

5.3 การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

A | กิจกรรม : สำรวจกำลังสองสมบูรณ์

จงเติมพหุนามลงในตารางต่อไปนี้

ข้อ	โจทย์	เขียนในรูปการคูณ	ผลคูณที่ได้	อาจจัดรูปได้เป็น
1	$(x + 3)^2$	$(x + 3)(x + 3)$	$x^2 + 3x + 3x + 3^2$	$x^2 + 2(3x) + 3^2$
2	$(y + 5)^2$			
3	$(3x + 1)^2$			
4	$(5z + 4)^2$			
5	$(A + B)^2$			
6	$(x - 4)^2$	$(x - 4)(x - 4)$	$x^2 - 4x - 4x + 4^2$	$x^2 - 2(4x) + 4^2$
7	$(y - 6)^2$			
8	$(9x - 1)^2$			
9	$(2x - 7)^2$			
10	$(A - B)^2$			



คำถามท้ายกิจกรรม

จากกิจกรรมข้างต้น นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์อะไร จงอธิบาย



มุกเทคโนโลยี

นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ GSP เพื่อทำกิจกรรมเกี่ยวกับการสำรวจกำลังสองสมบูรณ์เพิ่มเติมได้ที่ <http://ipst.me/9160>



พิจารณาการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองต่อไปนี้

$$1. \quad x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3)$$

$$\text{หรือ } x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

$$2. \quad x^2 - 8x + 16 = (x - 4)(x - 4)$$

$$\text{หรือ } x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$$

$$3. \quad 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)(2x + 1)$$

$$\text{หรือ } 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

$$4. \quad 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)(3x - 4)$$

$$\text{หรือ } 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

จากตัวอย่างการแยกตัวประกอบของพหุนามทั้งสี่ข้อข้างต้น จะเห็นว่าการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในแต่ละข้อ จะได้ตัวประกอบเป็นพหุนามเดียวกัน ที่มีดีกรีเป็นหนึ่ง จึงเขียนการแยกตัวประกอบของแต่ละพหุนามดีกรีสองข้างต้นได้เป็นกำลังสองของพหุนามดีกรีหนึ่ง เรียกพหุนามดีกรีสองที่มีลักษณะเช่นนี้ว่า พหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ (perfect square)

พหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ดังตัวอย่างข้างต้น มีลักษณะพิเศษที่สังเกตได้ ดังนี้

$$1. \quad x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2(x)(3) + 3^2 \\ = (x + 3)^2$$

ถ้าให้ x เป็นพจน์หน้าและ 3 เป็นพจน์หลัง จะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$(\text{พจน์หน้า})^2 + 2(\text{พจน์หน้า})(\text{พจน์หลัง}) + (\text{พจน์หลัง})^2 = (\text{พจน์หน้า} + \text{พจน์หลัง})^2$$

$$2. \quad x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2(x)(4) + 4^2 \\ = (x - 4)^2$$

ถ้าให้ x เป็นพจน์หน้าและ 4 เป็นพจน์หลัง จะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$(\text{พจน์หน้า})^2 - 2(\text{พจน์หน้า})(\text{พจน์หลัง}) + (\text{พจน์หลัง})^2 = (\text{พจน์หน้า} - \text{พจน์หลัง})^2$$

$$3. \quad 4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2(2x)(1) + 1^2 \\ = (2x + 1)^2$$

ถ้าให้ $2x$ เป็นพจน์หน้าและ 1 เป็นพจน์หลัง จะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$(\text{พจน์หน้า})^2 + 2(\text{พจน์หน้า})(\text{พจน์หลัง}) + (\text{พจน์หลัง})^2 = (\text{พจน์หน้า} + \text{พจน์หลัง})^2$$

$$4. \quad 9x^2 - 24x + 16 = (3x)^2 - 2(3x)(4) + 4^2 \\ = (3x - 4)^2$$

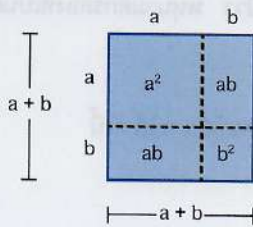
ถ้าให้ $3x$ เป็นพจน์หน้าและ 4 เป็นพจน์หลัง จะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้
 $(พจน์หน้า)^2 - 2(พจน์หน้า)(พจน์หลัง) + (พจน์หลัง)^2 = (พจน์หน้า - พจน์หลัง)^2$

ในกรณีทั่วไป ถ้าให้ A แทนพจน์หน้า และ B แทนพจน์หลัง จะแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ตามสูตร ดังนี้

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2 \\ A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

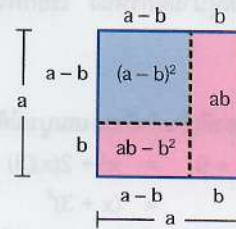
1.2.3 | มุมคณิต

จากรูป



จะเห็นว่า $(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
 ดังนั้น $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)^2$

จากรูป



จะเห็นว่า $(a - b)(a - b) = a^2 - ab - (ab - b^2)$
 $= a^2 - 2ab + b^2$
 ดังนั้น $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b) = (a - b)^2$

พิจารณการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ โดยใช้สูตรข้างต้น เมื่อให้ A และ B เป็นเอกนาม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 24x + 144$

วิธีทำ $x^2 + 24x + 144 = x^2 + 2(12)x + 12^2$

ดังนั้น $x^2 + 24x + 144 = (x + 12)^2$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 26x + 169$

วิธีทำ $x^2 - 26x + 169 = x^2 - 2(13)x + 13^2$
 ดังนั้น $x^2 - 26x + 169 = (x - 13)^2$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ $25x^2 + 20x + 4$

วิธีทำ $25x^2 + 20x + 4 = (5x)^2 + 2(5x)(2) + 2^2$
 ดังนั้น $25x^2 + 20x + 4 = (5x + 2)^2$

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ $4x^2 - 12x + 9$

วิธีทำ $4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2(2x)(3) + 3^2$
 ดังนั้น $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$

จากสูตร

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

เราสามารถใช้อนุกรมเหล่านี้ เพื่อแยกตัวประกอบในกรณีที่มี A และ B เป็นพหุนาม ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบของ $(x + 1)^2 + 14(x + 1) + 49$

วิธีทำ $(x + 1)^2 + 14(x + 1) + 49 = (x + 1)^2 + 2(7)(x + 1) + 7^2$
 $= (x + 1 + 7)^2$

ดังนั้น $(x + 1)^2 + 14(x + 1) + 49 = (x + 8)^2$

$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$

ตัวอย่างที่ 6 จงแยกตัวประกอบของ $4x^2 - 4(x^2 - 3x) + (x - 3)^2$

วิธีทำ $4x^2 - 4(x^2 - 3x) + (x - 3)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(x - 3) + (x - 3)^2$
 $= (2x)^2 - 2(2x)(x - 3) + (x - 3)^2$
 $= [2x - (x - 3)]^2$
 $= (2x - x + 3)^2$

ดังนั้น $4x^2 - 4(x^2 - 3x) + (x - 3)^2 = (x + 3)^2$

$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$



มุมเทคโนโลยี

นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ GSP เพื่อฝึกการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ เพิ่มเติมได้ที่ <http://ipst.me/9161>



สุ่มโจทย์ $x^2 - 10x + 25$

คำตอบ $(x - 5)(x - 5)$

123 | มุมคณิต

จากสูตร $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$ เรียก $(A + B)^2$ ว่า ผลบวกทั้งหมดยกกำลังสอง

และ $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$ เรียก $(A - B)^2$ ว่า ผลต่างทั้งหมดยกกำลังสอง

จากสูตรข้างต้น เพื่อให้จำได้ง่ายขึ้น อาจเขียนย่อ ๆ ดังนี้

$$(\text{หน้า})^2 + 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า} + \text{หลัง})^2$$

$$\text{และ } (\text{หน้า})^2 - 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า} - \text{หลัง})^2$$





กิจกรรม : ค้นหาเส้นทางกำลังสองสมบูรณ์



ข้าวปุ้นต้องการไปเก็บแอปเปิลที่ท้ายสวน แต่เส้นทางที่ข้าวปุ้นจะเลือกเดินนั้น ต้องเป็นเส้นทางของพหุนามที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์เท่านั้น เพื่อน ๆ ช่วยข้าวปุ้นหาเส้นทางหน่อยนะคะ

$$9x^2 + 15x + 6$$

$$x^2 - 30x + 225$$

$$16x^2 - 44x + 30$$

$$x^2 + 14x + 48$$

$$9x^2 + 42x + 49$$

$$x^2 - 36x + 324$$

$$81x^2 - 36x + 4$$

$$4x^2 + 28x + 45$$

$$x^2 - 21x + 110$$

$$x^2 + 17x + 72$$

$$x^2 - 42x + 441$$

$$x^2 + 15x + 44$$

$$x^2 + 20x + 99$$

$$25x^2 - 45x + 20$$

$$121x^2 + 22x + 1$$

$$2x^2 - 30x + 100$$

$$5x^2 - 12x + 4$$

$$100x^2 + 20x + 1$$

$$4x^2 - 12x + 9$$

$$9x^2 - 15x + 6$$

$$4x^2 + 22x + 30$$

$$9(x-2)^2 - 42(x-2) + 49$$

$$x^2 - 25x + 156$$

$$121x^2 + 88x + 15$$



แบบฝึกหัด 5.3

โรงเรียนขององค์การบริหารส่วนตำบล : แพร่ทอง



1. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $x^2 + 12x + 36$

2) $x^2 + 16x + 64$

3) $x^2 + 34x + 289$

4) $x^2 + 40x + 400$

5) $x^2 + 46x + 529$

6) $x^2 - 10x + 25$

7) $x^2 - 28x + 196$

8) $x^2 - 38x + 361$

9) $x^2 - 52x + 676$

10) $x^2 - 60x + 900$

2. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $9x^2 + 30x + 25$

2) $16x^2 + 56x + 49$

3) $49x^2 + 42x + 9$

4) $100x^2 + 220x + 121$

5) $81x^2 + 360x + 400$

6) $4x^2 - 36x + 81$

7) $49y^2 - 70y + 25$

8) $64y^2 - 176y + 121$

9) $81x^2 - 180x + 100$

10) $225x^2 - 360x + 144$

3. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $(x - 2)^2 + 12(x - 2) + 36$

2) $(2x + 1)^2 + 20(2x + 1) + 100$

3) $(x + 3)^2 - 16(x + 3) + 64$

4) $(4x - 5)^2 - 26(4x - 5) + 169$

5) $36(x + 6)^2 + 108(x + 6) + 81$

6) $9(x - 1)^2 - 30(x - 1) + 25$

7) $16x^2 + 8x(x + 1) + (x + 1)^2$

8) $(x - 3)^2 - 12x(x - 3) + 36x^2$

9) $49x^2 + 14(x^2 - x) + (x - 1)^2$

10) $(x + 2)^2 - 18(x^2 + 2x) + 81x^2$

4. จงเติมพจน์ที่หายไปลงในช่องว่าง เพื่อให้พหุนามในรูปผลสำเร็จที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ เป็นพหุนามดีกรีสองที่กำลังสองสมบูรณ์

1) $4x^2 + 24x + \square$

2) $9x^2 - \square + 81$

3) $100x^2 - \square + 1$

4) $x^2 - 18x + \square$

5) $\square + 40x + 100$

6) $\square + 30x + 225$

7) $\square + 108x + 36$

8) $9x^2 - \square + 25$

9) $25x^2 + \square + 225$

10) $16x^2 - 56x + \square$

123 | มุมคณิต

พิจารณาการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่มีสองตัวแปรและเป็นกำลังสองสมบูรณ์จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} 1. \quad 9x^2 + 12xy + 4y^2 &= (3x)^2 + 2(3x)(2y) + (2y)^2 \\ &= (3x + 2y)^2 \\ 2. \quad 36x^2 - 12xy + y^2 &= (6x)^2 - 2(6x)(y) + y^2 \\ &= (6x - y)^2 \end{aligned}$$

ตัวอย่างข้างต้นแสดงการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่มีสองตัวแปรและเป็นกำลังสองสมบูรณ์ ซึ่งทำได้เช่นเดียวกันกับพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียวที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ โดยใช้สูตรดังนี้

$$\begin{aligned} (\text{หน้า})^2 + 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2 &= (\text{หน้า} + \text{หลัง})^2 \\ \text{และ } (\text{หน้า})^2 - 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2 &= (\text{หน้า} - \text{หลัง})^2 \end{aligned}$$

เพื่อน ๆ ช่วยช่วยหามแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้หน่อยนะคะ

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. $4x^2 + 4xy + y^2$ | 2. $m^2 + 44mn + 484n^2$ |
| 3. $100x^2 + 60xy + 9y^2$ | 4. $81t^2 + 90tk + 25k^2$ |
| 5. $x^2 - 16xy + 64y^2$ | 6. $9x^2 - 6xy + y^2$ |

