

MATERIAL PARA O PROFESSOR

Problema da calha

Nível de ensino: Ensino Superior

Objetivo: Abordar problemas de otimização envolvendo a aplicação de função quadrática utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

O Problema da Calha permite que o professor introduza ou reforce muitos conceitos e conteúdos matemáticos (MENINO; ONUCHIC, 2017). Pode inclusive ser aplicado como um teste diagnóstico no início da disciplina de Cálculo e depois ser retomado no conteúdo de Máximos e Mínimos.

Esse problema já foi aplicado e relatado por Menino e Onuchic (2017). Segundo as autoras os resultados foram promissores e gratificantes. Aproveitaremos de suas contribuições para compor esse material ao professor.

Esse problema é composto por 5 casos, e **devem ser entregues um de cada vez** aos alunos para que explorem todas as estratégias e conceitos envolvidos em cada momento. Os conteúdos e conceitos que podem ser explorados pelo professor durante a aplicação são os seguintes para cada caso:

Caso 1 – seção retangular: Medidas de comprimento, área e volume. Cálculo de perímetro. Conversão de unidades. Princípio de Cavalieri. Equação. Conceito de Função. Função quadrática. Domínio. Gráfico. Valores máximo e mínimo. Vértice. Raízes.

Caso 2 – seção triangular: Área de triângulo. Trigonometria – Seno, cosseno e tangente.

Caso 3 – seção trapézoidal: Perímetro e Área do trapézio. Ângulos suplementares e complementares. Volume.

Caso 4 – seção semicircular: Comprimento da circunferência. Área do círculo. Volume do cilindro.

Caso 5 – seção retângulo-circular: Perímetro da figura formada pelo retângulo e $\frac{1}{4}$ da circunferência. Área da figura. Volume. Derivada. Cálculo de máximos e mínimos.

Professor, é importante que os problemas sejam entregues aos alunos nessa ordem, para que ocorra a construção do conhecimento de maneira crescente. E além disso, é interessante que os problemas sejam aplicados em um laboratório de informática que esteja disponível o software GeoGebra, ou então, tenha a possibilidade de usar tecnologias móveis (tablets ou smartphones), haja vista que o GeoGebra é compatível com tais tecnologias.

É conveniente que seja estipulado um tempo para a resolução do problema logo no início da aplicação.

Seguindo a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), apresentada no capítulo Metodologia, assim que apresentar o problema aos alunos deve-se disponibilizar o **‘Aplicativo 06 – Caso 1 – primeiro momento’** em anexo. Para isso, o professor pode enviar o link `‘https://ggbm.at/hPT5szHP’` por e-mail, ou salvar o aplicativo e compartilhar através de um pen drive.

Durante a aplicação do **Caso 1**, o professor pode mediar a interpretação dos alunos de modo a se questionarem se as medidas dos lados interferem na capacidade da calha. Com o aplicativo em mãos, peça que os alunos analisem os respectivos valores obtidos quando se movimenta a medida da lateral da calha. Faça perguntas, como:

- A capacidade da calha muda conforme variam as medidas da lateral, ou será sempre o mesmo pois a chapa fornecida tem tamanho fixo?
- Existe alguma dependência entre as medidas que formam a calha?
- Quanto maior a lateral, maior a capacidade?
- Quanto maior a base, maior a capacidade?
- Plote os valores que observa em um gráfico. O que está acontecendo?
- Como descrever algebricamente essa função?
- Qual seu domínio?
- Como obter o máximo da capacidade dessa calha conhecendo sua função área?
- O que indica esse valor encontrado?

Professor, permita que os alunos percebam que a capacidade da calha está relacionada a sua área máxima, pois o comprimento da calha é constante.

Os alunos concluirão uma função quadrática e provavelmente usarão os conhecimentos sobre vértice de parábola para encontrar o valor máximo da área, e por fim a capacidade máxima. Aí fica a critério do professor iniciar com o conceito de Máximos e Mínimos com derivada a partir desse caso, ou aguardar que os alunos se questionem quais os conceitos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral podem ser explorados no problema (isso se a atividade não estiver sendo proposta como um pré-teste).

O **Caso 2** possibilita explorar diferentes conceitos da trigonometria. Inicialmente, após entregar o problema aos alunos, o professor pode disponibilizar o '**Aplicativo 06 – caso 2 – primeiro momento**' aos alunos. Para isso, o professor pode enviar o link '<https://ggbm.at/QP2barJF>' por e-mail, ou salvar o aplicativo e compartilhar através de um pen drive.

Professor, provavelmente os alunos tentarão calcular a área do triângulo usando a metade do produto entre base e a altura. Porém, o professor deve instiga-los a perceberem que nesse caso o que está variando é o ângulo, e que assim necessitamos de uma fórmula em que a altura seja vista em termos desse. O professor pode permitir que eles façam uma pesquisa, usem seus conhecimentos prévios e por fim, o professor, se necessário, explore as três fórmulas conhecidas para calcular a área de um triângulo, que são a tradicional, trigonométrica e Heron, respectivamente:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}\theta \quad A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

A partir disso, é conveniente o professor utilizar os conceitos sobre a função Seno e as relações trigonométricas no Ciclo, para relembrar sobre os limites da função Seno. Com isso, permitir que os alunos percebam que o máximo da função é quando o ângulo θ vale 90° .

Visto que os alunos já verificaram no Caso 1 que a capacidade máxima depende da área, poderão da mesma forma encontrar a capacidade máxima no Caso 2.

Os alunos deverão concluir uma capacidade máximo de 135 l, que é a mesma capacidade que encontraram no Caso 1. Sendo assim, esse é um importante momento para o professor questionar os alunos se independente do formato da seção, a capacidade será sempre o mesmo? Permita os alunos apresentarem suas opiniões, e então parta para o Caso 3.

O **Caso 3** possibilita que sejam retomados alguns conceitos de Geometria, Trigonometria, bem como, Funções.

Após entregar o problema aos alunos, o professor pode disponibilizar o '**Aplicativo 06 – caso 3 – primeiro momento**'. Para isso, o professor pode enviar o link '<https://ggbm.at/Xg6UwAjf>' por e-mail, ou salvar o aplicativo e compartilhar através de um pen drive.

Professor, possibilite que os alunos pesquisem sobre conceitos da Geometria, caso não consigam resolver de imediato. Aos poucos faça mediações que os ajudem a romper algumas deficiências com a Matemática Básica, por exemplo. Ajude-os a expressar a área do trapézio em função de uma única variável.

Espera-se que novamente os alunos concluam uma função quadrática. E com essa função e o cálculo do volume, verifiquem que o formato da seção interfere na capacidade da calha, diferente do que podem ter concluído com o resultado dos casos anteriores.

O **Caso 4** difere dos demais, pois trata de uma semicircunferência de raio x , ou seja, não é necessário escolher o corte. O professor deve mediar de modo que os alunos se atentem que o comprimento da semicircunferência é a largura da calha exceto as dobras, ou seja, 60 cm. E com isso, a maior área é quando:

$$x = \frac{60}{\pi}$$

Os alunos provavelmente tentarão calcular a área do semicírculo. Talvez alguns alunos não lembrem de imediato a equação, sendo assim, o professor poderá auxiliá-los.

O último caso, **Caso 5**, explora tanto os conceitos de retângulo como o de círculo.

Após entregar o problema aos alunos, o professor pode disponibilizar o '**Aplicativo 06 – caso 5 – primeiro momento**'. Para isso, o professor pode enviar o link '<https://ggbm.at/YKscxk6E>' por e-mail, ou salvar o aplicativo e compartilhar através de um pen drive.

Os alunos provavelmente buscarão relacionar a maior capacidade com a maior área, e utilizar tal área como uma função de uma única variável. Porém, eles podem ainda ter certas dificuldades. Sendo assim, o professor poderá auxiliá-los a verificar que a área está relacionada ao perímetro, afinal, o perímetro é fixo de valor 60 cm, e isso deve ser considerado nas variáveis.

Talvez seja conveniente o uso de uma calculadora. O professor pode permitir que o aluno use a própria calculadora do software GeoGebra, ou outra caso preferir.

Novamente os alunos deverão chegar a uma função quadrática. Então, caso o professor ainda não tenha explorado o conteúdo de Máximos e Mínimos usando derivada, é conveniente que o professor instigue os alunos a pensar sobre um caso em que a função não fosse quadrática, como seriam realizados os cálculos de otimização? Com isso, o professor deve desenvolver a teoria de Máximos e Mínimos e explorar outros problemas, e ainda, se possível retornar ao Problema da Calha usando agora diretamente o conteúdo de Cálculo.

Obs. 1: Após cada discussão o professor pode explorar o segundo momento de cada aplicativo, em anexo, para concluir a resolução do problema e intuitivamente formalizar o conteúdo. Ademais, durante a formalização é interessante que o professor varie ao menos entre a representação analítica e gráfica do conteúdo utilizando o GeoGebra.

Obs. 2: Não indicamos que esse problema seja aplicado por completo ao Ensino Médio para introduzir o conteúdo de Máximos e Mínimos de Funções, pois nem todos os conteúdos de Geometria e Trigonometria podem ser de conhecimento dos alunos. Funções é um conteúdo do 1º ano do Ensino Médio, e alguns conteúdos necessários para resolução desse problema são dos anos subsequentes. Porém, caso seja de interesse do professor aplicar, sugerimos que utilize os casos em que os conteúdos necessários para resolução são de conhecimento dos alunos.

Bom trabalho!