Series infinitas

Una serie es la suma de los términos de una sucesión_infinita. Es el resultado de sumar los términos: $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ lo cual suele escribirse en forma más compacta con el símbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Una serie se dice que converge a L, si las sumas parciales de la serie convergen a L

Ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots$$

Series de potencias

Una serie de potencias alrededor de $x = 0$ es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Una serie de potencias alrededor de $x = x_0$ es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

En el cual el centro es x_0, y los coeficientes a_n son los términos de una sucesión.

Radio de convergencia

El radio de convergencia de una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \, , con\ a_n, x, x_0 \in R$$

Viene dado por la expresión

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$

Series de Taylor y de Maclaurin

Serie de Taylor

Es una representación de una función como una infinita suma de términos. Estos términos se calculan a partir de las derivadas de la función para un determinado valor de la variable (respecto de la cual se deriva), lo que involucra un punto específico sobre la función.

La serie de Taylor de una función *f* real o compleja $f(x)$ infinitamente diferenciable en el entorno de un número real o complejo a es la siguiente serie de potencias:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

Que puede ser escrito de una manera más compacta como la siguiente sumatoria:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Serie MaClaurin

Si la serie de Taylor está centrada sobre el punto cero, se le denomina **serie de McLaurin**.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Que puede ser escrito de una manera más compacta como la siguiente sumatoria:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Radio de convergencia

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n)}(a)(n+1)}{f^{(n+1)}(a)}\right|$$

Ejemplo

Determinar la serie de Taylor de la función $f(x) = senx$ alrededor del punto $a = \frac{\pi}{2}$ y determinar su radio de convergencia

Solución

Sabemos que $f'(x) = cosx$, $f''^{(x)} = -senx$, $f^{(3)}(x) = -cosx$, $f^{(4)}(x) = senx$

Por lo tanto $f^{(0)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, f^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Aplicamos en la serie de Taylor

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1!}(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3!}(x - \frac{\pi}{2})^3 + \frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4!}(x - \frac{\pi}{2})^4 \dots$$

Sustituyendo

$$senx = 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2!} + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^4}{4!} - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^6}{6!} + \cdots$$

Ejemplo

Determinar la serie de Maclaurin de la función $f(x) = e^x$ y determinar su radio de convergencia

Solución

Sabemos que $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f^{(3)}(x) = e^x$

Podemos afirmar que $f^{(n)}(x) = e^x$

Por lo tanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

Aplicamos en la serie de McLaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

El radio de convergencia

Calculamos el límite

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right|$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^n x}{(n+1)n!}}{\frac{x^n}{n!}} \right|$$

Simplificamos

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right|$$

$$L = 0 < 1$$

La serie converge por lo tanto el radio de convergencia es

$$R = \frac{1}{L}$$

$$R = \infty$$

Criterios de la razón y de la raíz

Criterios de la razón

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie para la cual $a_n \neq 0$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

1. Si $L < 1$ la serie es absolutamente convergente
2. Si $L > 1$ la serie es divergente
3. Si $L = 1$ no se puede concluir nada acerca de la convergencia de la serie mediante este criterio

Ejemplo

Utilice el criterio de la razón para determinar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{4^n}$$

Es convergente o divergente

Solución

Tomamos los términos correspondientes

$$a_n = \frac{n+1}{4^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{4^{n+1}}$$

Aplicamos el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+2}{4^{n+1}}}{\frac{n+1}{4^n}}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+2}{4^{n+1}}}{\frac{n+1}{4^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{4^n 4}}{\frac{n+1}{4^n}}$$

Simplificamos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+2}{4^{n+1}}}{\frac{n+1}{4^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{4(n+1)}$$

Determinamos el limite

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+2}{4^{n+1}}}{\frac{n+1}{4^n}}\right| = \frac{1}{4} < 1$$

Luego por el criterio de la razón la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{4^n}$$

Es convergente

Ejemplo

Utilice el criterio de la razón para determinar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$$

Es convergente o divergente

Solución

Aplicamos el criterio

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}\right|$$

Operaciones algebraicas

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2 2^n}{n^2 2^{n+1}}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{2n^2}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{n}{n}+\frac{1}{n})^2}{2\frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^2}{2}$$

Evaluamos el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

Luego, por la prueba de la razón la serie es absolutamente convergente.

Criterios de la raíz

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie para la cual $a_n \neq 0$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$$

1. Si $L < 1$ la serie es absolutamente convergente
2. Si $L > 1$ la serie es divergente
3. Si $L = 1$ no se puede concluir nada acerca de la convergencia de la serie mediante este criterio

Ejemplo

Utilice el criterio de la raíz para determinar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^{10}}\right]^n$$

Es convergente o divergente

Solución

Aplicamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^{10}}\right]^n}$$

Propiedades de la potenciación

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^{10}}\right]^n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^{10}})$$

Evaluamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^{10}}\right]^n} = 0 < 1$$

Luego por el criterio de la raíz la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^{10}}\right]^n$$

Es convergente

Ejemplo

Utilice el criterio de la raíz para determinar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

Es convergente o divergente

Solución

Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{3^n}\right|}$$

Aplicamos las propiedades de la potenciación

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{3}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

Luego la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

Es absolutamente convergente

Las pruebas de la integral y de comparación

Criterio de la integral

Sea f una funcion continua, decreciente, y de valores positivos para toda $x \geq 1$. Entonces la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

- Es convergente si y solo si la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

Existe

- Es divergente si y solo si la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$$

Ejemplo

Determinar si la siguiente serie es convergente, mediante el criterio de la integral

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n - 1}$$

Solución

Mediante el criterio de la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{e^x - 1} dx$$

Realizamos operaciones

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x-1}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{1}{\frac{1}{e^{-x}}-1}dx$$
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x-1}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx$$
Dado que la derivada de la función del denominador es el numerador de la fracción, integramos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x-1}dx = \lim_{b\to\infty} ln(1-e^{-x})|_1^b$$

Evaluamos
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x-1}dx = \lim_{b\to\infty}[ln(1-e^{-b}) - ln(1-e^{-1})]$$

Evaluamos el límite
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x-1}dx = ln(1) - ln(1-e^{-1})$$
Aplicamos propiedades del logaritmo
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x-1}dx = -ln\left(1-\frac{1}{e}\right)$$
Luego la serie es convergente, dado que la integral existe

Ejemplo
Determinar si la siguiente serie es convergente, mediante el criterio de la integral
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^{3/2}}$$

Solución
Mediante el criterio de la integral
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+2)^{3/2}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{1}{(x+2)^{3/2}}dx$$
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+2)^{3/2}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} (x+2)^{-\frac{3}{2}}dx$$

Integramos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x-1}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{(x+2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}|_1^b$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x+2)^{3/2}}dx = \lim_{b\to\infty} -2(x+2)^{-\frac{1}{2}}|_1^b$$

Evaluamos

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x+2)^{3/2}}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-2(b+2)^{-\frac{1}{2}}+2(1+2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x+2)^{3/2}}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-2}{(b+2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{(3)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

Evaluamos el límite

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x+2)^{3/2}}dx = \frac{2}{(3)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x+2)^{3/2}}dx\,\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Luego la serie es convergente, dado que la integral existe

Criterio de comparación

Sea la serie de términos positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie de términos positivos convergente, y $a_n \leq b_n$ para todos los $n \in N$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Es convergente
2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$es una serie de términos positivos divergente, y $a_n \geq b_n$ para todos los $n \in N$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Es divergente

Ejemplo

Determinar si la serie es convergente, mediante el criterio de comparación

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

Solución

Tomamos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Que es convergente

Observamos que

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \text{ , } para\ todo\ n$$

Luego la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

Es convergente

Ejemplo

Determinar si la serie es convergente, mediante el criterio de comparación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

Solución

Tomamos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Que es convergente

Observamos que

$$\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n} \text{ , } para\ todo\ n \geq 2$$

Luego la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

Es convergente