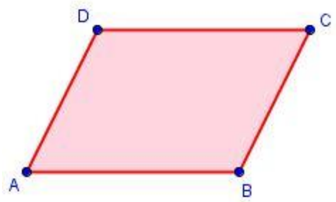
Geometria Analitica Piana.



Applicazione: problema sul Parallelogramma.
"Quesito sulla costruzione della figura".

Testo:

"Sono date le equazioni $3x - y + 5 = 0$ e $4x + 5y - 6 = 0$ di due lati e l'equazione $x + 6y + 8 = 0$ di una delle due diagonali di un quadrilatero.
Determina i quattro vertici in modo che il quadrilatero, che così resta individuato, risulti essere un parallelogramma." [(-1;2), (4;-2), (3;-5), (-2;-1)]

Risoluzione:

Algoritmo:
Impostiamo il procedimento risolutivo in due momenti:

a) dapprima lavoreremo sui dati del testo;
b) poi ragioneremo sul grafico parziale così ottenuto.

Primo passo:

vertice:

cos'è: il vertice di un poligono è l'estremo in comune di due lati consecutivi della figura.

come si fa: il lato è una parte limitata di una retta, quindi per determinare il vertice, punto di incontro di due rette, dobbiamo mettere a sistema le rette a cui appartengono i lati presi in esame.

considero: iniziamo col rappresentare graficamente le rette assegnate, in modo da cominciare ad intravedere la posizione del quadrilatero da rappresentare e poter decidere quali rette considerare.

opero: assegniamo un nome ad ogni retta e determiniamone due punti per la sua rappresentazione.
Perché solo due punti?
Ricorda: per due punti distinti passa una ed una sola retta.

nota: Poiché questo è un esempio di esercizio in cui la vista grafica è di fondamentale importanza, possiamo farci guidare anche dai colori, usati, evidentemente, con criterio:
Qui la fantasia è d'obbligo!
Ad esempio possiamo usare:
lo stesso colore per le rette //
la stessa lettera per le rette // ma con diverso pedice
uno stile diverso per le coppie di rette //, distinguendo tra quella assegnata (ad es. stile continuo) e quella da determinare (ad es. stile tratteggiato).

retta r_1 r_1: $3x - y + 5 = 0$

riscriviamo in forma esplicita l'equazione **(*)**, ottenendo:

$$r_1: \; y = 3x + 5$$

Determiniamo, quindi, due suoi punti distinti, se possibile con coordinate intere (utili per il disegno a mano libero), li riportiamo sul piano cartesiano e tracciamo la retta per questi punti.

spazio per i calcoli

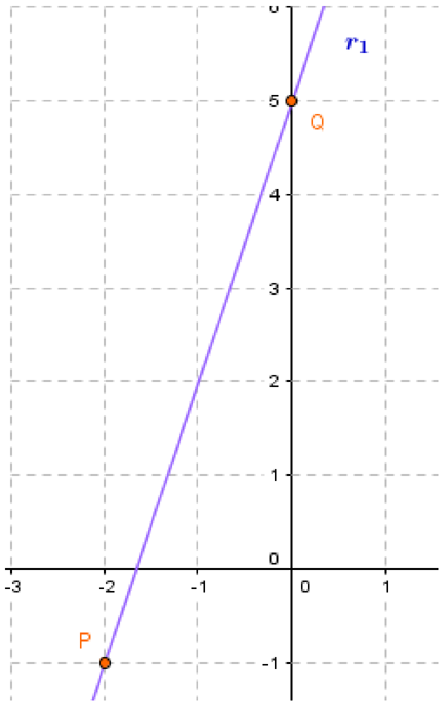
sappiamo già che il termine noto mi dà la quota, per cui si ha:

$$Q \equiv (0; 5)$$

per il secondo punto prendiamo ad esempio: $x = -1$
otteniamo:

$$y(-1) = 3 \cdot (-1) + 5 =$$
$$= -3 + 5 =$$
$$= 2$$

spazio per il grafico



dati utili al grafico

retta r_1: $y = 3x + 5$

punti: $Q \equiv (0; 5)$

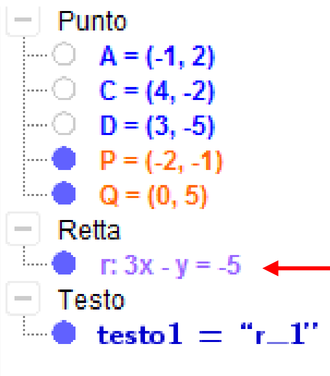
$P \equiv (-1; 2)$

(*) Esplicitare una funzione vuol dire isolare la y, lasciandola da sola alla sinistra dell'equazione, ossia con segno positivo e coefficiente 1. Nel nostro caso si ha:

$$-y = -3x - 5$$
$$y = 3x + 5$$

nota: Verifichiamo immediatamente il risultato ottenuto, per avere un riscontro della bontà dei calcoli effettuati.
Allo scopo utilizziamo il software Geogebra.

Vista algebra



Possiamo procedere in due modi:

1) Immettere nella casella di inserimento i due punti, uno per volta, e poi tracciare la retta per questi punti, controllandone l'equazione nella **"vista algebra"**, posta sulla sinistra del foglio di lavoro;
2) Immettere prima l'equazione della retta e successivamente i due punti, verificando che effettivamente giacciono sulla retta.

retta s_1 Ripetiamo lo stesso procedimento per la retta del secondo lato, ottenendo:

$$s_1:\ 4x + 5y - 6 = 0$$

riscriviamo in forma esplicita l'equazione, ottenendo:

$$s_1:\quad y = -\frac{4}{5}x + \frac{6}{5}$$

In questo caso, volendo determinare numeri interi, il calcolo è un po' più laborioso.
Dal momento che neanche la quota è un numero intero, conviene scrivere il secondo termine come un'unica frazione:

$$y = \frac{-4x + 6}{5}$$

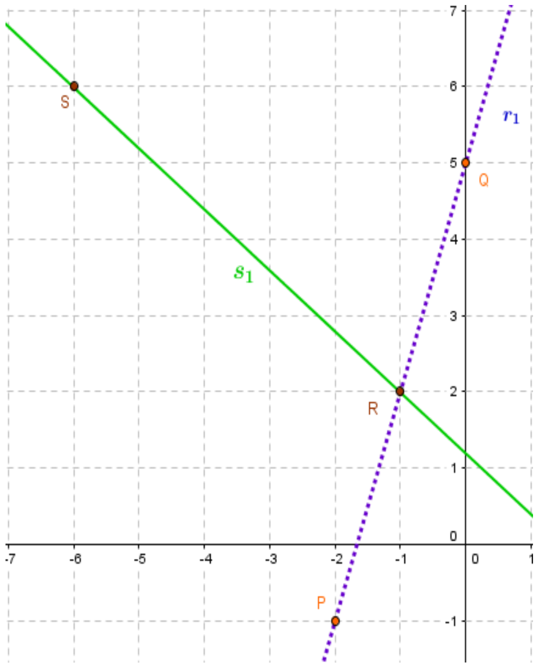
e, se siamo allenati nel calcolo mentale, troviamo due numeri che sostituiti alla x rendano i numeri risultanti multipli del denominatore (le coordinate intere ci aiuteranno nella precisione del grafico a mano libera).
Ad esempio possiamo scegliere x = -1 in quanto otteniamo:

$$y(-1) = \frac{-4(-1) + 6}{5} = \frac{4 + 6}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

ed x = -9 (oppure 4 oppure -6)

$$y(-6) = \frac{-4(-6)+6}{5} = \frac{24+6}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

Nel caso in cui non riesco nel tentativo, provo ad approssimare la frazione. **(**)**



retta s_1: $y = -\frac{4}{5}x + \frac{6}{5}$

punti: $R \equiv (-1; 2)$

$S \equiv (-6; 6)$

nota: Osservando il grafico, ci rendiamo conto che abbiamo implicitamente determinato il punto d'intersezione delle due rette, ossia **(*)**:

$$\boldsymbol{r \cap s = R \equiv (-1; 2)}$$

(**) Algebricamente dobbiamo risolvere il sistema di equazioni contenente le equazioni delle due rette, con il metodo che più riteniamo opportuno.
In geometria analitica possiamo determinare le coordinate del punto anche graficamente: è necessario che siano numeri interi, però, per determinare con accuratezza le coordinate cartesiane del punto. Invece, ed è qui il grande aiuto del software **Geogebra**: utilizzando i comandi specifici, esso ci fornisce l'esatta intersezione delle rette, anche in presenza di numeri razionali.
Possiamo anche verificare la soluzione del sistema, senza risolverlo algebricamente, se non necessario, sostituendo le coordinate determinate graficamente nelle equazioni date e controllare che verificano il sistema, ossia risultano delle identità.

retta d Con lo stesso procedimento grafichiamo, infine, la retta della diagonale. Otteniamo:

d: x + 6y + 8 = 0

riscriviamo in forma esplicita l’equazione, ottenendo: d: $y = -\frac{1}{6}x - \frac{8}{6}$

Anche in questo caso, volendo determinare numeri interi, il calcolo è un po’ più laborioso.
Poiché anche in questo caso la quota non è un numero intero, conviene scrivere il secondo termine come un’unica frazione (quindi non conviene neanche semplificare la frazione):

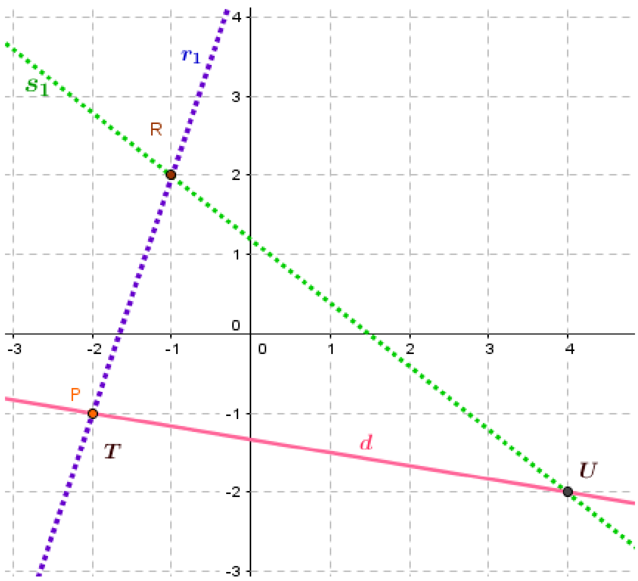
$$y = \frac{-x-8}{6}$$

Per ottenere numeri interi, questa volta la scelta è più ampia (il denominatore è 6 ed ha più multipli) e li trovo velocemente.
Ad esempio va bene allo scopo x = -2 in quanto:

$$y(-1) = \frac{-(-2)-8}{5} = \frac{2-8}{6} = -\frac{6}{6} = -1$$

ed x = 4, ottenendo:

$$y(4) = \frac{-4-8}{6} = -\frac{12}{6} = -2$$



retta d: $y = -\frac{1}{6}x - \frac{4}{3}$

punti: $T \equiv (-2; -1)$

$U \equiv (4; -2)$

Ci accorgiamo però che nel momento in cui andiamo ad individuare nel piano il punto T esso è già occupato dal punto precedentemente trovato per graficare la retta r, per cui si conclude che P è il punto di intersezione tra la retta r di uno dei lati e la retta d di una delle due diagonali della figura che stiamo cercando.
Quindi è:

$$\boldsymbol{r_1 \cap d = P \equiv T \equiv (-2; -1)}$$

Inoltre sempre dall'osservazione del grafico possiamo concludere che il punto U appartiene anche alla retta s, infatti algebricamente si ha, sostituendo la x del punto nella retta s:

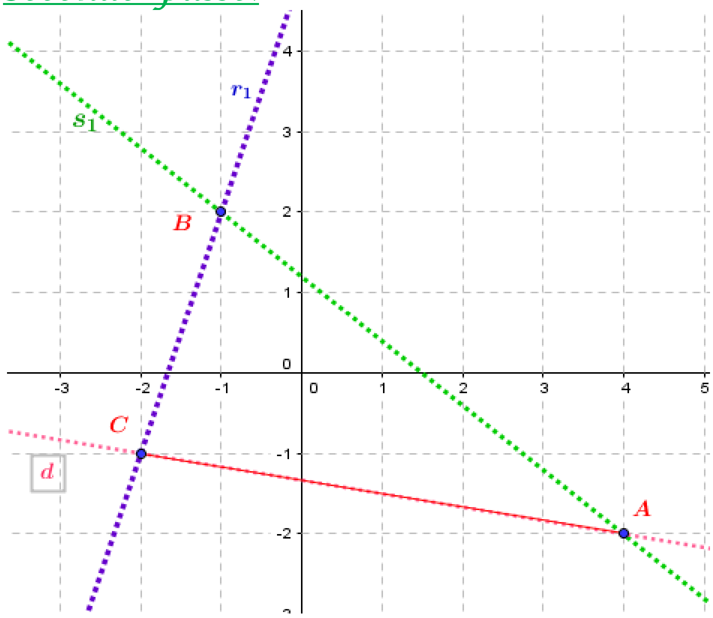
$$y(4) = \frac{-4(4)+6}{5} = \frac{-16+6}{5} = -\frac{10}{5} = -2$$

Possiamo concludere che:

$$\boldsymbol{s_1 \cap d = U \equiv (4; -2)}$$

nota: Possiamo riordinare le idee, facendo un po' di pulizia nel grafico, lasciando solo i dati utili per il prosieguo della risoluzione, ossia eliminiamo i punti inutili. Possiamo rinominare i punti importanti, ossia quelli che abbiamo intuito, dalla attenta lettura del grafico, essere tre dei quattro vertici della figura che dobbiamo determinare.

Secondo passo:



Siamo arrivati a determinare la situazione indicata nella figura a lato.

Sapendo che la d è una retta diagonale, di conseguenza il segmento AC risulta una delle due diagonali del quadrilatero e dovendo essere interna alla figura, deduciamo che il quarto vertice mancante deve trovarsi al di sotto di tale diagonale.

Per determinarlo ricorriamo alla definizione di parallelogramma, ossia teniamo presente che deve essere un quadrilatero avente i lati opposti paralleli.

Quindi, sempre facendo uso della figura **(*)**, organizziamo il lavoro successivo:

1) devo trovare la retta r_2: retta per A parallela al lato BC (retta r_1);
2) devo trovare la retta s_2: retta per C parallela al lato AC (retta s_1);
3) devo trovare il punto di intersezione di queste due rette: quello è il punto D cercato, quarto vertice del mio parallelogramma.

nota: **(*) Si constata l'utilità della lettura del grafico e quindi l'importanza della geometria analitica.**

retta r_2

Cominciamo quindi col determinare la retta r_2:

sappiamo che: $r_2 \parallel r_1 \;\rightarrow\; m_{r_2} \cong m_{r_1} \Longrightarrow \quad m_{r_1} = 3$ per cui $m_{r_2} = 3$

con le informazioni a nostra disposizione per determinare la retta r_2 utilizziamo la formula:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

dove con x_1 ed y_1 intendiamo le coordinate del punto A.

Sostituendo opportunamente i dati, otteniamo:

$$r_2: y - (-2) = 3\,(x - 4)$$

svolgendo i calcoli, si ha:

$$y + 2 = 3x - 12$$

otteniamo:

$$y = 3x - 12 - 2$$

da cui infine si ricava: $\boldsymbol{r_2: \; y = 3x - 14}$

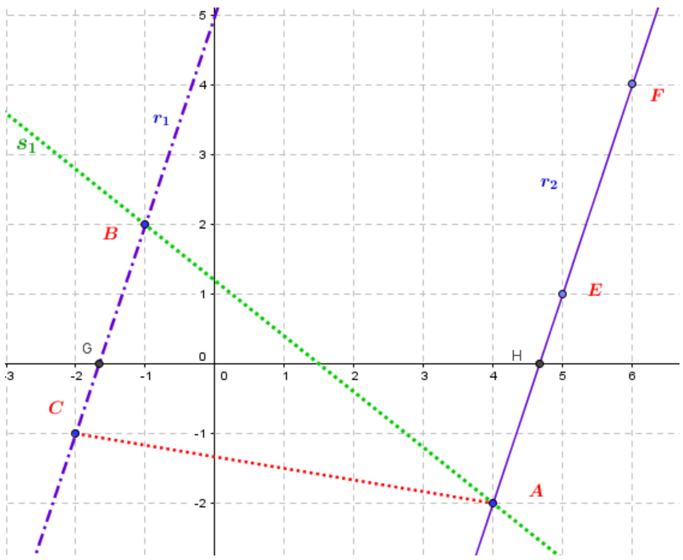
Nel determinare i due punti della retta, per poterla graficare, anche se intera in questo caso non conviene utilizzare la quota, troppo distante dal centro del disegno che sto esaminando.

Prendo, quindi, numeri nei dintorni della figura piana in esame, ad esempio:

$$y(5) = \; 3 \cdot 5 - 14 = 15 - 14 = 1$$

e

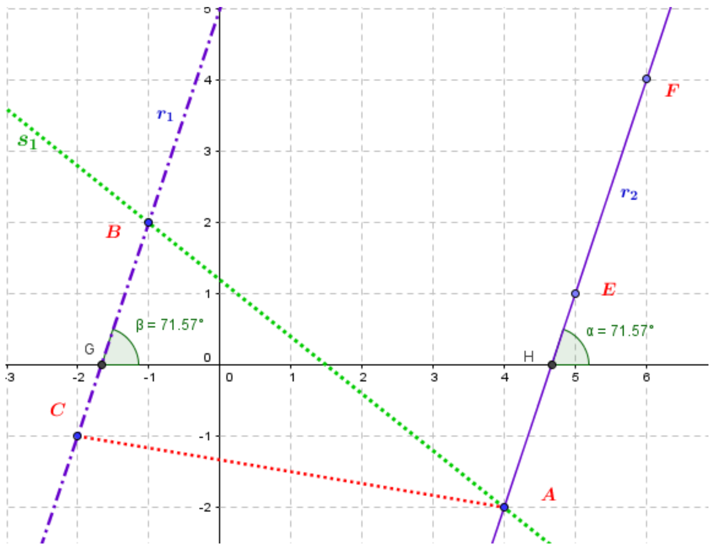
$$y(6) = \; 3 \cdot 6 - 14 = 18 - 14 = 4$$



retta r_2: $y = 3x - 14$

punti: $E \equiv (5; 1)$

$F \equiv (6; 4)$



Verifica grafica:

a) la retta r_2 trovata passa per il punto A

b) gli angoli che le rette r_1 ed r_2 formano con l'asse delle ascisse sono uguali, per cui possiamo dedurre che le rette risultano effettivamente parallele

(gli angoli sono corrispondenti ed uguali, allora le rette risultano parallele e tagliate dalla retta trasversale $\vec{x}$, ossia l'asse delle ascisse.)

Allo stesso modo determiniamo l'equazione della retta s_2.

retta s_2

poiché deve essere $s_2 \parallel s_1 \ \rightarrow \ m_{s_2} \cong m_{s_1} \Longrightarrow m_{s_1} = -\frac{4}{5}$ per cui $m_{s_2} = -\frac{4}{5}$

con le informazioni a nostra disposizione per determinare la retta s1 utilizziamo la stessa formula precedente, ossia:

$$s_2\colon y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Con x_1 ed y_1 coordinate del punto C.

da cui sostituendo opportunamente i dati, otteniamo:

$$s_2\colon y - (-1) = -\frac{4}{5}\,(x - (-2))$$

svolgendo i calcoli, si ha:

otteniamo:

$$y + 1 = -\frac{4}{5}x - \frac{8}{5}$$

$$y = -\frac{4}{5}x - \frac{8}{5} - 1$$

da cui infine si ricava: $$s_2\colon \quad y = -\frac{4}{5}x - \frac{13}{5}$$

Per determinare ora i due punti della retta, utilizziamo sempre lo stesso metodo, per cui riscriviamo l'equazione con una sola frazione a destra, otteniamo così:

$$y = \frac{-4x - 13}{5}$$

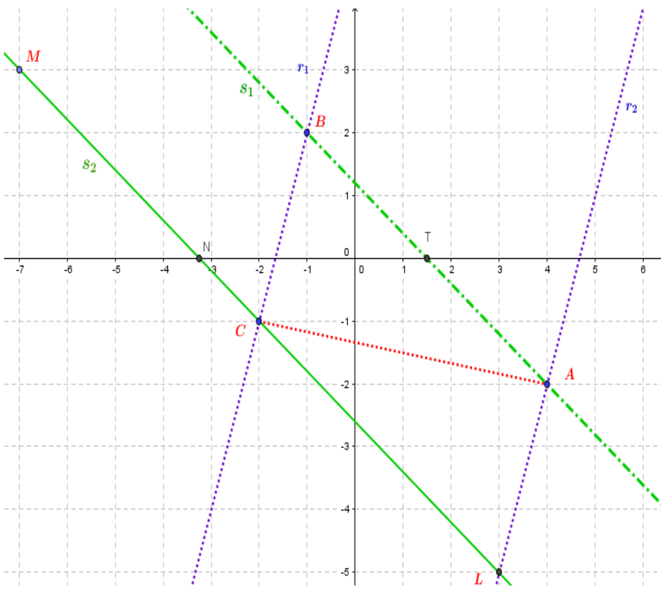
Prendo come valori da attribuire alla x ad esempio:

$$y(-7) = \frac{-4\,(7) - 13}{5} = \frac{28 - 13}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

e

$$y(3) = 3 \cdot 3 - 14 = 9 - 14 = -5$$

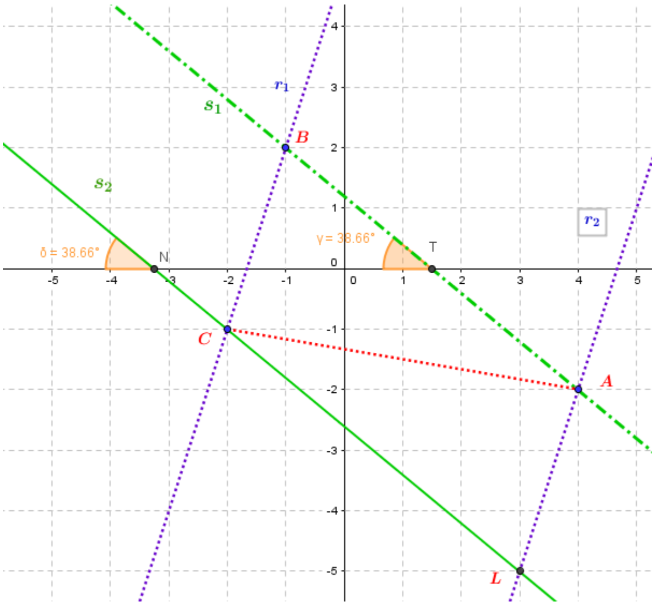
nota: Non è opportuno, ai fini di un controllo dei calcoli, utilizzare punti già noti. Conviene, invece, usarli per verificare se questi punti appartengono alla retta trovata utilizzando altri punti.



retta s_2: $y = -\frac{4}{5}x - \frac{13}{5}$

punti: $L \equiv (3; -5)$

$M \equiv (-7; 3)$



Verifica grafica:

a) la retta s_2 trovata passa per il punto C;
b) gli angoli che le rette s_1 ed s_2 formano con l'asse delle ascisse sono uguali, per cui possiamo dedurre che le rette risultano effettivamente parallele

(gli angoli sono corrispondenti ed uguali, allora le rette risultano parallele e tagliate dalla retta trasversale $\vec{x}$, ossia l'asse delle ascisse.)

A questo punto, utilizzando ancora la vista grafica del problema, osserviamo che la retta s_2 incontra la retta r_2 nel punto L.
Verifichiamo la situazione anche algebricamente. Otteniamo:

$$y(3) = \frac{-4\,(3) - 13}{5} = \frac{-12 - 13}{5} = -\ \frac{25}{5} = -\ 5$$

ossia il punto L.

Quindi L è il quarto vertice che cercavamo: conviene rinominarlo con D.

Ci troviamo, quindi, nella seguente situazione:

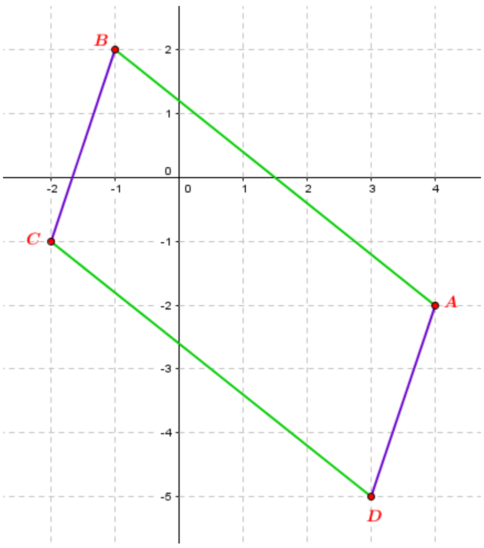


Figura piana: **parallelogramma**

Vertici: $A \equiv (4; -2)$

$B \equiv (-1; 2)$

$C \equiv (-2; -1)$

$D \equiv (3; -5)$

Il problema proposto è così risolto.