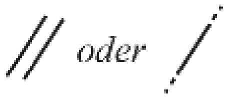
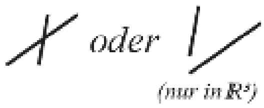
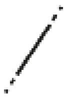
Lagebeziehung von Geraden in vektorieller Darstellung

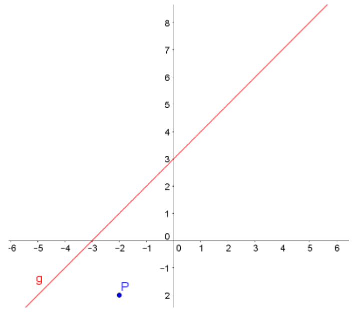
<table>
<tr><td colspan="4">Ausgangslage: $g:\vec{r_g} = \vec{a} + s \cdot \vec{u}$ und $h:\vec{r_h} = \vec{b} + t \cdot \vec{v}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">1. Richtungsvektor vergleichen: $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Lösung für k: d.h. $\vec{v}$ und $\vec{u}$ sind kollinear

</td><td colspan="2">Keine Lösung für k: d.h. $\vec{v}$ und $\vec{u}$ sind nicht kollinear

</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Punktprobe
$\vec{b} = \vec{a} + s \cdot \vec{u}$ oder $\vec{a} = \vec{b} + t \cdot \vec{v}$</td><td colspan="2">2. Geradengleichungen gleichsetzen
$\vec{a} + s \cdot \vec{u} = \vec{b} + t \cdot \vec{v}$</td></tr>
<tr><td>Gleichungssystem lösbar,
d.h. s oder t bestimmbar,
d.h. Punkt liegt auf Geraden</td><td>Gleichungssystem nicht lösbar,
d.h. s und t nicht bestimmbar,
d.h. Punkt liegt nicht auf Geraden</td><td>Gleichungssystem lösbar,
d.h. s und t bestimmbar,
d.h. g und h haben einen gemeinsamen Punkt</td><td>Gleichungssystem nicht lösbar, d.h. s und t nicht bestimmbar,
d.h. g und h haben keinen gemeinsamen Punkt</td></tr>
<tr><td>g und h sind identisch
</td><td>g und h sind parallel
</td><td>g und h schneiden sich

S bestimmen:
$S = \vec{a} + s \cdot \vec{u} = \vec{b} + t \cdot \vec{v}$
Kollision für s=t!
Schnittwinkel bestimmen:
$\varphi = \arcsin\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|}\right)$</td><td>g und h sind windschief, nur 3D
</td></tr>
</table>

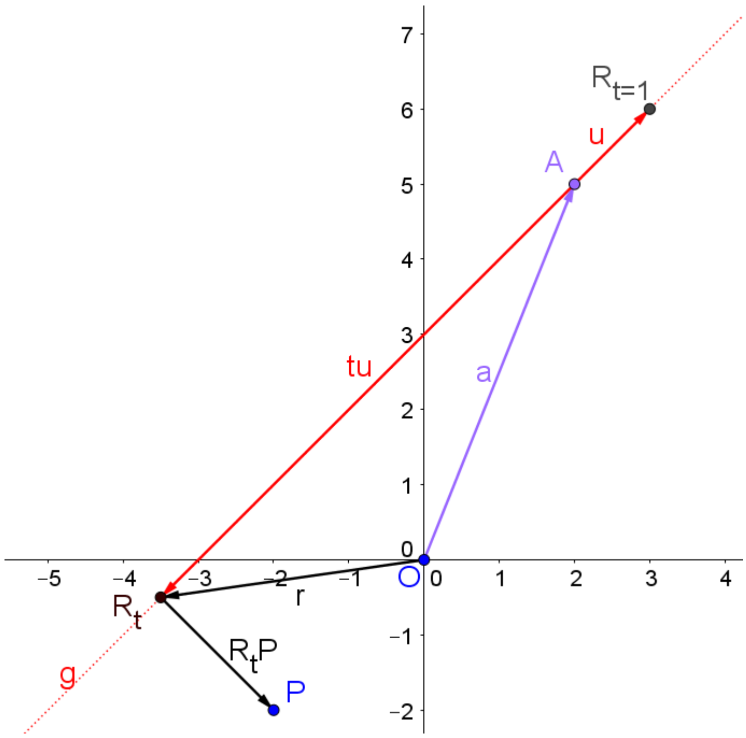
20.3.2017: Raffael Arnold Kohler

Abstand von Punkt P zur Geraden g

Ausgangslage: $g:\vec{r} = \vec{a} + t\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ und $P = (P_x, P_y, P_z)$



Ansatz: Der Abstand ist die kürzeste Verbindung, d.h. wir suchen den Punkt R_t für welchen $\overrightarrow{R_tP}$ senkrecht auf g steht: $\overrightarrow{R_tP}\cdot\vec{u} = \left(\overrightarrow{0P} - \vec{r}\right)\cdot\vec{u} = 0$



$$\overrightarrow{R_tP}\cdot\vec{u} = \left(\overrightarrow{0P} - \vec{r}\right)\cdot\vec{u} = \left(\overrightarrow{0P} - \vec{a} - t\cdot\vec{u}\right)\cdot\vec{u} = 0$$

$$\left(\overrightarrow{0P} - \vec{a}\right)\cdot\vec{u} = t\cdot\left|\vec{u}\right|^2$$

$$t = \frac{\left(\overrightarrow{0P} - \vec{a}\right)\cdot\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|^2}$$

t einsetzen in:

$$\left|\overrightarrow{R_tP}\right| = \left|\overrightarrow{0P} - \vec{r}\right| = \left|\overrightarrow{0P} - \vec{a} - t\cdot\vec{u}\right| = \sqrt{\left(P_x - a_x - t\cdot u_x\right)^2 + \left(P_y - a_y - t\cdot u_y\right)^2 + \left(P_z - a_z - t\cdot u_z\right)^2}$$

20.3.2017: Raffael Arnold Kohler