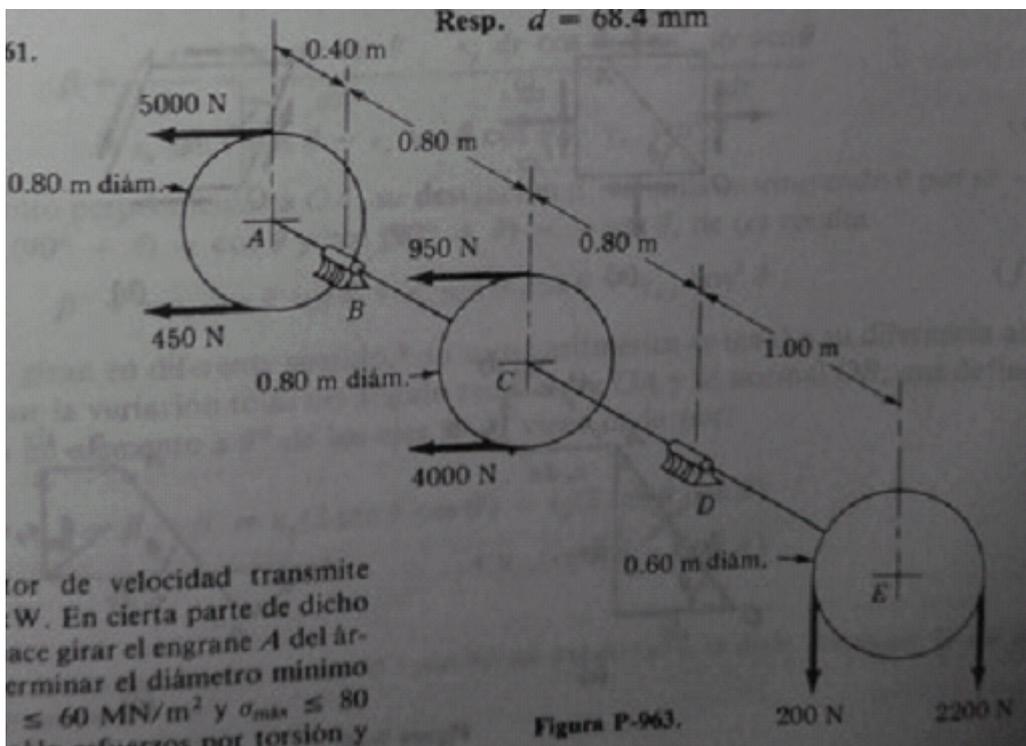


**SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 963<sup>1</sup>**

**ENUNCIADO**

Diseñar un árbol circular macizo para que soporte las cargas indicadas. Si  $\tau_{\text{máx}} \leq 60$  MPa y  $\sigma_{\text{máx}} = 80$  MPa. Las correas de transmisión de las poleas A y C son horizontales y las de la polea E son verticales. Las correas de transmisión de las poleas A y C son horizontales y las de la polea E son verticales.



Este problema es bastante similar al ejemplo-problema 945 del libro de texto. Por lo que se aconseja al estudiante que antes de realizar el problema 963, repase el 945. Las grandes diferencias entre el problema 945 y el 963 son:

- El problema 945 presenta las reacciones en sus soportes, en el problema 963 no. *Se deberán calcular las reacciones en los puntos B y D.*
- Las correas de transmisión están trabajando en distintos planos.
- El diámetro de las poleas en el problema 945 son homogéneas, mientras que en el 963 existen diferentes.

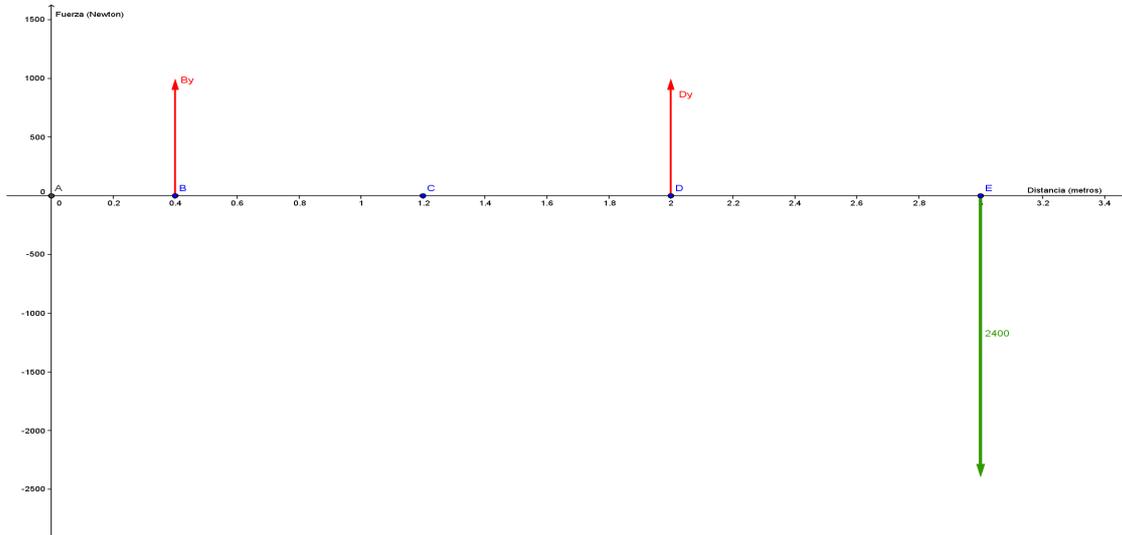
**Es importante recordar que estamos trabajando en “equilibrio”**

<sup>1</sup> Pytel, A. y Singer, F. 1994. Resistencia de materiales. 4ª. Ed. México: HARLA. Página 323.

## A. ANÁLISIS DEL PLANO VERTICAL

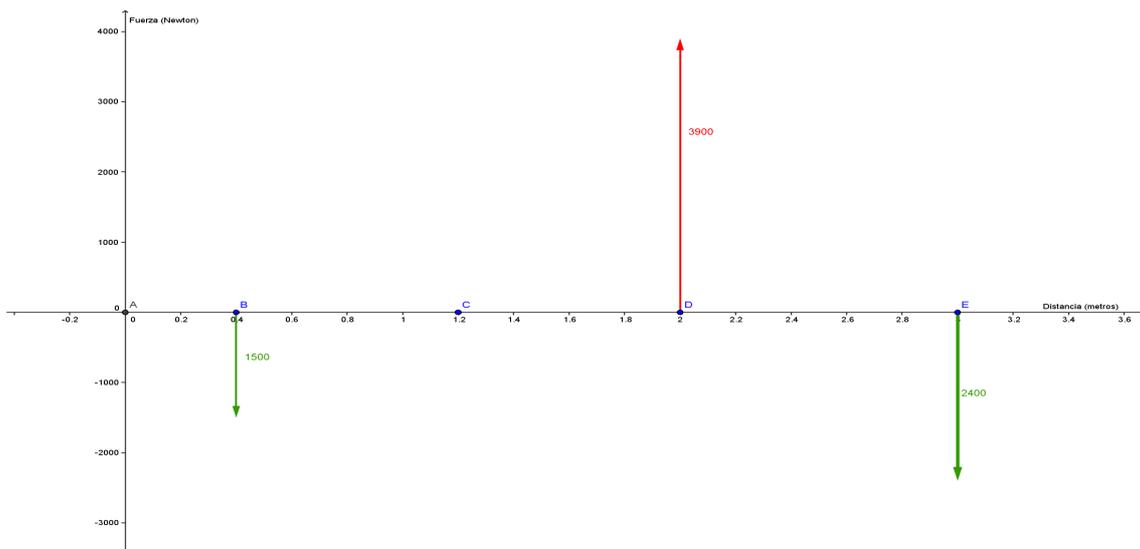
El análisis del plano vertical, tiene el objetivo de llegar a obtener los momentos en el mismo.

- a. Se procederá a presentar el diagrama de fuerzas que actúa en el plano vertical. En este consideraremos la acción de la fuerza por la polea en el punto E, que en total son 2400 N.



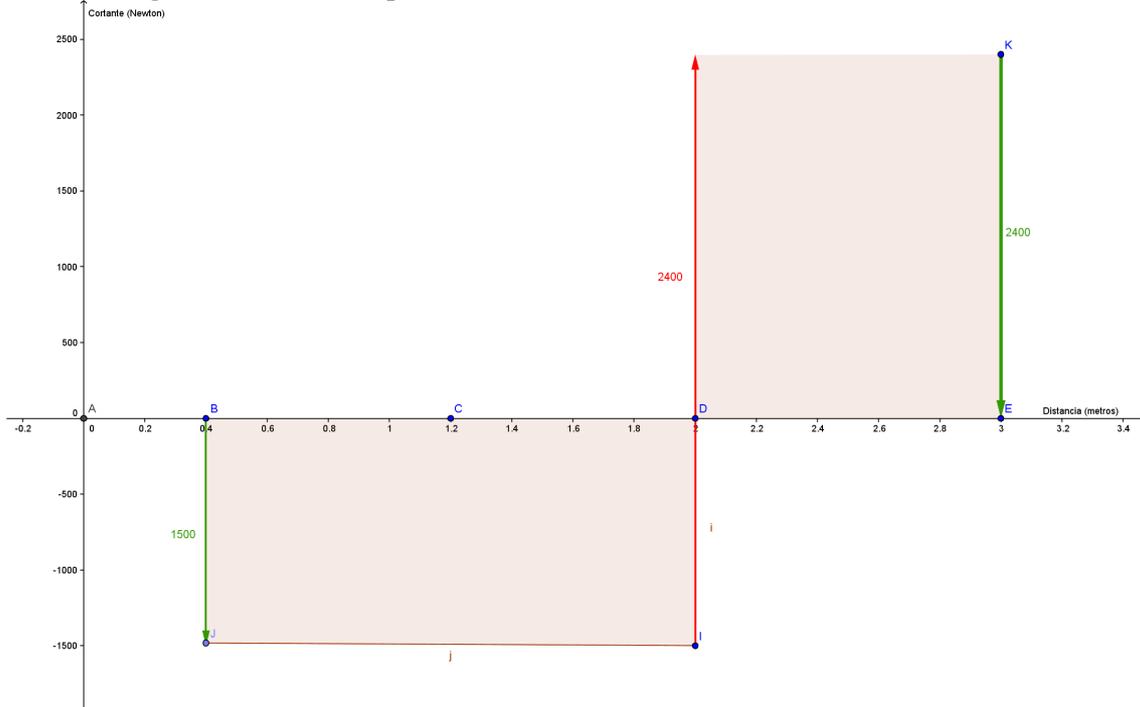
Para encontrar las reacciones  $B_y$  y  $D_y$ , Suponemos que la estructura está simplemente apoyada y hacemos sumatoria de fuerzas en  $y$ , y suma de momentos respecto a B o D. Obteniendo los siguientes resultados.

$$B_y = -1500 \text{ N}$$
$$D_y = 3900 \text{ N}$$

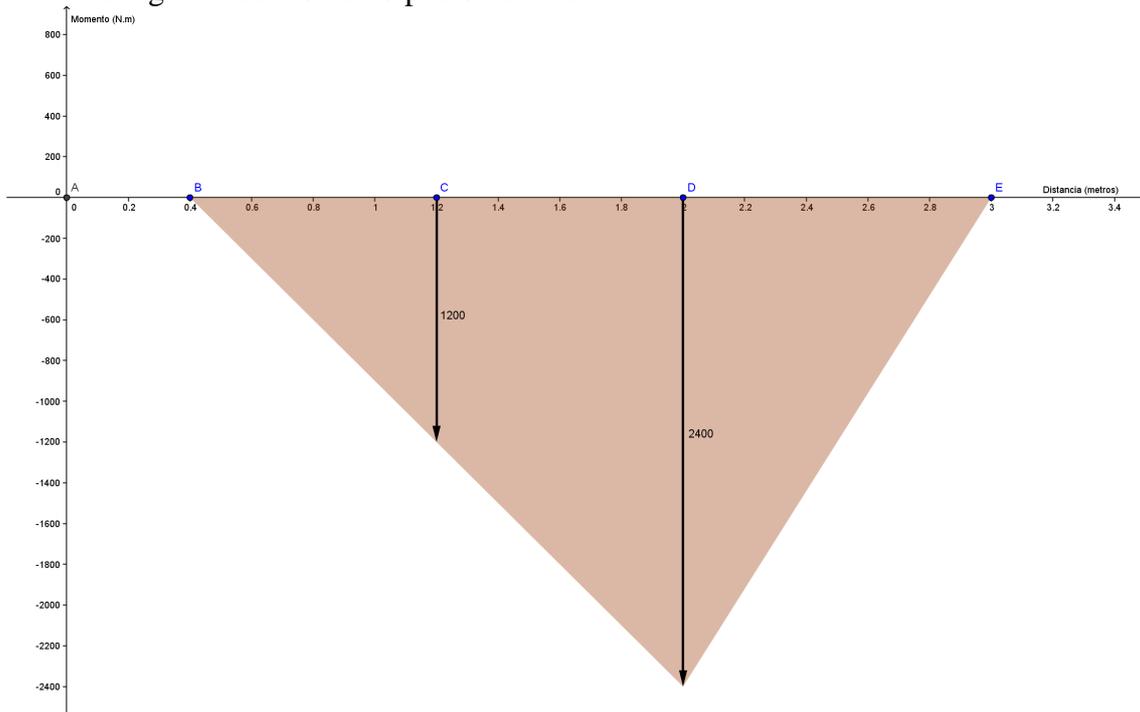


- b. Teniendo las resultantes en los apoyos se prosigue, obteniendo el diagrama de cortante, para luego obtener el diagrama de momento del plano vertical. *El objetivo es el diagrama de momento, el diagrama de cortante es utilizado como herramienta visual para obtener el primero (método de las áreas).*

### Diagrama de cortante plano vertical



### Diagrama de momento plano vertical



## B. ANÁLISIS DEL PLANO HORIZONTAL

Se procede a realizar el mismo procedimiento que en A.

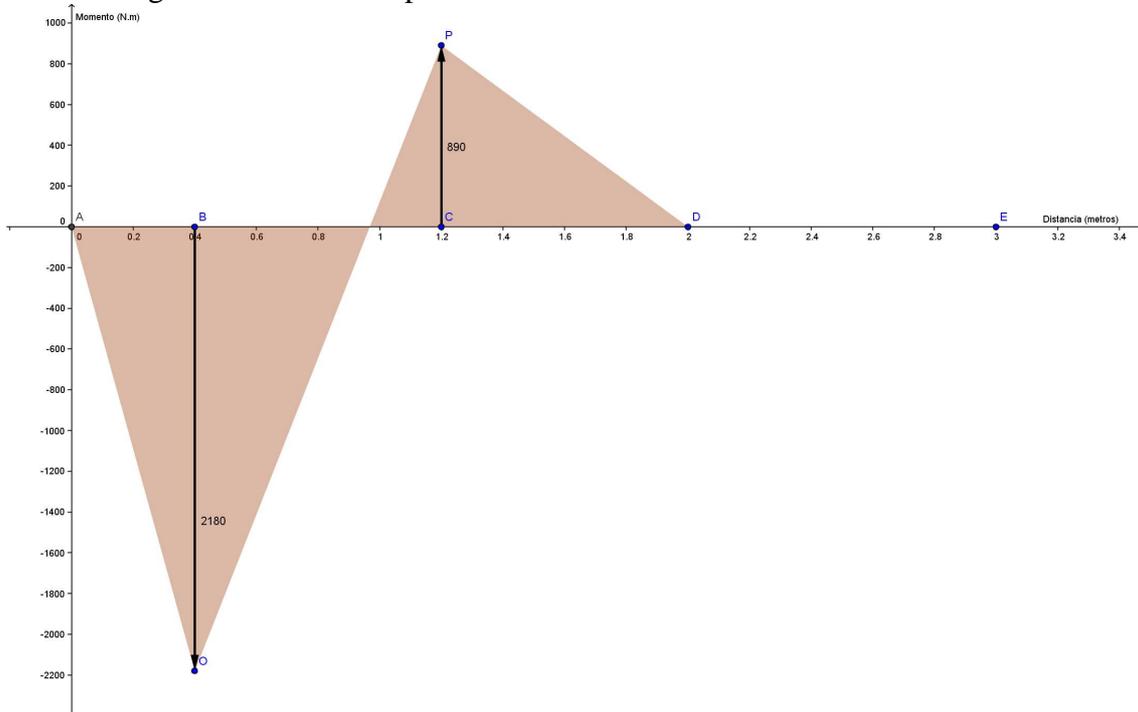
- Se obtienen las reacciones en los soportes, que darán como resultado:

$$B_y = 9287.5 \text{ N}$$

$$D_y = 1112.5 \text{ N}$$

- b. Se procede a obtener el diagrama de momento (se aplica el mismo procedimiento que en A).

Diagrama de momento plano horizontal



### C. MOMENTO FLEXIONANTE RESULTANTE (MFR)

El momento flexionante resultante es el resultado de la combinación entre los momentos en los planos vertical y horizontal.

$$MFR = \sqrt{M_v^2 + M_h^2}$$

A continuación se presenta una tabla con los resultados para cada uno de los puntos en estudio.

PUNTOS	PLANOS		MOMENTO FLECTOR RESULTANTE
	VERTICAL	HORIZONTAL	
A	0	0	0,000
B	0	-2180	2180,000
C	1200	890	1494,021
D	2400	0	2400,000
E	0	0	0,000

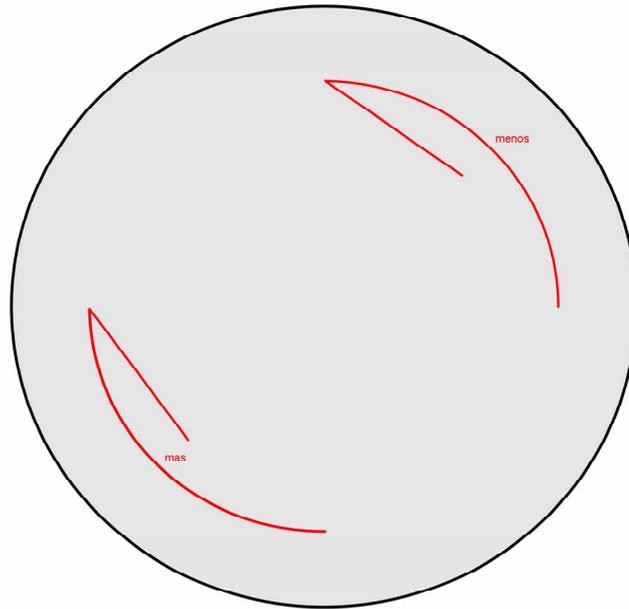
### D. MOMENTO TORSIONANTE

Para obtener el momento torsionante y su diagrama se procederá a realizar el análisis de la siguiente forma.

- Establecer la dirección de torsión para las poleas en los puntos A, C, E.
- Realizar la sumatoria de momento torsionante para cada polea.

$$MT = Fuerza * radio$$

- Sumar los momentos torsionantes totales para establecer equilibrio.



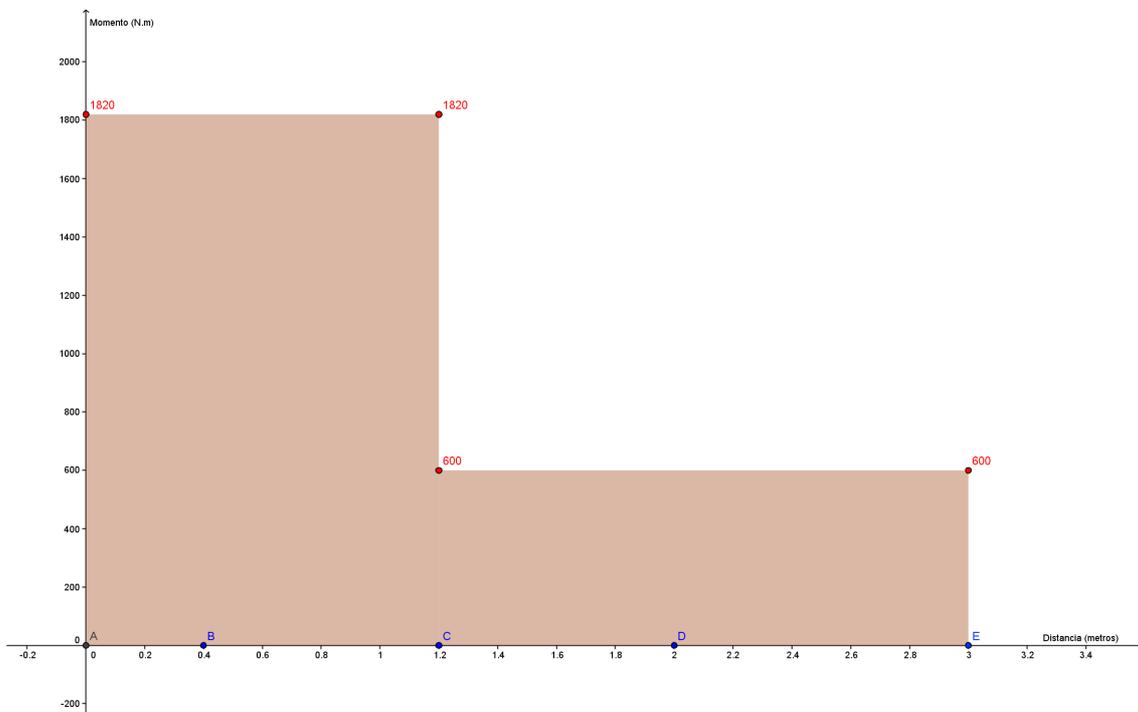
$$MT_A = -(5000N * 0.4m) + (450N * 0.4m) = -1820N.m$$

$$MT_C = -(950N * 0.4m) + (4000N * 0.4m) = 1220N.m$$

$$MT_E = -(200N * 0.3m) + (2200N * 0.3m) = 600N.m$$

$$MT_A + MT_C + MT_E = 0N.m$$

### Diagrama de momento torsionante



### E. MOMENTOS EQUIVALENTES A TORSIÓN Y FLEXIÓN<sup>2</sup>

El siguiente paso consiste en obtener los momentos equivalentes a torsión  $T_E$  y a flexión  $M_E$ , para lo cual procederemos a aplicar las siguientes ecuaciones.

$$T_E = \sqrt{MFT^2 + MT^2}$$
$$M_E = \frac{1}{2}(MFT + T_E)$$

A continuación se presenta una tabla que resume los resultados para cada uno de los puntos en estudio.

PUNTO	MOMENTO FLECTOR RESULTANTE	MOMENTO TORSIONANTE	TE	ME
A	0,000	1820	1820,0000	910,0000
B	2180,000	1820	2839,8592	2509,9296
C	1494,021	1820	2354,6762	1924,3488
D	2400,000	600	2473,8634	2436,9317
E	0,000	600	600,0000	300,0000

Se observa que la sección **crítica** se presenta en el punto **B**, y por lo tanto este determinará el diseño del árbol circular macizo.

### F. DISEÑO DEL ÁRBOL CIRCULAR MACIZO.

- a. El radio del árbol para que el esfuerzo cortante máximo no exceda el admisible, 60MPa, se obtiene de la siguiente manera.

$$\tau = \frac{2T_E}{\pi r^3}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{2T_E}{\pi\tau}} = \sqrt[3]{\frac{2 * 2839.8592}{\pi * 60000000}} = 0.03111m$$

- b. El radio del eje para que el esfuerzo normal máximo no exceda al admisible, 80MPa, se obtiene de la siguiente manera.

$$\sigma = \frac{4M_E}{\pi r^3}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{4M_E}{\pi\sigma}} = \sqrt[3]{\frac{4 * 2509.9296}{\pi * 80000000}} = 0.03418m$$

- c. El mayor de los dos valores obtenidos cumplirá ambas condiciones, por lo que será el diámetro necesario.

$$\text{Radio} = 0.03418 \text{ m}$$
$$\text{Diámetro} = 0.06837 \text{ m} = 68.4 \text{ mm}$$

<sup>2</sup> Para entender mejor los conceptos de momentos equivalentes a torsión y flexión, se recomienda realizar el ejemplo-problema 944 del libro de texto.