$\sqrt{}$ **Factsheet 1** **Folgen und Reihen**

Folgen (Mathematik verstehen 6, Kapitel 7,S.116 ff)

<u>Wichtige Begriffe und Defintionen</u>:

(Zahlen)Folge …………. **(a_n | $n \in \mathbb{N}$ *)** mit (a_1, a_2, ……….) , $n \in \mathbb{N}*$ oder (a_o, a_1,a_2 , ………) , $n \in \mathbb{N}$

a_n n-tes Folgenglied oder n-tes Glied der (Zahlen)Folge mit $n \in \mathbb{N}$

Endliche Folge (a_1, a_2, ……, a_{n-1} , a_n) mit $n \in \mathbb{N}$ * oder (a_o, a_1,a_2 , ……, a_{n-1} , a_n) mit $n \in \mathbb{N}$

Unendliche Folge (a_1, a_2, ……….) mit $n \in \mathbb{N}$ * oder (a_o, a_1,a_2 , ………) mit $n \in \mathbb{N}$

Eine Folge ( ) kann man auch als eine f: auffassen, die jeder von 0 verschiedenen natürlichen Zahl n ∈ ℕ den Funktionswert f(n) = a_n zuordnet.

Aufgaben: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots \dots . .\}$

1. Gegeben ist das Glied a_n einer Folge **(**1 - $\frac{1}{n}$ | $n \in \mathbb{N}$ *) mit der Termdarstellung a_n = 1 - $\frac{1}{n}$

a. Gib die ersten 5 Folgenglieder an und ordne sie der Größe nach mit „ <“ (Beginne mit dem kleinsten Wert)

Schranken und Monotonie

Vervollständige! S. 117 f

Wenn $a_n \geq$ L für alle $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ *** ,** dann nennt an die reelle Zahl L……………………………………………………… . Die Folge heißt dann ……………………………………………. .

Wenn $a_n \leq$ K für alle $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ *** ,** dann nennt an die reelle Zahl K ……………………………………………………. . Die Folge heißt dann ……………………………………………. .

Eine Folge (a_n| $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ***)** heißt

- monoton steigend , wenn ………………………………………..
- monoton fallend, wenn ………………………………..
- streng monoton steigend , wenn……………………………………..
- streng monoton fallend, wenn …………………………………..

1 b. Kreuze richtige Aussage an. Stelle falsche Aussagen richtig!

- Die Folge **(**1 - $\frac{1}{n}$ | $n \in \mathbb{N}$ *) besitzt die obere Schranke 1.
- Die Folge **(**1 - $\frac{1}{n}$ | $n \in \mathbb{N}$ *) besitzt keine untere Schranke.
- Die Folge **(**1 - $\frac{1}{n}$ | $n \in \mathbb{N}$ *) ist streng monoton steigend.
- Alle Folgenglieder der Folge **(**1 - $\frac{1}{n}$ | $n \in \mathbb{N}$ *) liegen im Intervall [0, 1].

2. Von einer Folge **(a_n| $n \in \mathbb{N}$ *)** kennt man 5 Folgenglieder : $a_1 = 1$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_6 = 11$, $a_7 = 13$ (Bsp7.03)

a. Gib an : $a_0 =$ $a_2 =$ $a_5 =$ $a_8 =$ $a_{100} =$

b. Kreuze an, welche Termdarstellung(en) (für $n \in \mathbb{N}$ *) der Folge richtig ist:

O $a_n = -1 + n \cdot 2$ O $a_n = 1 + 2 \cdot n$ O $a_n = 1 - n \cdot 2$ O $a_n = 2n - 1$

c. Welche Aussagen sind richtig. Kreuze an!

O Die Zahl 1 ist eine untere Schranke dieser Folge (a_n| **$n \in \mathbb{N}$ *)**

O Die Folge (a_n| **$n \in \mathbb{N}$ *)** ist nach oben beschränkt.

O Die Zahl - 1 ist eine untere Schranke dieser Folge (a_n| **$n \in \mathbb{N}$ *)**

O Die Folge (a_n| **$n \in \mathbb{N}$ *)** ist nach unten beschränkt.

3a. Ordne den folgenden Termdarstellungen (expliziete Darstellung) mit **$n \in \mathbb{N}$ *** die passende Folgenglieder zu: (Bsp.7.04)

$a_n = 3n - 2$	A			$a_1 = 1$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_6 = 11$, $a_7 = 13$
$a_n = (-1)^n$	B			$a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, $a_4 = 10$, $a_5 = 13$
$a_n = 2n - 1$	C			$a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 10$, $a_5 = 26$, $a_8 = 65$
$a_n = n^2 + 1$	D			$a_1 = -1$, $a_2 = +1$, $a_3 = -1$, $a_5 = -1$, $a_7 = -1$

3b. Berechne die fehlenden Folgenglieder (a_1, ..., a_8) zu den angegebenen Termdarstellungen (A,B,C,D):

4. Überprüfe Monotonie und Beschränktheit bei folgenden Folgen (a_n| **$n \in \mathbb{N}$ *)** (Bsp. 7.05)

z.B a) $a_n = n+3$ L = 3 → nach unten beschränkt, $a_n < a_{n+1}$ → $n+3 < (n+1) +3$ →streng monoton steigend

b) $a_n = (-1)^n \cdot n$

c) $a_n = 2 - 3n$

d) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$

Rekursive Darstellung einer Folge (S. 128)

Rekursionsgleichung eine Folge ($a_n \mid n \in \mathbb{N}^*$) **:** a_{n+1} wird mithilfe von a_n ausgedückt, a_0 muss angegeben werden

z.B $\underline{a_n = n + 3}$ $a_0 = 3$, $a_1 = 4$, $a_2 = 5$, $a_3 = 6$,…….. → $a_1 = a_0 + 1$; $a_2 = a_1 + 1$;…….→ $\underline{a_0 = 3 \text{ und } a_{n+1} = a_n + 1}$

Termdarstellung rekursive Darstellung

5. Wande um: Termdarstellung → rekursive Darstellung (Bsp: 7.51) Gib ebenfalls alle Schranken und die Monotonie der Folgen an!

a. $a_n = 2^{n+1}$ (Tipp: $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$)

b. $b_n = n^2 - n + 1$

6. Wandle um : rekursiv Darstellung → Termdarstellung (explizite Darstellung) (Bsp.7 .52)

a. $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = x_n + 5$

b. $b_0 = 4$ und $b_{n+1} = 3 \cdot b_n$

Grenzwerte und Konvergenz von Folgen S. 119

Nähern sich die Glieder einer Folge unbegrenzt einer bestimmten Zahl a, dann nennt man a den Grenzwert (Limes) der Folge:

a = $\lim_{n\to\infty} a_n$ $\qquad\qquad$ $n \to \infty$ ……… n geht nach unendlich

z.B $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) \quad =\ldots$

Konvergente Folge:

Eine Zahl a heißt Limes der Folge (a_n| $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ***)** $\quad$ a = $\lim_{n\to\infty} a_n$ $\quad$ wenn gilt:

Zu jeder Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}^*$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$

z. B

$Sei\ a_n = 1 - \frac{1}{n}$ und ε> 0 eine beliebig kleine Zahl, dann gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$

$$|1 - \frac{1}{n} - 1| < \varepsilon \quad \leftrightarrow \quad -\varepsilon < -\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon > \frac{1}{n} > -\varepsilon \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon > \frac{1}{n} \quad \leftrightarrow \quad n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall n \geq n_0$$

Beispiele:

7. Ermittle den Grenzwert der Folge (a_n| $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ***)** $\qquad$ $\mathbb{N}^* = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \ldots\ldots..\}$ $\qquad$ (S. 119/7.12)

$a_n = \frac{2}{n}$ $\qquad$ $b_n = \frac{n}{n^3}$ $\qquad$ $c_n = \frac{1-n}{n^3}$ $\qquad$ $d_n = \frac{2n^2+1}{n^2}$

8. Welche Aussagen sind richtig. Kreuze an! (S. 121) $\qquad$ $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$

- o Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- o Ist a_n eine konvergente Folge, so ist aber $c \cdot a_n$ nicht konvergent.
- o Ist a_n eine konvergente Folge, so ist auch $c + a_n$ nicht konvergent.

9. Welche der Folgen besitzen einen Grenzwert. Kreuze an.

O $a_n = 2 - \frac{2}{n}$ $\qquad$ O $b_n = \frac{5\,n}{8\,n^3}$ $\qquad$ O $c_n = (-1)^n$ $\qquad$ O $d_n = 5\,n$

Arithmetische Folgen und Geometrische Folgen S. 122ff

…………………………………………… Folge :

Eine Folge (a_n | $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ **)** heißt ………………………………….**Folge,** wenn die **Differenz** $\mathbf{a_n - a_{n+1}}$ für alle $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$

den gleichen Wert **k** besitzt. → $\mathbf{a_n = k \cdot n + d}$ mit $k,d \in \mathbb{R}$

Ist **k = 0** so spricht man von einer **konstanten Folge** $\mathbf{a_n = d}$ mit $d \in \mathbb{R}$ **.**

……………………………………………. Folge:

Eine Folge (b_n | $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ **)** heißt …………………………………. Folge, wenn der **Quotient** $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ für alle $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$

den gleichen Wert **q** besitzt. → $\mathbf{b_n = c \cdot q^n}$ mit $c,q \in \mathbb{R}^*$

Beispiele:

10. Von einer arithmetische Zahlenfolge kennt man einige Glieder. Vervollständige die Tabelle und gib die Termdarstellung der Folge an. (7.28)

n	0	1	2	4
a_n	1	3		

n	0	3	50	100
a_n		30	500	

11. Von einer geometrischen Zahlenfolge kennt man einige Glieder. Vervollständige die Tabelle und gib die Termdarstellung der Folge an. (7.43)

n	0	1	2	4
b_n	3	9		

n	0	3	4	5
b_n		128		2

Eigenschaften von arithmetischen Folgen (S. 124) $\mathbf{a_n = k \cdot n + d}$ mit $k,d \in \mathbb{R}$

wenn **k>0**

- nach unten beschränkt und nach oben beschränkt
- streng monoton steigend
- divergent

wenn **k< 0**

- nach oben beschränkt und nach unten beschränkt
- streng monoton fallend
- divergent

wenn **k = 0**

- nach unten und oben beschränkt
- konstant
- konvergent

Eigenschaften geometrischer Folgen (S. 125) $\mathbf{b_n = c \cdot q^n}$ mit $c,q \in \mathbb{R}^*$

wenn $|\mathbf{q}| \leq \mathbf{1}$ → beschränkt

streng monoton **fallend,** wenn $\mathbf{0 < q <} 1$

konstant , wenn $\mathbf{q = 1}$

konvergent mit **Limes 0,** wenn $|\mathbf{q}| < \mathbf{1}$

konvergent mit **Limes c,** wenn $\mathbf{q = 1}$

wenn $|\mathbf{q}| > \mathbf{1}$ → nicht beschränkt und divergent

streng monoton **steigend** wenn $\mathbf{q > 1}$

nicht monoton wenn $\mathbf{q < 0}$

divergent wenn $|\mathbf{q}| > \mathbf{1}$ oder $\mathbf{q = -1}$

Fibonacci- Folgen und der „Goldene Schnitt“ $\mathbf{f_o = 0}$, $\mathbf{f_1 = 1}$, $\mathbf{f_2 = 1}$,…… mit $\mathbf{f_{n+1} = f_{n-1} + f_{n-2}}$