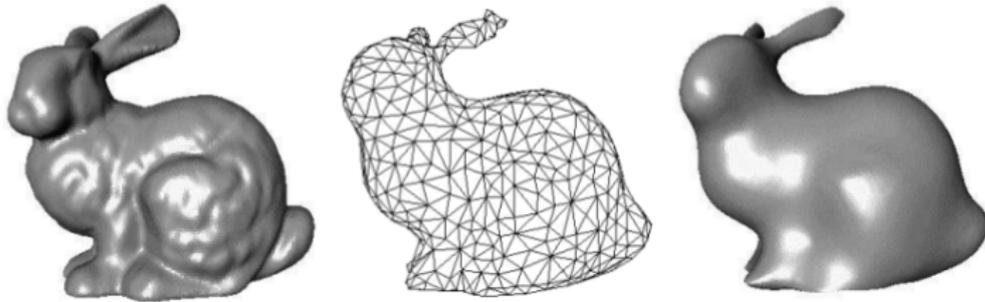


Figura: Renderizado de superficies.

Referencias

Líbrros, artículos, reportes, páginas web

-  Bujalich y Gómez (2002). *Geometría*. Cuadernos de Olimpiada de Matemáticas. México: Instituto de Matemáticas, UNAM.
-  Burden y Faires (1998). *Análisis numérico*. Sexta edición. México: International Thomson Editores.
-  Coxeter (1971). *Fundamentos de Geometría*. México: Editorial Limusa-Wiley.
-  de Berg, Cheong, van Kreveld y Overmars (2008). *Computational Geometry – Algorithms and Applications*. Tercera edición. Berlin: Springer-Verlag.
-  Ciarlet (1989). *Introduction to numerical linear algebra and optimisation*. Reino Unido: Cambridge University Press.
-  Cormen, Leiserson, Rivest y Stein (2009). *Introduction to Algorithms*. Tercera edición. Cambridge: The MIT Press.

Referencias

(Continuación ...)

-  Kobbelt y otros (2000). Geometric Modeling Based on Polygonal Meshes. Research Report. Alemania: Max-Planck-Institut für Informatik.
-  William Gutiérrez. Zonas de influencia para dos puntos. Disponible en <http://tube.geogebra.org/m/2803343>.
-  William Gutiérrez. Zonas de influencia para tres puntos. Disponible en <http://tube.geogebra.org/m/2803365>.
-  William Gutiérrez. Polígonos de Voronoi y Triangulación de Delaunay. Disponible en <http://ggbm.at/jTjmGEZ8>.
-  GeoGebra, matemáticas dinámicas.
<https://www.geogebra.org/cms/es/>.
-  QGIS, sistema de información geográfica.
<http://qgis.org/es/site/>.

¡Gracias por su atención!