

## TRIÁNGULOS – RECTAS Y PUNTOS NOTABLES

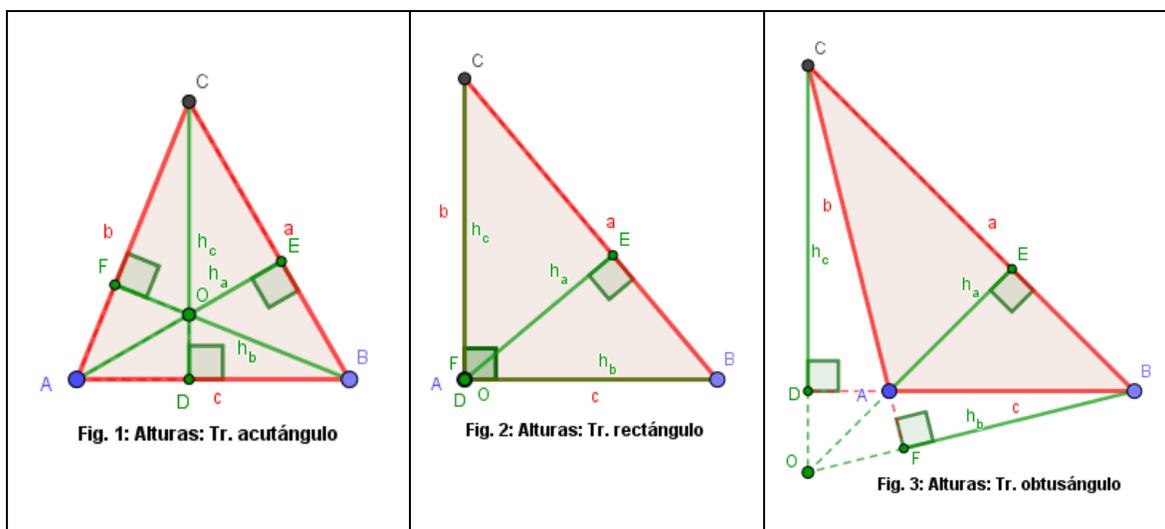
Las rectas notables del triángulo son **altura**, **mediatriz**, **mediana** y **bisectriz**.

Ver **Aplicación** Triángulos 03- Rectas y Puntos notables del triángulo:

<https://www.geogebra.org/m/utA2PDWD>

### ALTURA Y ORTOCENTRO

**Altura** de un triángulo es el **segmento de recta perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación**.



La altura sobre el lado **a**, ( $h_a$ ), es el segmento **AE**: es perpendicular al lado **a** y pasa por el vértice **A**.  
La altura sobre el lado **b**, ( $h_b$ ), es el segmento **BF**: es perpendicular al lado **b** y pasa por el vértice **B**.  
La altura sobre el lado **c**, ( $h_c$ ), es el segmento **CD**: es perpendicular al lado **c** y pasa por el vértice **C**.

En todo triángulo las tres alturas se intersectan en un punto llamado **Ortocentro** (punto **O**). El nombre deriva del término griego **orto = recto**, en referencia al ángulo formado entre las bases y las alturas.

La ubicación relativa del **ortocentro** depende del tipo de triángulo según sus ángulos:

- Si el triángulo es **acutángulo** (Fig. 1), el **ortocentro se ubica dentro del triángulo**.
- Si el triángulo es **rectángulo** (Fig.2), el **ortocentro se ubica en el vértice del ángulo recto**.

En el triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto reciben el nombre de **catetos**: uno es el lado **b** o lado **AC** y el otro es el lado **c** o lado **AB**. (El lado opuesto al ángulo recto recibe el nombre de **hipotenusa**: lado **a** o lado **BC**).

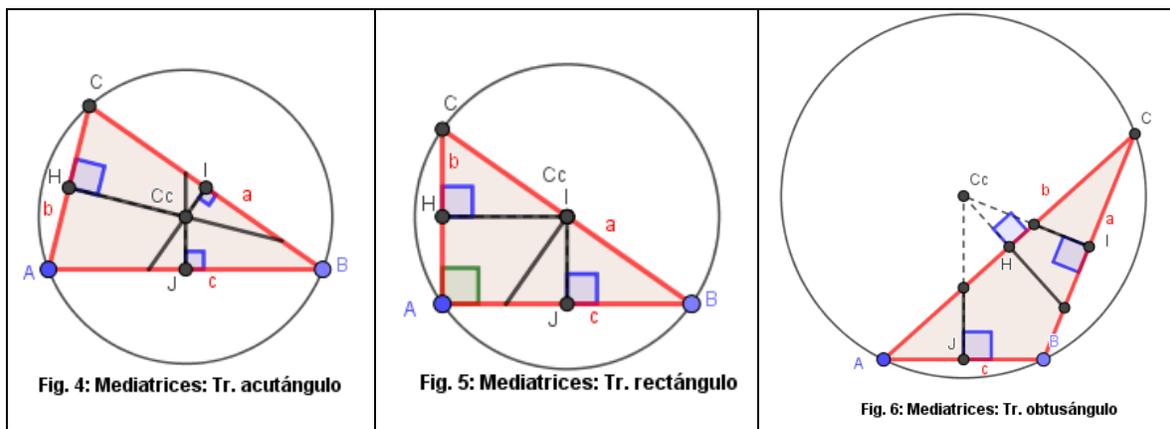
Dada la condición de que los catetos del triángulo rectángulo son perpendiculares entre sí, la altura sobre  $c$  es el cateto  $b$  o  $AC$ , y la altura sobre  $b$  es el cateto  $c$  o  $AB$ . En resumen, un cateto es altura sobre el otro cateto.

- Si el triángulo es **obtusángulo** (Fig. 3), el **ortocentro se ubica por fuera del triángulo**. La altura  $h_b$  cae en la prolongación del lado  $AC$  y la altura  $h_c$  cae en la prolongación del lado  $AB$ .

## MEDIATRIZ Y CIRCUNCENTRO

**Mediatriz** de un triángulo es la **perpendicular trazada por el punto medio de cada lado del triángulo**. Los puntos  $I$ ,  $H$  y  $J$  de las Fig. 4, 5 y 6 son los puntos medios de los lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ , respectivamente.

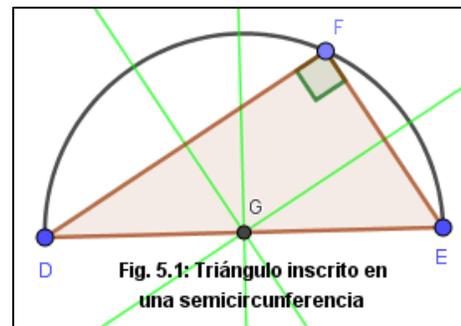
Las tres **mediatrices** de todo triángulo se intersecan en un punto llamado **Circuncetro** (punto  $C_c$ ). Este punto  $C_c$  es el centro de la **circunferencia circunscrita al triángulo**, es decir, que pasa por los tres vértices. El segmento  $AC_c$  o  $BC_c$  o  $CC_c$  es el **radio** de la circunferencia circunscrita.



La ubicación relativa del **circuncetro** también depende del tipo de triángulo según sus ángulos:

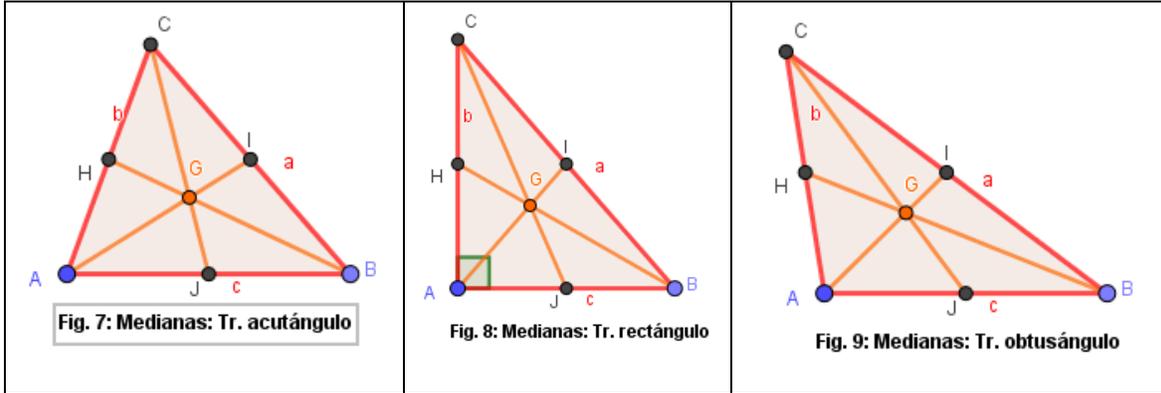
- En un **triángulo acutángulo** (Fig. 4), el **circuncetro es interior al triángulo**.
- En un **triángulo rectángulo** (Fig. 5), el **circuncetro se ubica en el punto medio de la hipotenusa**.
- En un **triángulo obtusángulo** (Fig. 6), el **circuncetro es exterior al triángulo**.

La propiedad de que el **circuncetro** de un **triángulo rectángulo** se ubica en el punto medio de la hipotenusa (Fig. 5) permite dibujar un triángulo rectángulo a partir de la hipotenusa como se ilustra en la Fig. 5.1:  $DE$  es la hipotenusa y  $G$  es su punto medio. Con centro en  $G$  se traza una **semicircunferencia** que pasa por  $D$  y por  $E$ . Todo punto  $F$  sobre la **semicircunferencia** forma con  $D$  y con  $E$  un triángulo rectángulo en el vértice  $F$ . Las rectas verdes son las **mediatrices** del triángulo  $DEF$  y  $G$  es el **circuncetro**.



## MEDIANA Y BARICENTRO

**Mediana** de un triángulo es el segmento de recta que une el punto medio de cada lado con el **vértice opuesto**. Los puntos **I, H** y **J** de las Fig. 7, 8 y 9 son los puntos medios de los lados **a, b** y **c**, respectivamente.



Cada **mediana** de un triángulo divide al triángulo en dos triángulos de igual área. En las figuras la **mediana JC** divide al triángulo **ABC** en dos triángulos, **AJC** y **JBC**, los cuales tienen igual área (*los dos tienen igual base e igual altura*). Algo similar sucede con las otras dos medianas.

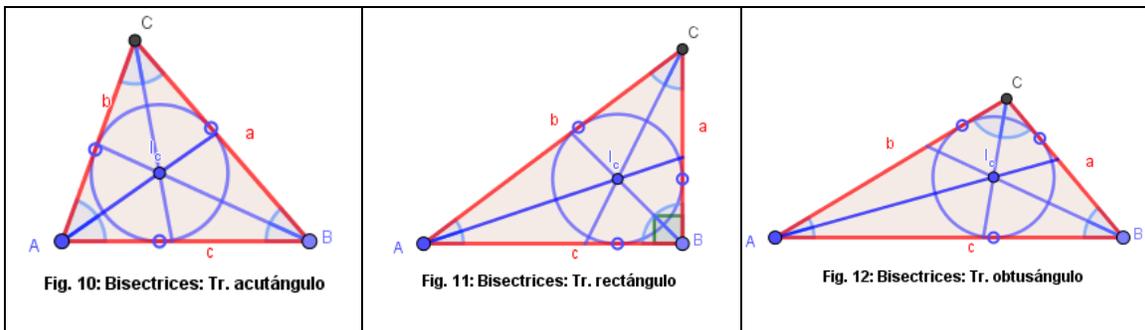
Las **tres medianas** de todo triángulo se intersecan en un punto llamado **Baricentro**, (punto **G**), también llamado **centroide** o **centro de gravedad**.

El **baricentro** siempre es interior al triángulo como se ilustra en las Fig. 7, 8 y 9.

El **baricentro** divide **cada mediana** en dos segmentos con una relación **2:1**, es decir, la longitud de un segmento es el doble de la longitud del otro: En las figuras, la longitud de **AG** es el doble de la longitud de **GI**; la longitud de **BG** es el doble de la longitud de **GH**, y la longitud de **CG** es el doble de la longitud de **GJ**.

## BISECTRIZ E INCENTRO

**Bisectriz** de un ángulo interior de un triángulo es la **recta que pasa por el vértice del ángulo y divide al ángulo en dos ángulos iguales**.

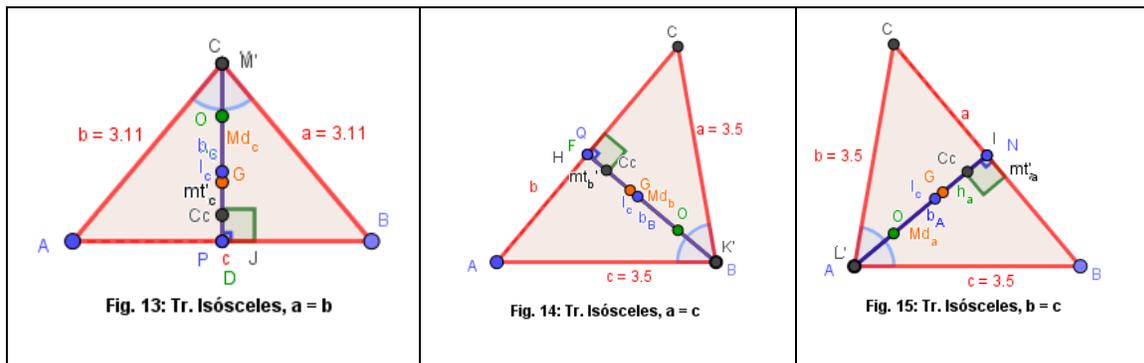


Las tres **bisectrices** de todo triángulo se intersecan en un punto llamado **Incetro** (punto  $I_c$ ). Este punto  $I_c$  es el centro de la **circunferencia inscrita al triángulo**, es decir, la circunferencia más grande contenida en el triángulo y que es tangente a cada uno de los lados.

El **radio** de la circunferencia inscrita es cada uno de los segmentos entre el **incetro**  $I_c$  y los puntos de tangencia (Fig. 10, 11 y 12).

El **incetro**, al igual que el **baricentro**, siempre es interior al triángulo (Fig. 10, 11 y 12).

### RECTAS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO ISÓSCELES Y EN EL TRIÁNGULO EQUILÁTERO

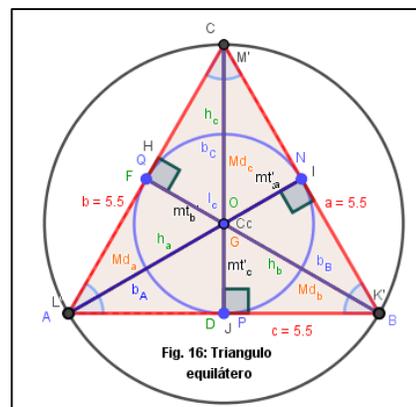


Las Fig. 13, 14 y 15 son **triángulos isósceles** en los cuales se han dibujado las cuatro líneas notables sobre el **lado no congruente**. El lado  $c$  es el lado no congruente de la Fig. 13, el lado  $b$  es el lado no congruente de la Fig. 14 y el lado  $a$  es el lado no congruente de la Fig. 15.

Como se puede apreciar, en **todo triángulo isósceles**, la **altura es a la vez mediana, mediatriz y bisectriz**. De la misma manera, la **mediana** es a su vez altura, mediatriz y bisectriz; la **mediatriz** es a su vez altura, mediana y bisectriz; y la **bisectriz** es a su vez altura, mediana y mediatriz.

En **todo triángulo equilátero**, las cuatro líneas notables sobre cualquiera de los tres lados coinciden como se ilustra en la Fig. 16. Esto se debe a que los dos lados de cualquiera de los vértices, son congruentes.

Consecuentemente, ortocentro, baricentro, circuncentro e incetro de todo triángulo equilátero coinciden en un solo punto.

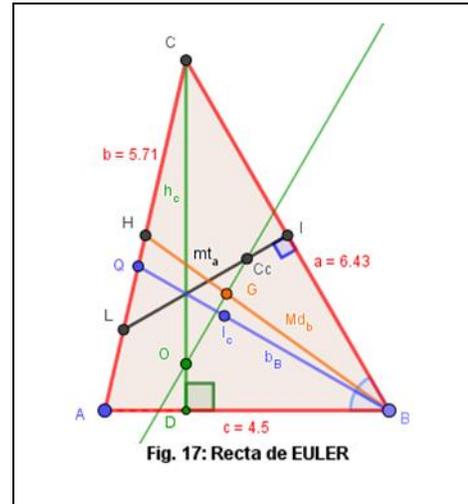


## RECTA DE EULER

En todo triángulo los puntos ortocentro (de alturas), baricentro (de medianas) y circuncentro (de mediatrices) siempre están alineados y la recta que pasa por ellos tres se llama **RECTA DE EULER**. Fig. 17.

Esta propiedad la demostró **Leonhard Euler**, matemático y físico suizo (1707 – 1783), razón por la cual lleva su nombre.

Cuando el triángulo es isósceles, el **incentro** (punto de intersección de las bisectrices) **también se alinea con los otros tres**, como se muestra en las figuras 13, 14 y 15.



*Profedomingohely*