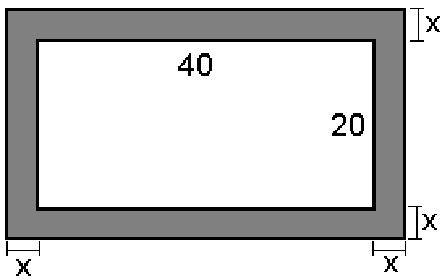
ÍNDICE

No final das séries de exercícios podem aparecer sugestões de atividades complementares. Estas sugestões referem-se a exercícios do livro “Matemática” de Manoel Paiva fornecido pelo FNDE e adotado pelo IFMG – Campus Ouro Preto durante o triênio 2015-2017.

Todos os exercícios sugeridos nesta apostila se referem ao volume 1.

DEFINIÇÃO

Uma quadra poliesportiva de uma escola tem forma retangular com 40 metros de comprimento e 20 metros de largura. A direção da escola pretende amplia-la. Para isso vai construir em volta dela uma faixa de largura constante.



Suponhamos que x seja a largura da faixa, em metros. Os lados da nova quadra medem (40 + 2x) e (20 + 2x). Sua área é uma função de x.

$$S = (40 + 2x) \cdot (20 + 2x)$$
$$S = 800 + 80x + 40x + 4x^2$$
$$S = f(x) = 4x^2 + 120x + 800$$

A fórmula que define essa função é um polinômio de 2º grau na variável x. Funções reais como esta são chamadas de **<u>funções quadráticas</u>** ou **<u>funções do 2º grau</u>**.

FUNÇÃO QUADRÁTICA
ou
FUNÇÃO DO 2º GRAU
é toda função real do tipo
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$
sendo a, b e c números reais com $a \neq 0$.

Exemplos

Exemplos de funções quadráticas:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
onde a = 1, b = -3 e c = 2.

b) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$
onde a = __, b = __ e c = __.

c) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$
onde a = __, b = __ e c = __.

d) $f(x) = x^2 - 4$
onde a = __, b = __ e c = __.

e) $f(x) = 2x^2 + 5x$
onde a = __, b = __ e c = __.

f) $f(x) = -3x^2$
onde a = __, b = __0 e c = __.

GRÁFICO

O gráfico da função quadrática é uma parábola[1].

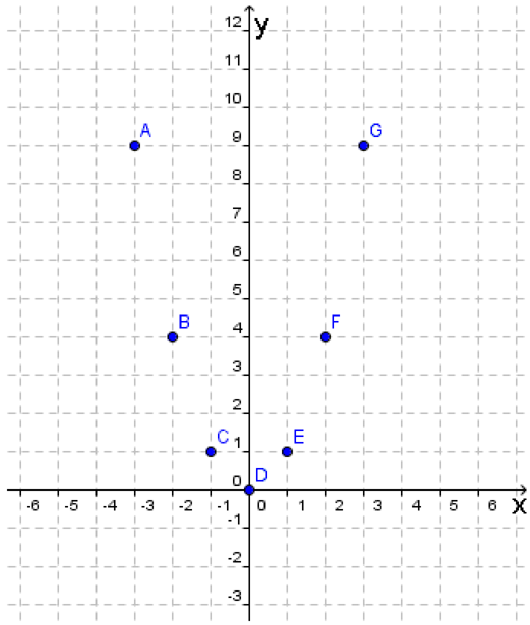
Exemplos

Ex1: Veja, no exemplo abaixo, o gráfico da função $f(x) = x^2$.

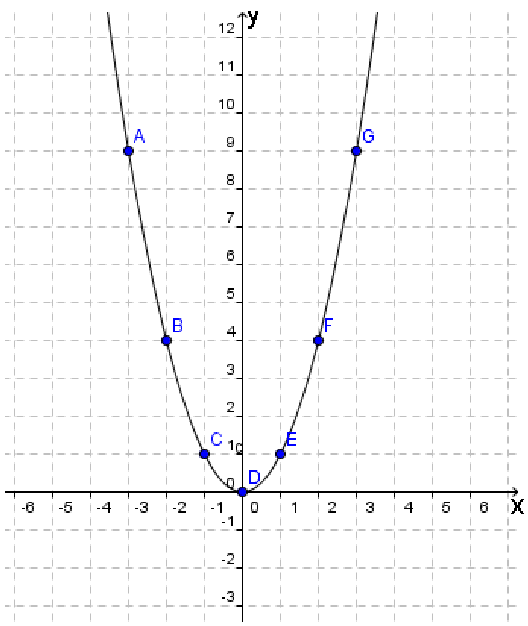
x	x^2	y	
-3	$(-3)^2$	9	A = (-3; 9)
-2	$(-2)^2$	4	B = (-2; 4)
-1	$(-1)^2$	1	C = (-1; 1)
0	0^2	0	D = (0; 0)
1	1^2	1	E = (1; 1)
2	2^2	4	F = (2; 4)
3	3^2	9	G = (3; 9)

Vamos agora localizar, no plano cartesiano, os pontos encontrados na tabela.

[1] Parábola é uma das 4 curvas cônicas que você estudará, com mais detalhes, no terceiro ano.



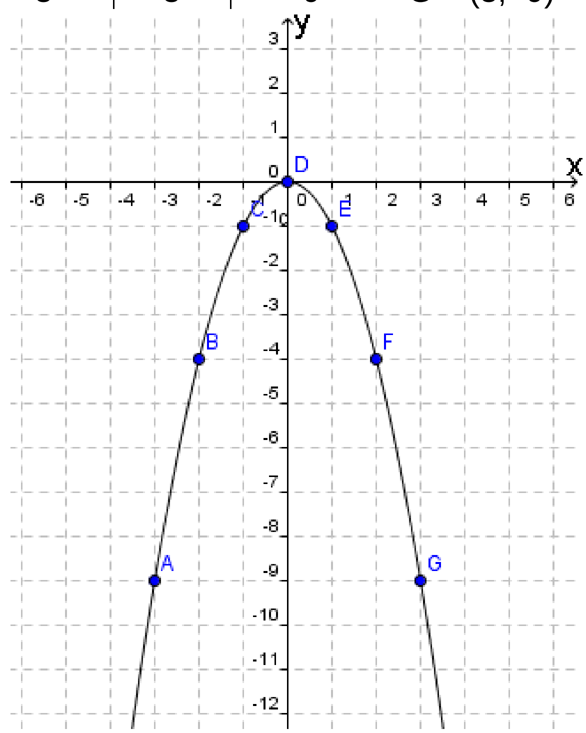
Ligando-se os pontos, formaremos o gráfico:



D = $\mathbb{R}$ Im = [0, ∞[

Ex.2: Vamos, agora, construir o gráfico da função g(x) = $-x^2$ localizando alguns pontos e ligando-os em seguida.

x	$-x^2$	y	
-3	$-(-3)^2$	-9	A = (-3; -9)
-2	$-(-2)^2$	-4	B = (-2; -4)
-1	$-(-1)^2$	-1	C = (-1; -1)
0	-0^2	-0	D = (0; 0)
1	-1^2	-1	E = (1; -1)
2	-2^2	-4	F = (2; -4)
3	-3^2	-9	G = (3; -9)



D = $\mathbb{R}$ Im =]-∞; 0]

Note que, quando multiplicamos a função por -1 (g(x) = -f(x)) obtemos um gráfico simétrico ao anterior em relação ao eixo das abscissas.

Observação: Neste momento, não trabalharemos com construção de gráficos. Faremos isto mais a frente.

ZEROS ou RAÍZES

Chamam-se de **raízes** ou de **zeros da função do 2º grau** os valores de x que tornam nula a função f(x) = ax^2 + bx + c.

Uma das técnicas utilizadas para encontrar as raízes de uma função do 2º grau é a **Fórmula de Báskara** amplamente conhecida e relativamente fácil de ser aplicada. Abaixo segue a demonstração da fórmula:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c=0$$

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\underbrace{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}}_{TQP}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Chamando de Δ a expressão b^2-4ac, temos:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

A seguir veremos alguns exemplos de aplicação da fórmula de Báskara.

Exemplos

Ex1.: Quais os zeros da função $f(x)=x^2-5x+6$?

Resolução:
Vamos dividir a resolução em três etapas:
i) Destacar os coeficientes
ii) Calcular o discriminante Δ.
iii) Calcular as raízes

Etapa i)
a = 1, b = -5, c = 6

Etapa ii)

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1$$

Etapa iii)

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm1}{2}$$

$$x_1=\frac{5-1}{2}=2 \qquad x_2=\frac{5+1}{2}=3$$

Logo, as raízes da função são 2 e 3

Ex2.: Quais os zeros da função $f(x)=9x^2-12x+4$?

Resolução:
Etapa i)
a = 9, b = -12, c = 4

Etapa ii)

$$\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\cdot9\cdot4=144-144=0$$

Etapa iii)

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{0}}{2\cdot9}=\frac{12\pm0}{18}$$

$$x_1=\frac{12-0}{18}=\frac{2}{3} \qquad x_2=\frac{12+0}{18}=\frac{2}{3}$$

Logo, as raízes da função são $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{2}{3}$.

Ex3.: Quais os zeros da função $f(x) = x^2 - 6x + 10$?

Resolução:
Etapa i)
a = 1, b = -6, c = 10

Etapa ii)
$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4$

Etapa iii)
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1}$$

Como -4 não possui raiz quadrada real, dizemos que a função dada não possui raízes reais.

DISCUSSÃO DAS RAÍZES

A existência das raízes de uma função quadrática fica condicionada ao fato da $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$. Assim, temos três casos a considerar, a saber: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$.

Vamos discutir os três casos:

1º Caso: $\Delta > 0$

Quando $\Delta > 0$, a função apresentará duas raízes reais distintas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2º Caso: $\Delta = 0$

Neste caso, $\sqrt{\Delta} = 0$, assim temos que

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3º Caso: $\Delta < 0$

Como $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ quando $\Delta < 0$, a função não apresentará raízes nesta situação.

Exercícios

01) Determinar as raízes reais das funções a seguir;

a) $f(x) = x^2 - 8x + 15$

b) $f(x) = x^2 - 2x - 8$

c) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

d) $f(x)=x^2-4x$

e) $f(x)=x^2+3x-10$

f) $f(x)=2x^2+5x-3$

g) $f(x)=21x^2-22x+5$

h) $f(x)=x^2-4$

i) $f(x)=x^2-6x+5$

j) $f(x)=x^2-5x+9$

k) $f(x)=x^2-\frac{5}{3}x+\frac{4}{9}$

02) Qual o valor de b para que a função $f(x)=x^2+bx+3$ tenha duas raízes iguais?

03) Determinar as condições sobre k na função f(x) = $3x^2$ – 2x + (k – 1) a fim de que f não admita raízes reais.

04) A função

$$f(x) = (p - 1)x^2 + 3x + (p + 1)$$

possui duas raízes reais iguais. Nestas condições, qual o valor de p?

05) Qual é o menor número inteiro m para o qual a função real de variável real dada por $f(x) = 4x^2 + 3x + (m + 2)$ não admite raízes reais?

RELAÇÕES ENTRE COEFICIENTES E RAÍZES

Sendo x_1 e x_2 as raízes de uma função do segundo grau do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos afirmar que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Estas relações são chamAdas de relações de Girard e podem ser facilmente demonstradas. Acompanhe:

Fazendo $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, temos que

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

e

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{b^2 - b^2 - 4ac}{4a} = \frac{c}{a}$$

Exemplos

Ex.1: Encontrar a soma e o produto das raízes da função $f(x)=2x^2 + 4x - 30$ sem calcular as raízes.

Resolução

a = 2; b = 4 e c = -30

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-30}{2} = -15$$

Logo, a soma das raízes é -2 e o produto é -15.

Ex.2: Escreva uma função do segundo grau cujas raízes seja 4 e -1.

Resolução

$-\frac{b}{a}=4+(-1)=3$. Fazendo a = 1, temos que b = -3

$\frac{c}{a}=4\cdot(-1)=-4$. Tomando a = 1, temos que c = -4.

Assim, uma equação procurada é

$$f(x) = x^2 - 3x - 4$$

Observação: Se tivesse sido atribuído a outro valor qualquer (diferente de 1), os valores de b e c mudariam mas, ainda assim, seria encontrada uma função cujas raízes são 4 e -1.

Exercícios

06) Calcule a soma e o produto das raízes das funções abaixo;

a) $f(x) = 3x^2 - x + 5$

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

c) $f(x) = 2x^2 - 7$

d) $f(x) = x^2 - 3x - 2$

07) Obtenha uma função do segundo grau cujos zeros sejam:

a) 3 e 4

b) -1 e 2

c) -5 e -4

d) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

e) 0 e 8

f) 3 e 3

g) $\sqrt{7}$ e $6\sqrt{7}$

08) Mostre que uma equação do 2º grau de raízes x_1 e x_2 pode ser escrita na forma $f(x) = x^2 - Sx + P$ sendo $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.

09) Uma das raízes da equação $x^2 + px + 27 = 0$ é o quadrado da outra. Qual o valor de p?

10) As raízes da função $f(x) = 3x^2 - 10x + c$ são tais que uma é o inverso da outra. Qual é a maior das duas raízes?

11) Uma das raízes da equação $x^2 - 25x + 2p = 0$ excede a outra em 3 unidades. Encontre as raízes da equação e o valor de p.

12) A diferença entre as raízes da equação $x^2 + 11x + p = 0$ vale 5. Encontre as raízes e o valor de p.

13) Sendo m e n as raízes da equação $3x^2 + 10x + 5 = 0$, qual o valor de:

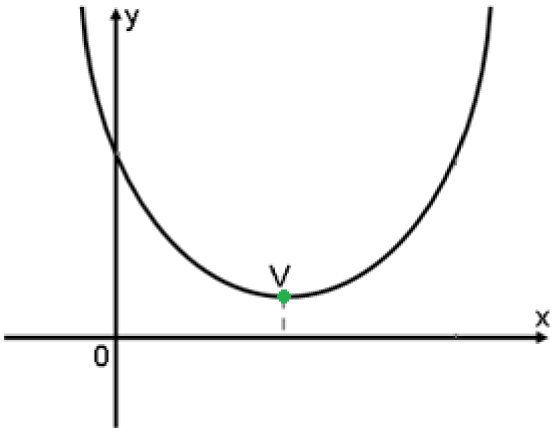
a) $m + n$

b) $m \cdot n$

c) $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

d) $m^2 + n^2$

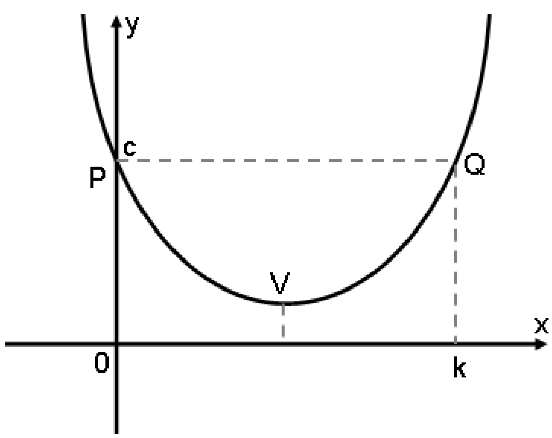
VÉRTICE



O ponto V na figura acima é chamado de **vértice** da parábola e está localizado sobre o eixo de simetria da parábola.

Segue, abaixo, a demonstração da fórmula que nos permite encontrar as coordenadas de V.

Considere o gráfico abaixo da função f(x) = ax^2 + bx + c.



A parábola corta o eixo vertical no ponto P, podemos então dizer que f(0) = c. Sendo PQ um segmento de reta paralelo ao eixo horizontal, temos, para o ponto Q, a coordenadas (k, c). Desta forma podemos obter a abscissa de Q:

$$\mathrm{f(k) = c \text{ e } f(x) = ax^2 + bx + c}$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathrm{ak^2 + bk + c = c}$$
$$\mathrm{ak^2 + bk = 0}$$
$$\mathrm{k(ak + b) = 0}$$
$$\mathrm{k = 0 \quad ou \quad ak + b = 0}$$
$$\mathrm{ak = -b}$$
$$\mathrm{k = -\frac{b}{a}}$$

Observando o gráfico vemos que k = 0 é a abscissa do ponto P, logo a abscissa de Q é $-\frac{b}{a}$.

Devido à simetria da parábola, podemos determinar a abscissa de V como sendo a média aritmética entre as abscissas de P e Q, assim:

$$\mathrm{x_v = \frac{-\frac{b}{a} + 0}{2}}$$
$$\mathrm{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

Para determinar a ordenada do vértice, basta substituir determinar f(x$_v$).

$$f(x_v) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$
$$f(x_v) = \frac{ab^2}{4a^a} - \frac{b^2}{2a} + c$$
$$f(x_v) = \frac{ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c}{4a^2}$$
$$f(x_v) = \frac{-ab^2 + 4a^2c}{4a^2}$$
$$f(x_v) = \frac{-a(b^2 - 4ac)}{4a^2}$$
$$f(x_v) = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$como\ \Delta = b^2 - 4ac$$

$$f(x_v) = \frac{-\Delta}{4a}$$

Assim, temos que as coordenadas do vértice da parábola, são:

$$V = \left(-\frac{b}{2a};\ \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

Exemplos

Determinar as coordenadas do vértice da parábola que representa graficamente a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = -2$$

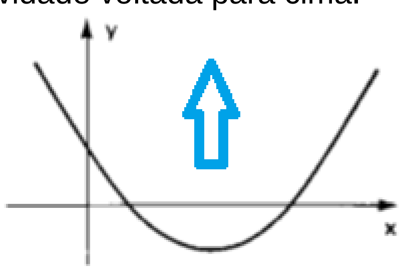
$$y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = -1$$

Logo, V = (2, -1)

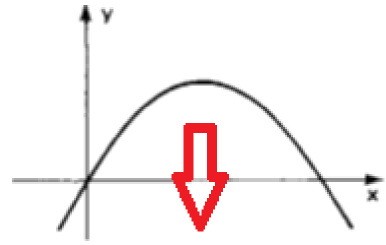
CONCAVIDADE

A parábola que representa graficamente a função quadrática $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$ pode ter a concavidade voltada para cima ou para baixo de acordo com o sinal do coeficiente **a**.

Se $\mathbf{a > 0}$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.



Se $\mathbf{a < 0}$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.



MÁXIMO OU MÍNIMO

Seja f uma função real de variável real. A função f admite máximo se, e somente se existe x_m, $x_m \in D(f)$ tal que:

$$f(x_m) \geq f(x),\ \forall x,\ x \in D(f)$$

O número $f(x_m)$ é chamado de valor máximo de f.

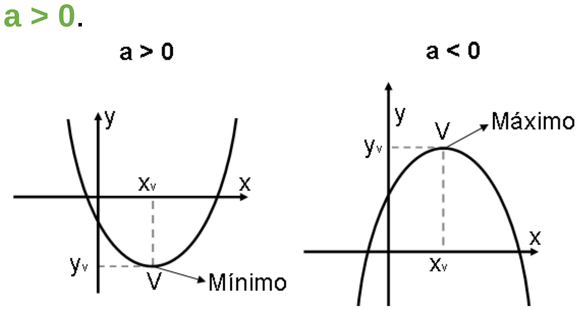
Uma função quadrática admite ponto de máximo no vértice quando a < 0.

Seja f uma função real de variável real. A função f admite mínimo se, e somente se existe x_m, $x_m \in D(f)$ tal que:

$$f(x_m) \leq f(x),\ \forall x,\ x \in D(f)$$

O número $f(x_m)$ é chamado de valor mínimo de f.

Uma função quadrática admite ponto de mínimo no vértice quando a > 0.



IMAGEM

A partir do esboço do gráfico de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos notar que a ordenada do vértice limita sua imagem, assim, se $a > 0$, $y \geq y_V$ e se $a < 0$, $y \leq y_V$, logo:

Para **a > 0**,

$$Im=\{y \in \Re \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\} \text{ ou } Im=\left[-\frac{\Delta}{4a};+\infty\right)$$

Para **a < 0**,

$$Im=\{y \in \Re \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\} \text{ ou } Im=\left[-\infty;-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Exercícios

14) Em cada uma das funções quadráticas a seguir, determine o vértice da parábola da representação gráfica e aponte a direção da concavidade da parábola. Determine também a imagem da função.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

b) $y = -x^2 + 4x$

c) $f(x) = -x^2 + 5x - 3$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

e) $f(x) = 3x^2 - 6x - 2$

f) $f(x) = -x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

g) $f(x) = x^2 + \sqrt{2}x - 0{,}4$

15) Para que valores de m o gráfico da a função f(x) = (m – 5)x^2 + 2x – m tem a concavidade voltada para cima?

16) O vértice da parábola da função y = x^2 +bx + c é o ponto V(-3; 1). Calcule b e c.

17) Sabe-se que a parábola que descreve a função $y = x^2 + kx + 2k$ passa pelo ponto (1: 7).

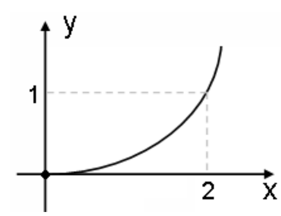
a) Determine k.

b) Quanto vale f(0)? E f(3)?

18) Calcule b e c sabendo que a parábola de $y = x^2 + bx + c$ passa pelos pontos (1; 1) e (2; 6).

19) Determine a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(0) = 2$, $f(1) = 6$ e $f(-1) = 0$.
(Você deve determinar a, b e c)

20) O arco de parábola da figura ao lado é o gráfico de uma função em que y é proporcional ao quadrado de x.



a) Qual o domínio e imagem da função?

b) Encontre a fórmula de y em função de x. (dica: se y é proporcional quadrado de x, então y é igual a x^2 multiplicado por uma constante, ou seja, a função é do tipo $y = ax^2$)

c) Obtenha y para x = 3?

21) O preço de uma pizza é diretamente proporcional à sua área. Por isso, a fórmula que dá o preço (em reais) de uma pizza em função de seu raio R (em cm) é do tipo $P = kR^2$. No caso, k é uma constante real não nula.

Uma pizzaria vende uma pizza de raio igual a 20cm por R$12,00.

a) Qual o valor de k neste caso?

b) Por quanto deve ser vendida uma pizza de 30cm de raio?

c) Qual a taxa de variação média do preço da pizza por centímetro de raio quando este muda de 20cm para 30cm? E quando muda de 30cm para 40 cm?

22) Um substância sofreu mudanças de temperatura durante 8 minutos. Sua temperatura T em graus Celsius, t minutos após o início do experimento, é dada pela fórmula $T = -2t^2 + 16t + 10$. Encontre:

a) a temperatura inicial da substância.

b) o instante em que ela atingiu a temperatura máxima.

c) a temperatura máxima atingida.

d) os instantes em que a temperatura atingiu 24ºC.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES
Pág. 180 – Exercícios 07 a 14

FORMA CANÔNICA

A construção do gráfico da função quadrática com o auxílio de uma tabela como está apresentado no início desta apostila torna-se as vezes um trabalho impreciso. Não era o caso daqueles exemplos e de outros que você vez nos exercícios, mas isto pode acontecer quando, por exemplo, a parábola intercepta o eixo horizontal ou vertical em pontos de abscissa ou ordenada não inteiros.

A fim de podermos fazer um estudo analítico mais detalhado da função quadrática, vamos, em princípio, transforma-la em outra forma chamada de **FORMA CANÔNICA**.

Vamos transformar a função na forma polinomial f(x) = ax^2 + bx + c para a forma canônica, veja:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+c\right)$$

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+c\right)$$

$$f(x)=a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\left(\frac{b^2}{4a^2}-c\right)\right]$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Esta forma é a chamada forma canônica. Representando b^2 – 4ac por Δ, também chamado de discriminante do trinômio do 2º grau temos a forma canônica como a conhecemos:

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Exemplos

Ex.1: Vamos passar a função f(x) = x^2 – 5x + 6 para a forma canônica:

$$f(x)=x^2-5x+6$$

$$f(x)=x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+6$$

$$f(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

Ex.2: Passar a função quadrática $f(x)=3x^2-7x+2$ para a forma canônica e em seguida determinar suas raízes caso existam.

Resolução:

$$f(x)=3x^2-7x+2$$

$$f(x)=3\left(x^2-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}\right)$$

$$f(x)=3\left(x^2-\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}-\frac{49}{36}+\frac{2}{3}\right)$$

$$f(x)=3\left[\left(x-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right]$$

O primeiro passo está feito. Vamos agora encontrar as raízes.

$$3\left[\left(x-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right]=0$$

$$\left(x-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{25}{36}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$$

$$x-\frac{7}{6}=\pm\sqrt{\frac{25}{36}} \Leftrightarrow x-\frac{7}{6}=\pm\frac{5}{6}$$

$$x-\frac{7}{6}=\frac{5}{6} \quad \text{ou} \quad x-\frac{7}{6}=-\frac{5}{6}$$

$$x=\frac{12}{6} \qquad x=\frac{2}{6}$$

$$x_1=2 \qquad x_2=\frac{1}{3}$$

Assim, as raízes são $x=2$ e $x=\frac{1}{3}$.

Exercícios

23) Passe as funções quadráticas a seguir para a forma canônica e, em seguida, encontre as raízes, caso existam.

a) $f(x)=x^2-3x+2$

b) $f(x)=-x^2+7x-12$

c) $f(x)=-x^2+7x-12$

d) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$

e) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

f) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

g) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

h) $f(x) = x^2 - 2x$

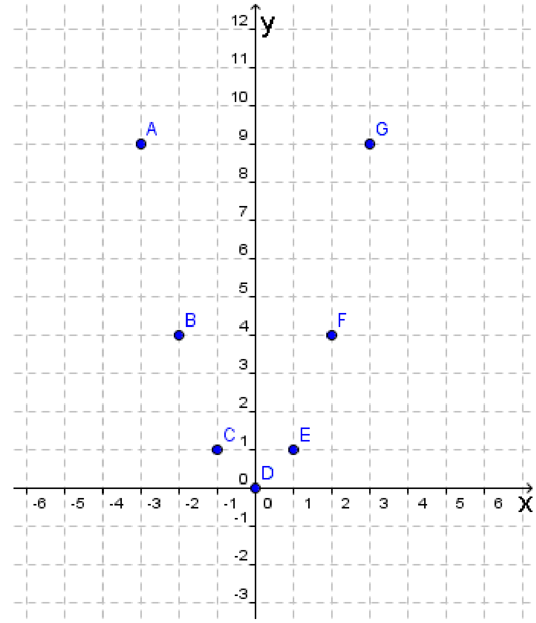
CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA

Nos exemplos a seguir, construiremos gráficos de funções do segundo grau (parábolas) a partir de sua forma canônica mas antes vamos entender algumas translações que podemos realizar nos gráficos de funções do segundo grau.

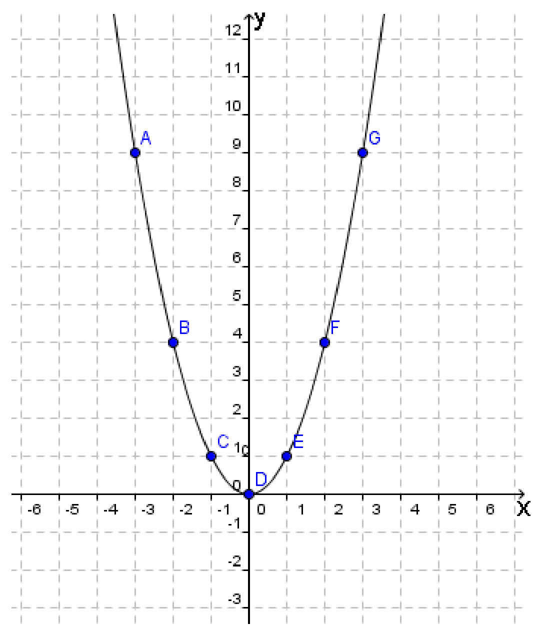
Nas páginas 2 e 3 desta apostila, construímos o gráfico da função f(x) = x^2. Para tal partimos de uma tabela, localizamos os pontos no plano e ligamos construindo o gráfico. Relembre:

x	x^2	y	
-3	$(-3)^2$	9	A = (-3; 9)
-2	$(-2)^2$	4	B = (-2; 4)
-1	$(-1)^2$	1	C = (-1; 1)
0	0^2	0	D = (0; 0)
1	1^2	1	E = (1; 1)
2	2^2	4	F = (2; 4)
3	3^2	9	G = (3; 9)

Vamos agora localizar, no plano cartesiano, os pontos encontrados na tabela.



Ligando-se os pontos, formaremos o gráfico:

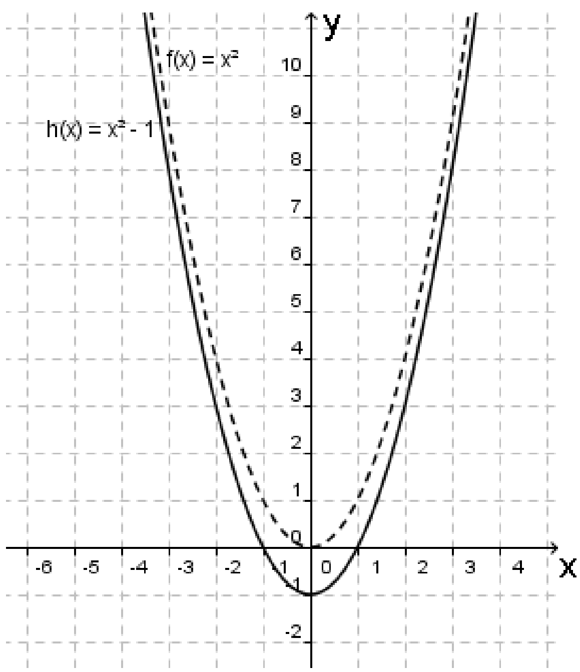


DESLOCAMENTO VERTICAL

Agora, vamos construir o gráfico da função $g(x) = x^2 - 1$.

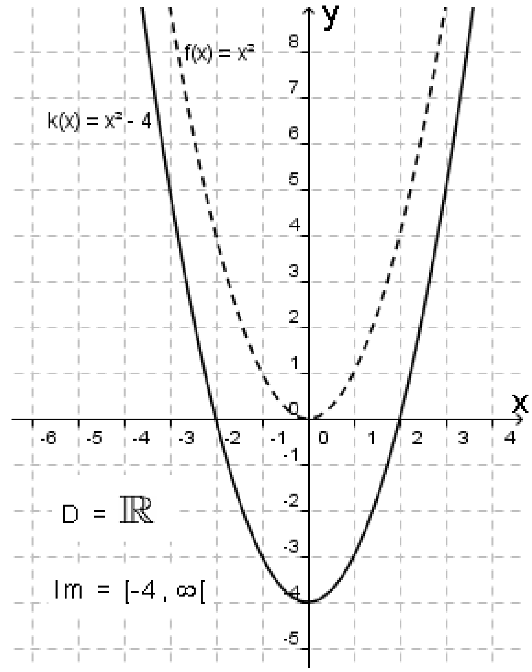
Este gráfico pode ser obtido a partir do gráfico anterior deslocando todos os seus pontos em uma unidade para baixo já que para cada valor de x em $f(x) = x^2$, a imagem relativa a $g(x) = x^2 - 1$ estará uma unidade abaixo.

Veja como ficará o gráfico:

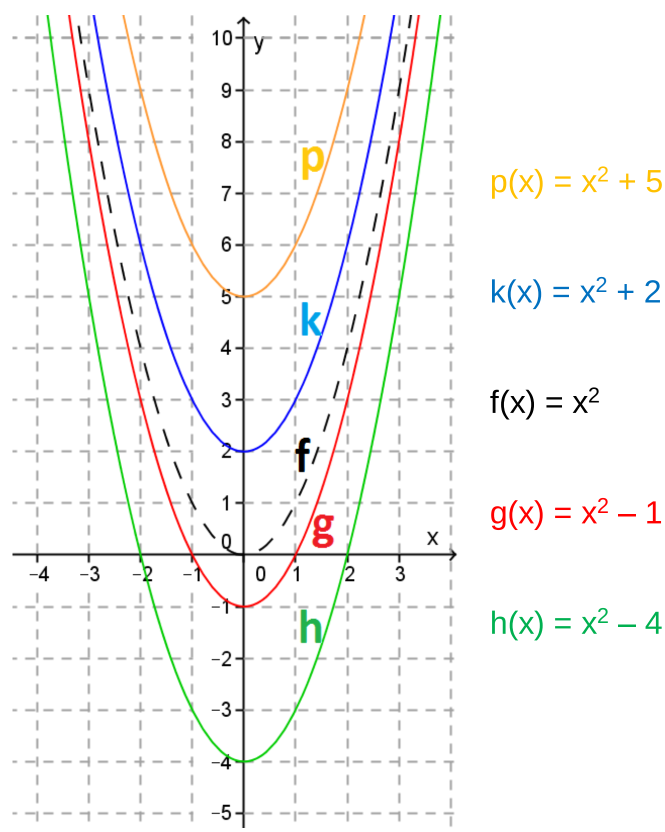


Continuando nesta linha, vamos construir o gráfico de $h(x)=x^2 - 4$.

Agora, a partir de $f(x) = x^2$, vamos "descer" todos os seus pontos em 4 unidades



Veja, na sequência abaixo, diversos gráficos ilustrando esta situação:

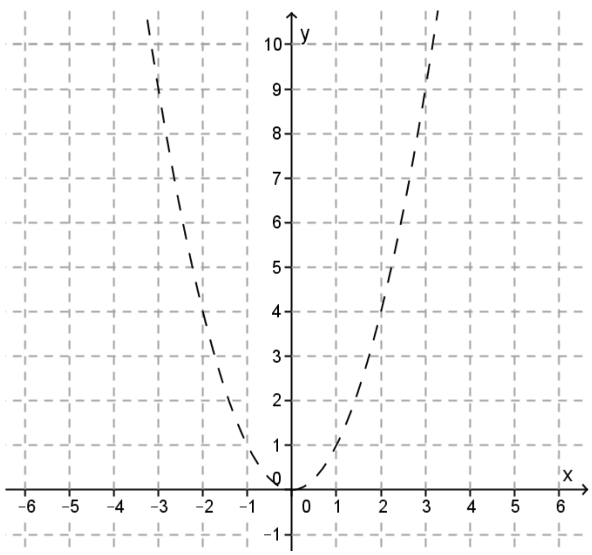


Observando as construções anteriores, podemos concluir que, somando-se ou subtraindo-se uma constante de uma função do segundo grau, deslocamos o seu gráfico verticalmente.

DESLOCAMENTO HORIZONTAL

Vamos, agora, *provocar* deslocamentos horizontais no gráfico.

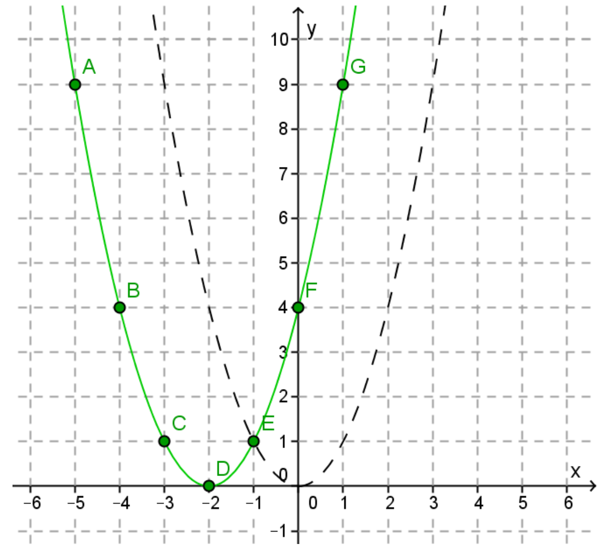
Mais uma vez, partiremos do gráfico da função $f(x) = x^2$.



Vamos agora construir a tabela e, em seguida, o gráfico de $h(x) = (x + 2)^2$.

x	x+2	$(x+2)^2$	y	(x, y)
-5	-3	$(-3)^2$	9	A = (-5; 9)
-4	-2	$(-2)^2$	4	B = (-4; 4)
-3	-1	$(-1)^2$	1	C = (-3; 1)
-2	0	0^2	0	D = (-2; 0)
-1	1	1^2	1	E = (-1; 1)
0	2	2^2	4	F = (0; 4)
1	3	3^2	9	G = (1; 9)

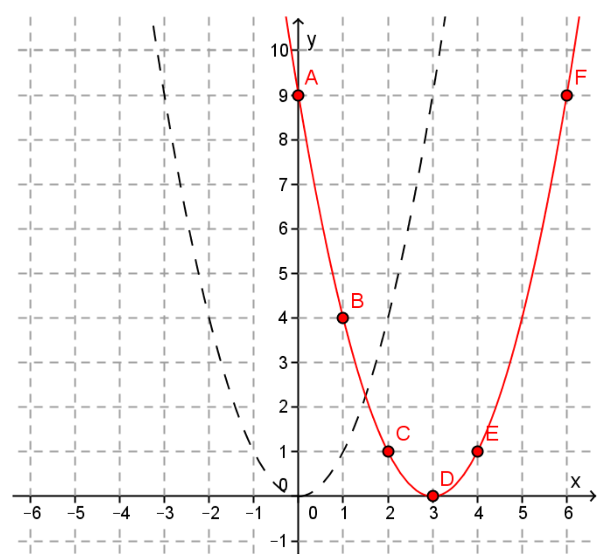
Observe, em verde, no plano a seguir, os pontos encontrados a partir da tabela e o gráfico da função h.



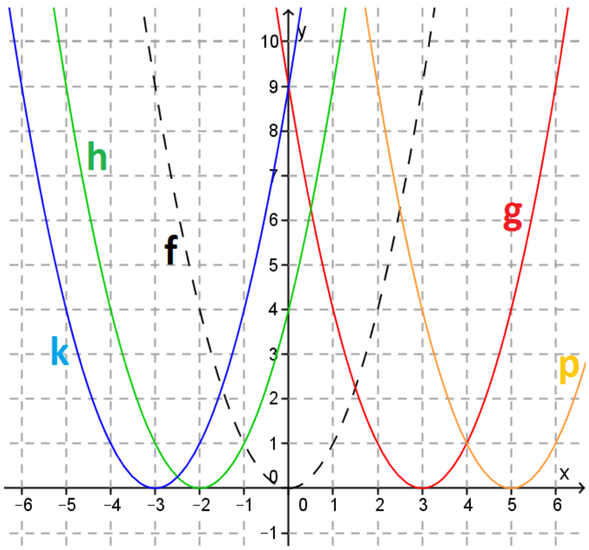
Agora construiremos o gráfico de $g(x)=(x – 3)^2$.

x	x-3	$(x+2)^2$	y	(x, y)
0	-3	$(-3)^2$	9	A = (0; 9)
1	-2	$(-2)^2$	4	B = (1; 4)
2	-1	$(-1)^2$	1	C = (2; 1)
3	0	0^2	0	D = (3; 0)
4	1	1^2	1	E = (4; 1)
5	2	2^2	4	F = (5; 4)
6	3	3^2	9	G = (6; 9)

Localizando no plano e construindo o gráfico, temos:



Neste caso, foi possível observar que somando ou subtraindo uma constante ao x, o gráfico da função *sofre* um deslocamento lateral. Veja no conjunto de gráficos a seguir:



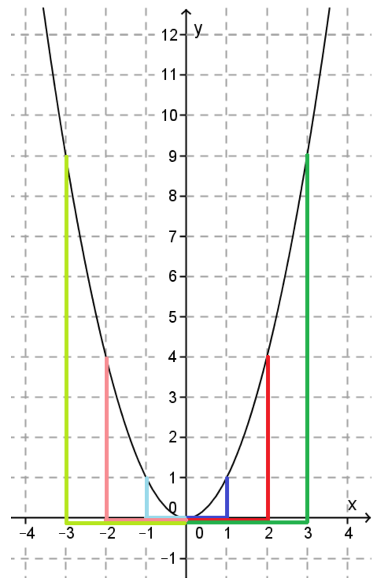
$k(x) = (x + 3)^2$
$h(x) = (x + 2)^2$
$f(x) = x^2$
$g(x) = (x - 3)^2$
$p(x) = (x - 4)^2$

De maneira informal, mas que proporciona um bom entendimento, podemos dizer que somando-se uma unidade ao argumento x, o gráfico é deslocado uma unidade para a esquerda e subtraindo uma unidade do argumento x, o gráfico é deslocado uma unidade para a direita.

ABERTURA

Em termos de abertura, as parábolas podem ter a concavidade *mais aberta ou mais fechada* ou ainda *a concavidade voltada para baixo*.

Mais uma vez, começaremos com o gráfico da função $f(x) = x^2$ mas agora destacaremos uma nova situação em termos de deslocamento. Observe o gráfico.

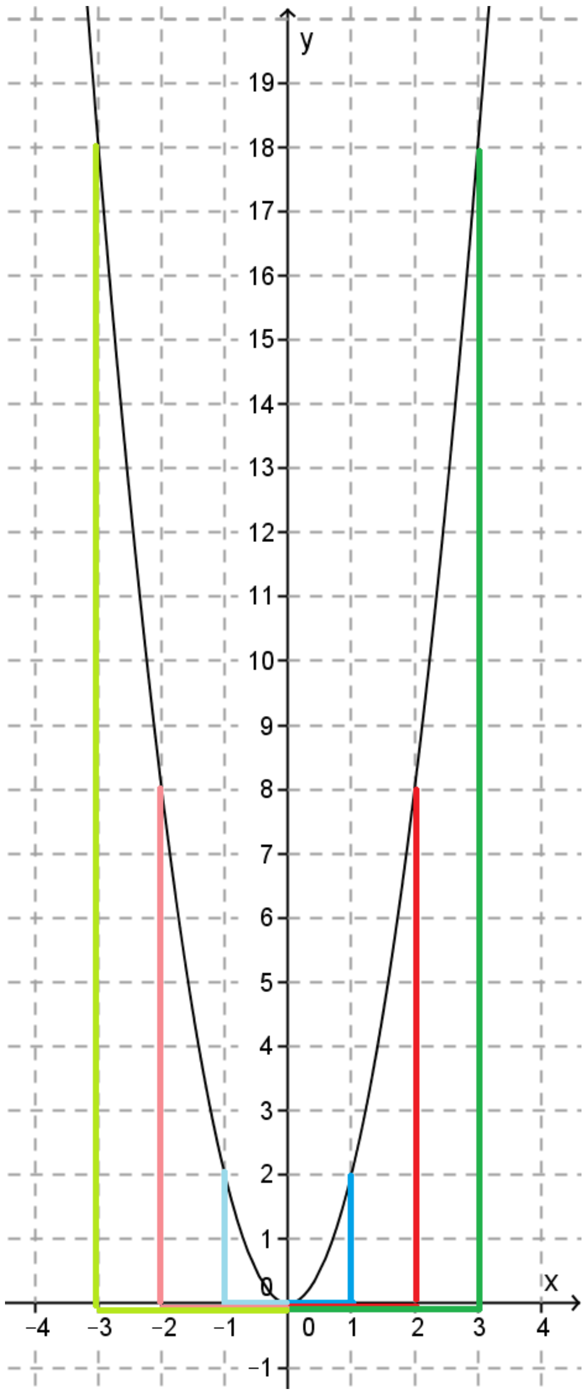


Na figura, além do gráfico, foram destacadas linhas em três cores de duas tonalidades cada. Ressaltando que em $f(x) = x^2$ os valores de y variam com o quadrado de x e tomando como referência o vértice da parábola, podemos observar que:

- Em azul: quando x varia uma unidade, y varia 1^2, ou seja, 1 e quando x varia em uma unidade para a esquerda, y varia em $(-1)^2$, ou seja, 1.
- Em vermelho: quando x varia duas unidades, y varia 2^2, ou seja, 4 e quando x varia em duas unidades para a esquerda, y varia em $(-2)^2$, ou seja, 4.
- Em verde, quando x varia três unidades, y varia 3^2, ou seja, 9 e quando x varia em três unidades para a esquerda, y varia em $(-3)^2$, ou seja, 9.

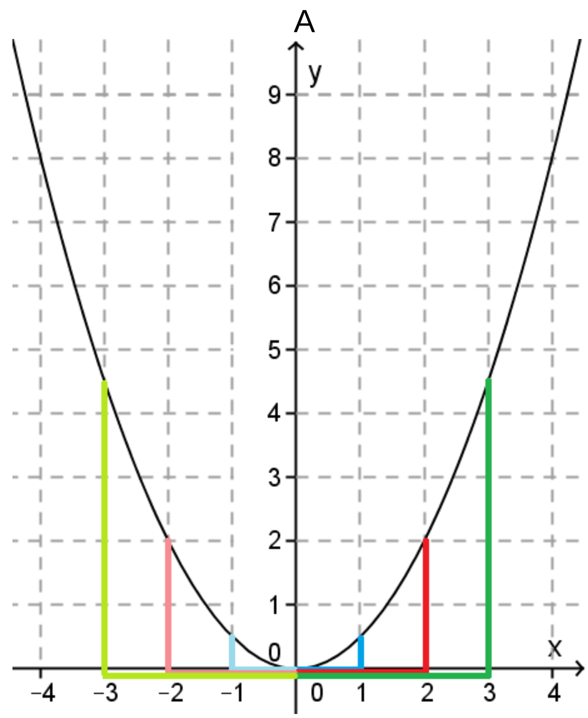
Tente observar o mesmo padrão para x variando 4 unidades.

No entanto, se tivermos uma constante multiplicando o “x^2”, Esta constante influenciará diretamente na *taxa de variação* de y em relação a x. Veja no exemplo abaixo com a função $g(x) = 2x^2$.



Veja que, neste caso, as variações em y são o dobro dos quadrados das variações em x. Isso se deve ao fator 2 multiplicando o “x^2”.

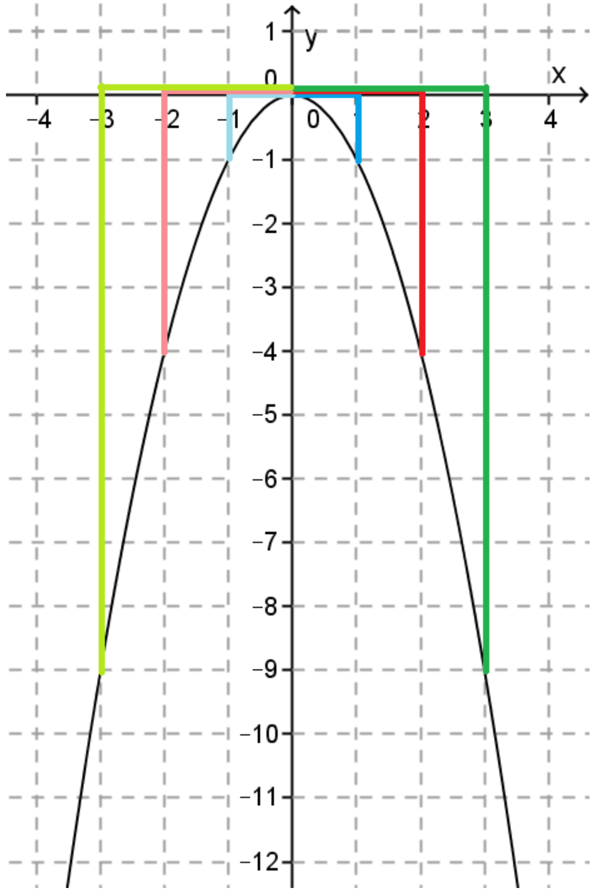
Veja este outro exemplo com a função $h(x) = \frac{1}{2}x^2$.



Agora pode-se perceber que as variações em y são equivalentes à metade dos quadrados das variações em x. Isso se deve ao fator $\frac{1}{2}$ multiplicando o “x^2”.

Vejamos, agora, o papel de uma constante negativa multiplicando o “x^2”.

No gráfico a seguir, utilizaremos o fator -1 e o resultado observado vale, também para quaisquer outros fatores negativos.



É possível observar que, para cada deslocamento horizontal a partir do vértice, o deslocamento vertical varia com o quadrado de x porém *para baixo*, Desta forma, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Assim, em termos da influência da constante a no gráfico de $f(x) = ax^2$, podemos concluir que se **$a > 0$**, a parábola tem a **concavidade voltada para cima** e se **$a < 0$**, a parábola tem a **concavidade voltada para baixo** (isso já foi falado na página 13). Além disso, podemos dizer que quanto maior o valor de **a** (em módulo), *mais fechada* estará a parábola e quanto mais próximo de zero for o valor de, *mais aberta* estará a parábola.

Agora vamos *focar* noutro ponto.

Na página 19, vimos que a forma canônica da função f(x) = ax2 + bx + c é

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

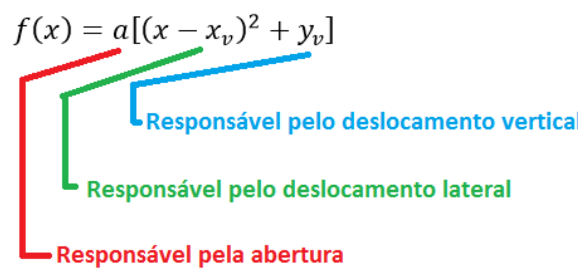
Na página 13, vimos que as coordenadas do vértice da parábola são:

$$V = \left(-\frac{b}{2a};\ \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

Assim, podemos reescrever a forma canônica como:

$$f(x) = a[(x - x_v)^2 + y_v]$$

Observe que, nesta notação, podemos notar de forma clara, os três elementos que acabamos de estudar:



A partir do que foi visto, detalhadamente, nas últimas 6 páginas, vamos, agora construir gráficos de funções do 2º grau sem a necessidade de partir de uma tabelinha.

O nosso procedimento será encontrar a forma canônica das funções e, a partir dela localizarmos o vértice e fazermos os deslocamentos sobre o plano para encontrar pontos de referência para a construção do gráfico.

Acompanhe os exemplos a seguir:

Exemplos

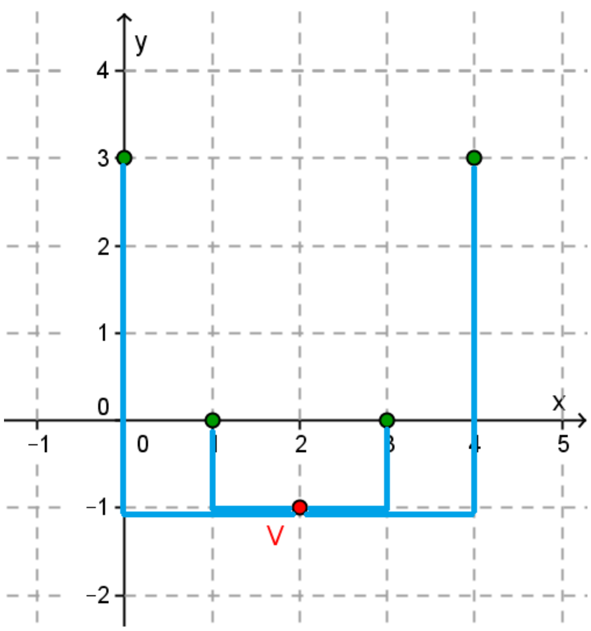
Ex.:Construir o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Forma canônica:

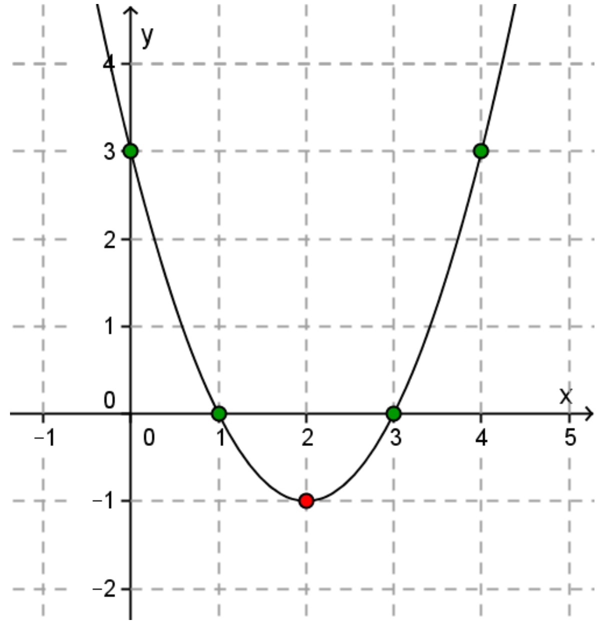
$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$
$$f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4 + 3$$
$$f(x) = (x^2 - 4x + 4) + (-4 + 3)$$
$$f(x) = (x-2)^2 - 1$$

Assim, temos que:
a = 1 e V = $(2,-1)$

A partir daí, localizamos o Vértice no plano e em seguida alguns outros pontos da parábola de acordo com o que estudamos a partir da página 25.



O passo seguinte será ligar estes pontos em forma de parábola formando, assim, o gráfico procurado.

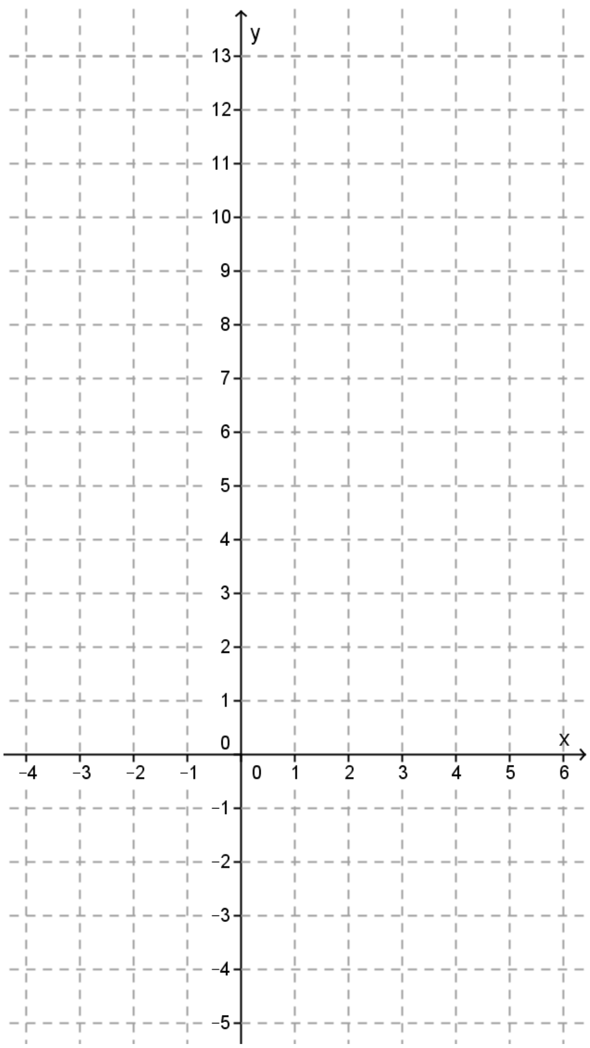


Os demais exemplos, nas próximas páginas, construiremos juntos em forma de exercícios.

Exercícios

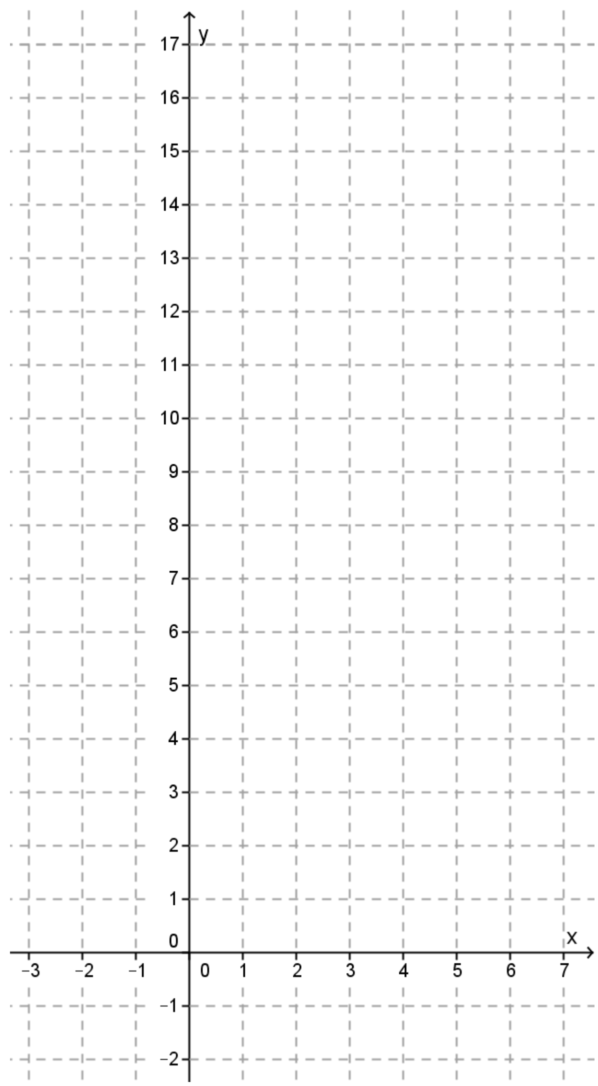
24) Construir o gráfico da função

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$



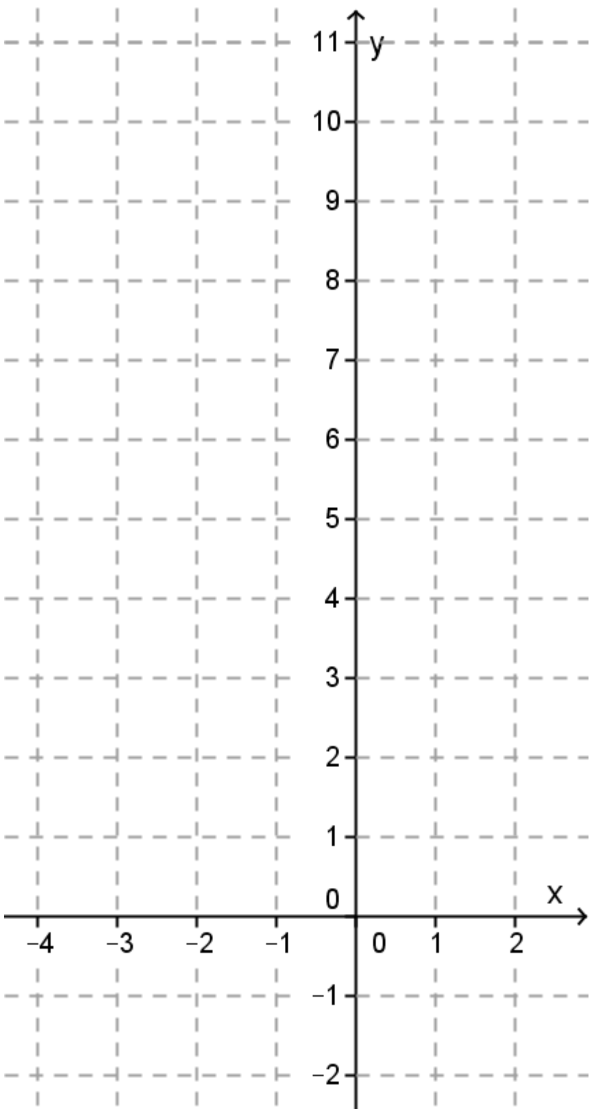
25) Construir o gráfico da função

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$



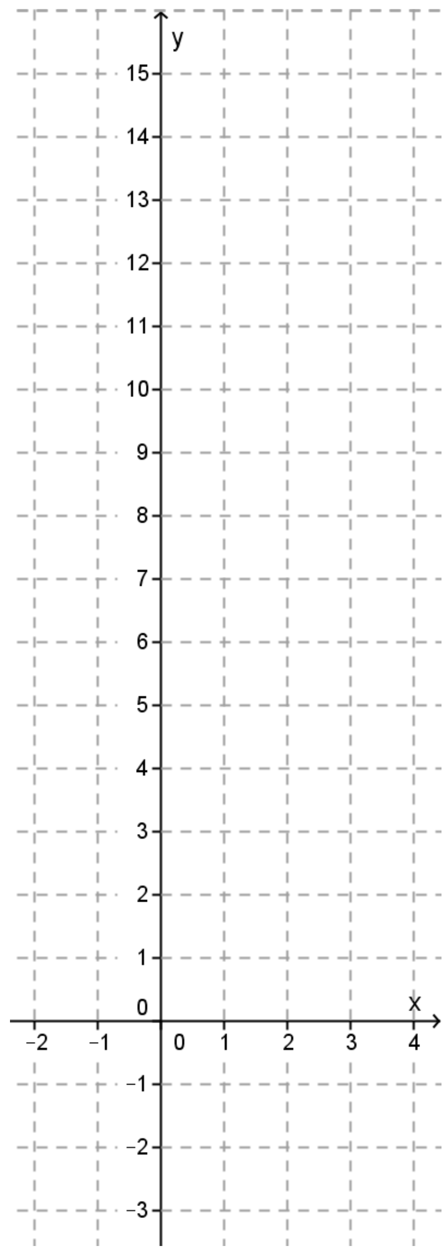
26) Construir o gráfico da função

$f(x) = x^2 - 2x$



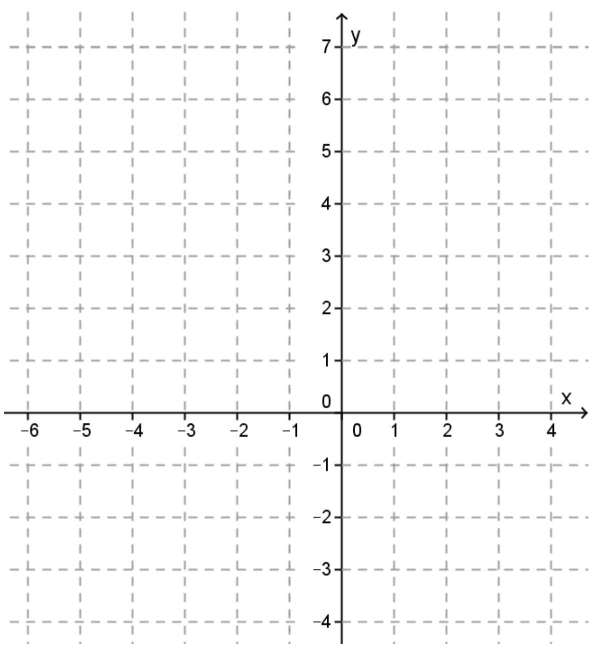
27) Construir o gráfico da função

$f(x) = 2x^2 - 4x - 1$



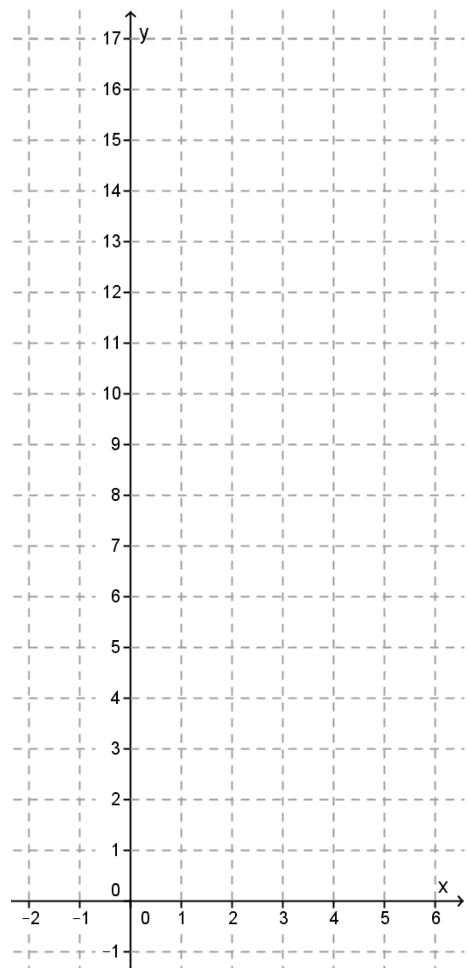
28) Construir o gráfico da função

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$$



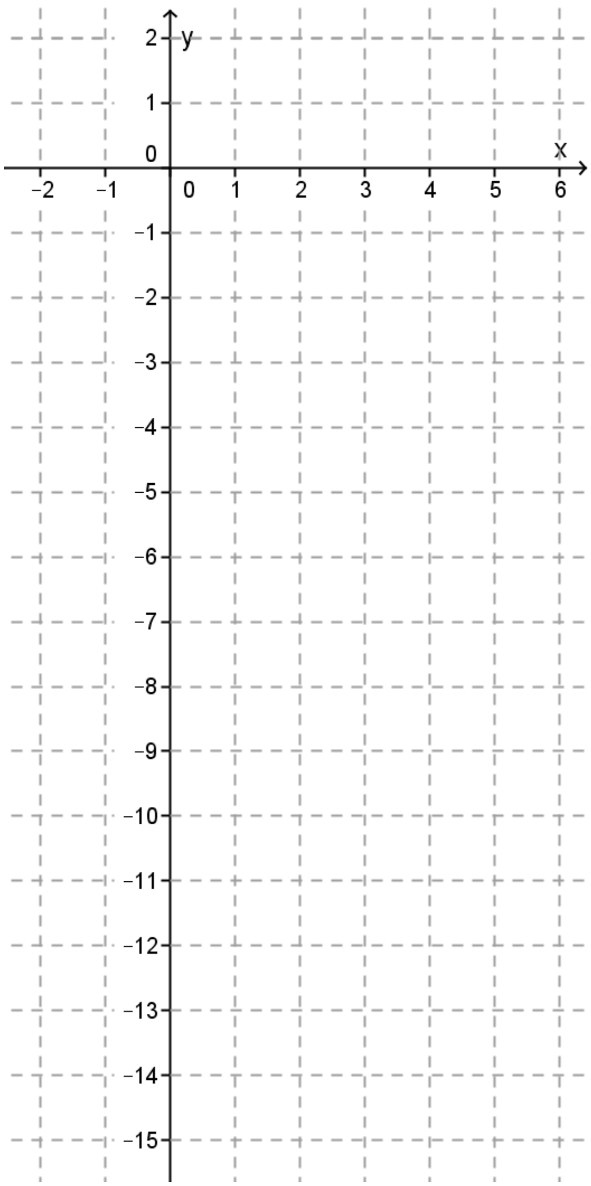
29) Construir o gráfico da função

$$f(x)=x^2-4x+5$$



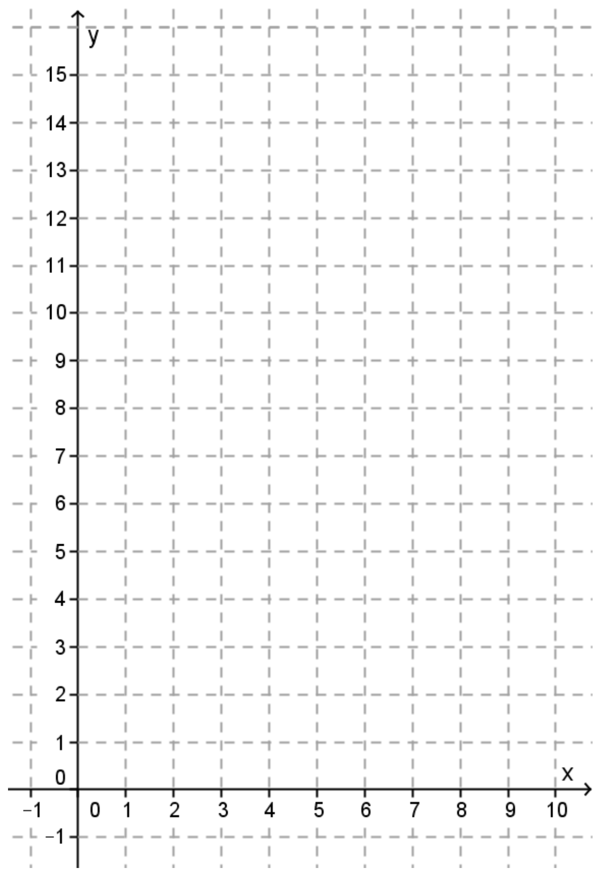
30) Construir o gráfico da função

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$



31) Construir o gráfico da função

$$f(x) = x^2 - 10x + 26$$



ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Pág. 176– Exercício 01

RESPOSTAS

01) a) 3 e 5
b) -2 e 4
c) 3 e 3
d) 0 e 4
e) -5 e 2
f) -3 e $\frac{1}{2}$
g) $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{7}$
h) -2 e 2
i) -5 e -1
j) Não possui raízes reais
k) $\frac{1}{3}$ e $\frac{4}{3}$

02) $2\sqrt{3}$

03) $k > \frac{4}{3}$

04) $p = \frac{\pm\sqrt{13}}{2}$

05) -1

06) a) $S = \frac{1}{3}$ e $P = -\frac{5}{3}$
b) S = 6 e P = 5
c) S = 0 e $P = -\frac{7}{2}$
d) S = 3 e P = -2

07) a) $f(x) = x^2 - 7x + 12$
b) $f(x) = x^2 - x - 2$
c) $f(x) = x^2 + 9x + 20$
d) $f(x) = x^2 + 2\sqrt{3}x + 1$
e) $f(x) = x^2 - 8x$
f) $f(x) = x^2 - 6x + 9$
g) $f(x) = x^2 - 7\sqrt{7}x + 42$

08) - Demonstração -

09) P = -12

10) 3

11) P = 77

12) As raízes são -3 e -8 e p vale 24

13) a) $\frac{10}{3}$ b) $\frac{5}{3}$
c) 2 a) $\frac{70}{9}$

14) a) vértice (1; 1); Im = [1; ∞);
concavidade para cima.
b) vértice (2; 4); Im = (-∞; 4]
concavidade para baixo.
c) vértice $\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{4}\right)$; Im = (-∞; $\frac{13}{4}$
];
concavidade para baixo.
d) vértice $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$; Im =(-∞; $\frac{3}{2}$];
concavidade para cima.
e) vértice (1; -5); Im = [-5; ∞);
concavidade para cima
f) vértice $\left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$; Im = [$\frac{3}{4}$; ∞);
concavidade para cima
g) vértice $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{9}{10}\right)$;
Im = [$-\frac{9}{10}$; ∞);
concavidade para cima

15) m > 5

16) b = 6 e c= 10

17) a) k = 2
b) f(0) = 4; f(3) = 19

18) b = 2 e c = -2

19) $f(x) = x^2 + 3x + 2$

20) a) D = [0, ∞) e Im = [0, ∞)

b) $y = \frac{x^2}{4}$

c) $y = \frac{9}{4}$

21) a) 0,03

b) R$27,00

c) 20 → 30: 1,50 / cm

30 → 40: 2,10 / cm

22) a) 10ºC

b) 4 min

c) 42ºC

d) 1 min e 7 min

23)

a) $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

raízes: 1 e 2

b) $f(x) = -\left[\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$

raízes: 3 e 4.

c) $f(x) = 3\left[\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right]$

raízes: 2 e $\frac{1}{3}$

d) $f(x) = (x-1)^2 + 1$

Não possui raízes reais.

e) $f(x) = (x+2)^2$ raiz: -2

f) $f(x) = -\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right]$

raízes: 2 e $-\frac{1}{2}$

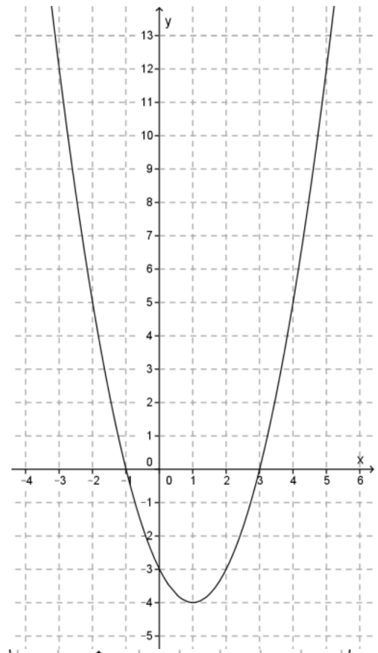
g) $f(x) = (x-1)^2 - 2$

raízes: $1+\sqrt{2}$ e $1-\sqrt{2}$

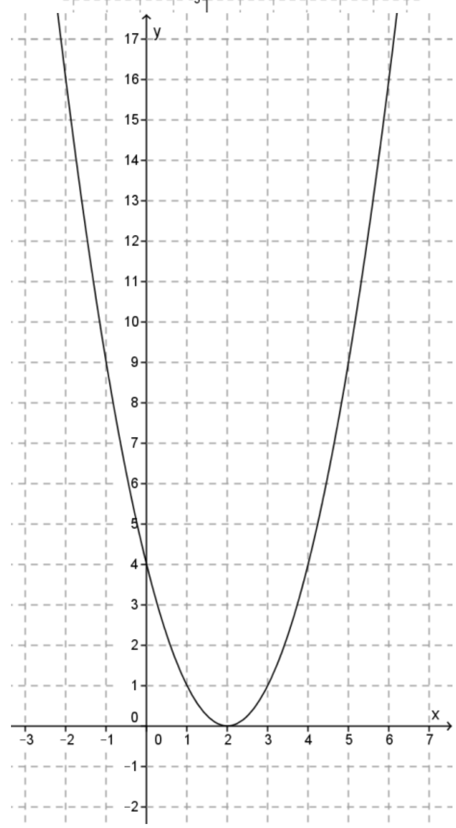
h) $f(x) = (x-1)^2 - 1$

raízes: 0 e 2

24)



25)



26)

27)

28)

29)

30

31)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

MACHADO, Antônio dos Santos; Matemática, Temas e Metas. São Paulo, Atual, 1988.

IEZZI, Gelson e outros; Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1. São Paulo, Atual, 5ª edição, 1977.

RUBIÓ, Angel Pandés; Matemática e suas tecnologias; Volume 1. São Paulo, IBEP, 2005.

PAIVA, Manoel; Matemática; Volume 1. São Paulo, Moderna, 1995.