Kartka papieru i własności trójkątów.

Ćwiczenie 1

Uczniowie ustalają ile znają rodzajów trójkątów.

Podział ze względu na miary kątów / Podział ze względu na długości boków	ostrokątny	prostokątny	rozwartokątny
różnoboczny	+	+	+
równoramienny	+	+	+
równoboczny	+	−	−

Ćwiczenie 2

Uczniowie otrzymują siedem rodzajów trójkątów. Metodą załamywania kartki szukają:

a) punktu przecięcia symetralnych
b) punktu przecięcia dwusiecznych
c) punktu przecięcia wysokości
d) punktu przecięcia środkowych.

Ćwiczenie 3

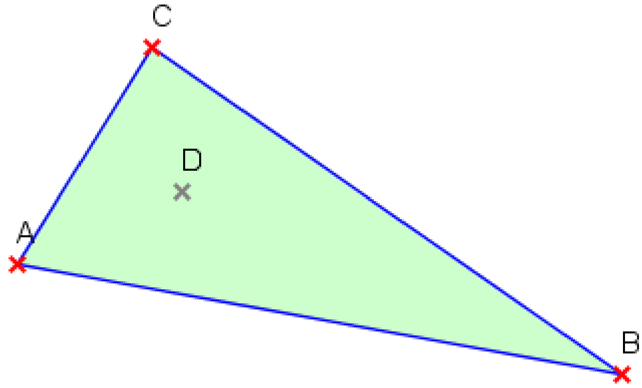
Uczniowie opowiadają o swoich odkryciach.

Ćwiczenie 4

Uczniowie pracują w grupach.

Uczniowie dostają do wykonania ćwiczenie. Na wykonanie pracy mają 15 minut.

grupa A



Zbadaj, jakim szczególnym punktem trójkąta ABC jest punkt D. Uwzględnij różne sposoby przeprowadzenia tego badania.
Wymień, jak najwięcej faktów matematycznych (definicje, własności, twierdzenia, wzory, procedury), które kojarzą się bezpośrednio lub pośrednio z tym rysunkiem. Uwzględnij różne rodzaje trójkątów ze względu na kąty.
Zastosuj podane wzory wprowadzając przykładowe dane.

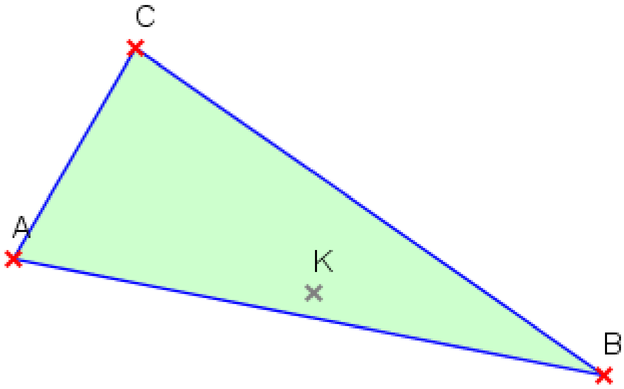
<u>Oczekiwane efekty</u>

Punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.
Załamujemy kartkę tak, aby wyznaczyć dwusieczne dwóch kątów wewnętrznych trójkąta i znajdujemy ich punkt wspólny.
Punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt, gdyż jest punktem przecięcia się dwusiecznych.
<u>Fakty matematyczne kojarzące się z rysunkiem:</u>

1. Konstrukcja dwusiecznej kąta,
2. Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej z punktu leżącego poza daną prostą.
3. Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest równo oddalony od boków trójkąta.
4. Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia się dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta.
5. Własność - dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
6. Własność - w każdy trójkąt można wpisać okrąg.
7. Każdy punkt dwusiecznej jest jednakowo oddalony od ramion kąta.
8. Proste zawierające boki trójkąta to styczne do okręgu.
9. Styczna jest prostopadła do promienia, którego końcem jest punkt styczności.
10. Styczna jest prostopadła do promienia, którego końcem jest punkt styczności.
11. Długość promienia okręgu wpisanego w dowolny trójkąt można obliczyć ze wzoru $P = \frac{(a+b+c)r}{2}$.
12. Długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny można wyznaczyć ze wzoru $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.
13. Długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny można wyznaczyć ze wzoru $r = \frac{a+b-c}{2}$.

14. Długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny można wyznaczyć: wykorzystując twierdzenie o odcinkach stycznych i twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta o bokach h – r, r b- (1/2)a, gdzie a długość podstawy, b – długość ramienia, h – długość wysokości odpowiadającej podstawie trójkąta.

Grupa B



Zbadaj, jakim szczególnym punktem trójkąta ABC jest punkt K. Uwzględnij różne sposoby przeprowadzenia tego badania. Wymień, jak najwięcej faktów matematycznych (definicje, własności, twierdzenia, wzory, procedury), które kojarzą się bezpośrednio lub pośrednio z tym rysunkiem. Uwzględnij różne rodzaje trójkątów ze względu na kąty.

Zastosuj podane wzory wprowadzając przykładowe dane.

<u>**Oczekiwane efekty**</u>

Punkt K jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.

Załamujemy kartkę tak, aby zaznaczyć symetralne dwóch boków trójkąta i znajdujemy ich punkt wspólny.

Punkt K jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie, gdyż jest punktem przecięcia się symetralnych dwóch boków tego trójkąta.

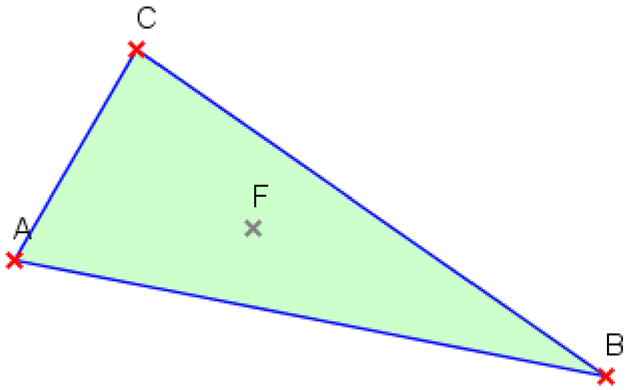
<u>Fakty matematyczne kojarzące się z rysunkiem:</u>

1. Konstrukcja symetralnej odcinka.
2. Pojęcie symetralnej – prosta prostopadła do odcinka przechodząca przez jego środek.
3. Własność symetralnej – zbiór punktów równo oddalonych od końców odcinka.
4. Środek okręgu opisanego na trójkącie jest równo oddalony od wierzchołków trójkąta.
5. Środek okręgu opisanego na trójkącie jest punktem przecięcia się symetralnych boków trójkąta.
6. Własność – symetralne przecinają się w jednym punkcie.
7. Własność - na każdym trójkącie można opisać okrąg.
8. Zależność rodzaju trójkąta od położenia środka okręgu opisanego na trójkącie:
   Środek okręgu opisanego
   - na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej,

- na trójkącie ostrokątnym punktem wewnętrznym trójkąta,
- na trójkącie rozwartokątnym punktem zewnętrznym trójkąta.

9. Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równoboczny można wyznaczyć ze wzoru $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
10. Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym można wyznaczyć ze wzoru $R = \frac{c}{2}$.

Grupa C



Zbadaj, jakim szczególnym punktem trójkąta ABC jest punkt F. Wymień, jak najwięcej faktów matematycznych (definicje, własności, twierdzenia, wzory, procedury), które kojarzą się bezpośrednio lub pośrednio z tym rysunkiem. Uwzględnij różne rodzaje trójkątów ze względu na kąty.

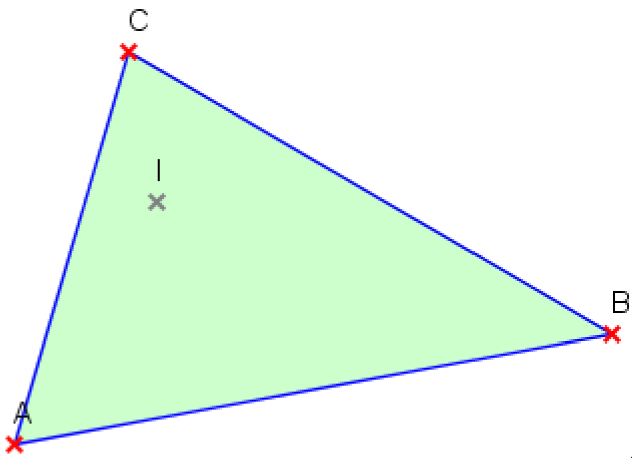
Oczekiwane efekty

Punkt F jest środkiem ciężkości trójkąta.
Załamujemy kartkę tak, aby wyznaczyć środkowe dwóch boków trójkąta i znajdujemy ich punkt wspólny.
Punkt K jest środkiem ciężkości trójkąta, gdyż jest punktem przecięcia się środkowych dwóch boków tego trójkąta.
Fakty matematyczne kojarzące się z rysunkiem:

1. Konstrukcja środka odcinka jako punktu przecięcia symetralnej z odcinkiem.
2. Pojęcie symetralnej – prosta prostopadła do odcinka przechodząca przez jego środek.
3. Własność symetralnej – zbiór punktów równo oddalonych od końców odcinka.
4. Definicja środkowej – odcinek łączący środek boku trójkąta z wierzchołkiem przeciwległym temu bokowi.
5. Definicja środka ciężkości trójkąta – punkt przecięcia środkowych trójkąta.
6. Własność – środkowe przecinają się w jednym punkcie.
7. Twierdzenie – środkowe dowolnego trójkąta przecinają się w stosunku 1 : 2.
8. Środek ciężkości trójkąta równobocznego jest równocześnie środkiem okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie i r : R = 1 : 2.
9. Środkowe trójkąta równobocznego są równe wysokości $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

10. Jedna ze środkowych trójkąta prostokątnego jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.
11. Jedna ze środkowych trójkąta równoramiennego jest jednocześnie wysokością trójkąta odpowiadającą jego podstawie.
12. Środek okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie równoramiennym należy do wysokości poprowadzonej na podstawę trójkąta. W trójkącie równoramiennym, który nie jest równobocznym środki okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie nie pokrywają się.

Grupa D



Zbadaj, jakim szczególnym punktem trójkąta ABC jest punkt I. Wymień, jak najwięcej faktów matematycznych (definicje, własności, twierdzenia, wzory, procedury), które kojarzą się bezpośrednio lub pośrednio z tym rysunkiem. Uwzględnij różne rodzaje trójkątów ze względu na kąty.
Zastosuj podane wzory wprowadzając przykładowe dane.

<u>**Oczekiwane efekty**</u>

Punkt I jest ortocentrum trójkąta.
Załamujmy kartkę tak, aby wyznaczyć wysokości (proste prostopadłe z dwóch wierzchołków trójkąta do przeciwległych boków tego trójkąta) i znajdujemy ich punkt wspólny.
Punkt I jest ortocentrum trójkąta, gdyż jest punktem przecięcia się wysokości dwóch boków tego trójkąta.
<u>Fakty matematyczne kojarzące się z rysunkiem:</u>

1. Konstrukcja prostej prostopadłej do danej z punktu leżącego poza daną prostą.
2. Definicja wysokości trójkąta – najkrótszy odcinek łączący wierzchołek trójkąta z prostą zawierającą przeciwległy bok trójkąta.
3. Własność – wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
4. Wysokości trójkąta równobocznego przecinają się w stosunku 1 : 2.
5. Długość wysokości trójkąta równobocznego można wyznaczyć ze wzoru $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

6. Długość najkrótszej wysokości trójkąta prostokątnego można wyznaczyć ze wzorów: $h = \frac{ab}{c}$, $h = \sqrt{pq}$.
7. Długość najkrótszej z wysokości trójkąta prostokątnego jest średnią geometryczną długości p i q odcinków na jakie wysokość dzieli przeciwprostokątną.
8. Dwie wysokości trójkąta prostokątnego pokrywają się z przeciwprostokątnymi trójkąta.
9. Dwie wysokości trójkąta rozwartokątnego leżą na zewnątrz trójkąta.

Ćwiczenie 4

Podsumowanie zajęć - uczniowie uzupełniają zdania.

1. Jeśli trójkąt jest ………. ………………… to środek okręgu wpisanego w ten trójkąt i opisanego na tym trójkącie pokrywają się,
2. Jeśli punkt przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych w trójkącie dzieli każdą z nich w tym samym stosunku 1: 2 to trójkąt ten jest ……………………………………………
3. Jeśli punkt przecięcia wysokości w trójkącie ostrokątnym dzieli każdą z nich w tym samym stosunku 1: 2 to trójkąt ten jest ………………………………………………………………
4. Jeśli w trójkącie dokładnie jedna ze środkowych pokrywa się z wysokością poprowadzoną z tego samego wierzchołka, co środkowa to trójkąt ten jest trójkątem ……………………………………………………
5. Jeśli jedna ze środkowych jest równa połowie długości boku, na którym jest poprowadzona to ten trójkąt jest trójkątem …………………………………………………….
6. W trójkącie równoramiennym wysokość poprowadzona z wierzchołka między równymi bokami dzieli ………………………………… na połowy.
7. Jeśli wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną na połowy to jest równocześnie ……………………………………….
8. Środek okręgu wpisanego i okręgu opisanego leżą na jednej wysokości, (ale są to różne punkty) to trójkąt jest ………………………….
9. Jeśli jedna z dwusiecznych kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach to trójkąt jest …………………………………..
10. Jeśli jedna z wysokości w trójkącie dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach to trójkąt jest …………………………………..
11. Jeśli dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o równych polach to trójkąt jest …………………………………..
12. Środkowa dzieli trójkąt na dwa trójkąty, stosunek pól tych trójkątów wynosi ………
13. Jeśli wysokość opuszczona z jednego z wierzchołków zawiera się w dwusiecznej kąta tego wierzchołka, to trójkąt jest…………………………………………