12 月 10 日作业

1．判断下列命题是全称量词命题还是存在量词命题，并写出它们的否定：

(1)p：对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$x^2+x+1=0$ 都成立；

答：全称量词命题

$\neg p$：$\exists x\in R$，$x^2+x+1\neq 0$ 成立.

(2)p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+5>0$.

答：存在量词命题

$\forall x\in R$，$x^2+2x+5\leq 0$.

2．(1)若正数 x，y 满足 $x+y+8=xy$，求 xy 的取值范围．

解：$\because x+y+8=xy$，$x>0$，$y>0$

$\therefore xy=x+y+8\geq 2\sqrt{xy}+8$

$\therefore (\sqrt{xy})^2-2\sqrt{xy}-8\geq 0$

$\therefore (\sqrt{xy}-4)(\sqrt{xy}+2)\geq 0$

$\therefore \sqrt{xy}\geq 4$ 或 $\sqrt{xy}\leq -2$（舍）

$\therefore xy\geq 16$ 即 $xy\in[16,+\infty)$

(2)已知 a，b，c 都为正实数，且 $a+b+c=1$.求证：$\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\geq 10$.

证明：$\because a>0, b>0, c>0$ 且 $a+b+c=1$

$\therefore (a+\frac{1}{a})+(b+\frac{1}{b})+(c+\frac{1}{c})$

$=a+\frac{a+b+c}{a}+b+\frac{a+b+c}{b}+c+\frac{a+b+c}{c}$

$=(a+b+c)+1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$

$=4+(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})+(\frac{c}{b}+\frac{b}{c})$

$\geq 4+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=4+2+2+2=10$

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时等号成立.

3．已知函数 $f(x)=|x-1|+|x+1|(x\in\mathbf{R})$，

(1)证明：函数 $f(x)$是偶函数；

证明：$\because f(-x)=|-x-1|+|-x+1|=|x+1|+|x-1|=f(x)$

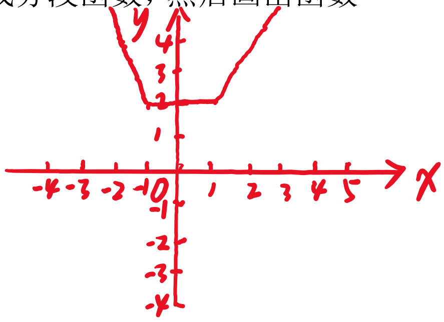
$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是偶函数.

(2)利用绝对值及分段函数知识，将函数解析式写成分段函数，然后画出函数图象；

解：$f(x)$的零点是 $-1, 1$.

$$\therefore f(x)=\begin{cases} -2x, & x<-1 \\ 2, & -1\le x\le 1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$$

函数图象如右图：



(3)写出函数的值域.

解：$f(x)\in[2,+\infty)$

4．已知指数函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$过点$(-2,9)$.

(1)求函数 $f(x)$的解析式；

解：$\because f(-2)=9$

$\therefore a^{-2}=9$

$a^{-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$\therefore a=\frac{1}{3}$　　$\therefore f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 或 $f(x)=3^{-x}$.

(2)若 $f(2m-1)-f(m+3)<0$，求实数 m 的取值范围.

解：$\because f(2m-1)-f(m+3)<0$

$\therefore 3^{1-2m}-3^{-m-3}<0$

即 $3^{1-2m}<3^{-m-3}$

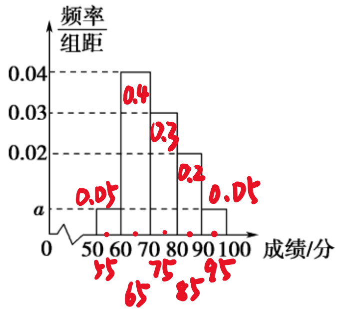
$\because y=3^x$ 是增函数

$\therefore 1-2m<-m-3$

$\therefore m>4$

$\therefore m\in(4,+\infty)$.

5．某校 100 名学生期中考试化学成绩(单位：分)的频率分布直方图如图所示，其中成绩分组区间是[50,60)，[60,70)，[70,80)，[80,90)，[90,100]．



(1)求图中 a 的值；

解：$\because a=\dfrac{[1-(0.4+0.3+0.2)]\div 2}{10}=0.005$

即 $a=0.005$.

(2)根据频率分布直方图，估计这 100 名学生化学成绩的平均分；

解：$\bar{x}=55\times0.05+65\times0.4+75\times0.3+85\times0.2+95\times0.05$

$=2.75+26+22.5+17+4.75$

$=73$

这100名学生化学成绩平均分为73分.

(3)若这 100 名学生化学成绩某些分数段的人数 x 与数学成绩相应分数段的人数 y 之比如下表所示，求数学成绩在[50,90]之外的人数．

分数段	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)
$x:y$	1∶1	2∶1	3∶2	4∶5
	5	40	30	20

解：化学成绩在[50,60)内人数为 $100\times0.05=5$

则此区间数学人数为5人；

化学成绩在[60,70)内人数为 $100\times0.4=40$

则此区间数学人数为20人；

化学成绩在[70,80)内人数为 $100\times0.3=30$

则此区间数学人数为20人；

化学成绩在[80,90)内人数为 $100\times0.2=20$

则此区间数学人数为25人 则数学成绩在[50,90]外30人.