

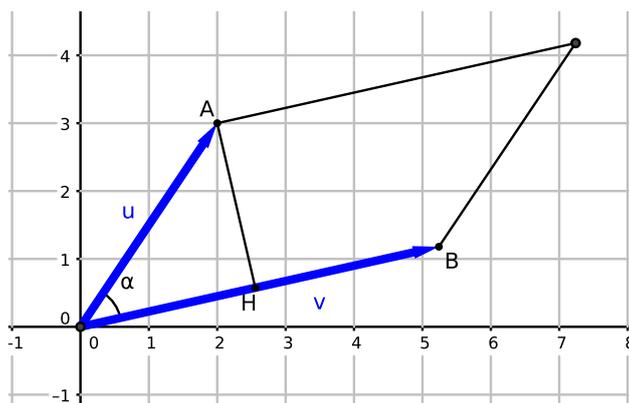
Dimostriamo la seguente proprietà.

PROPRIETÀ. Il parallelogramma che ha per lati due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} ha area pari al modulo del prodotto vettoriale tra \mathbf{u} e \mathbf{v} :

$$\text{Area parallelogramma} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

Inoltre se indichiamo con α l'angolo tra i due vettori si ha $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin(\alpha)$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il parallelogramma in figura, dove $\mathbf{u} = A$ e $\mathbf{v} = B$ sono due lati, α è l'angolo tra essi e H è la proiezione di A su \mathbf{v} .



Indichiamo con \mathcal{A} l'area del parallelogramma.
Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= (\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\| \sin(\alpha))^2 \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 \sin^2(\alpha) \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 \cdot (1 - \cos^2(\alpha)) \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 \cos^2(\alpha) \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 - (\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha))^2 \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2 \end{aligned}$$

Sviluppiamo ora i conti sostituendo le coordinate dei due vettori:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \cdot (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\ &= u_1^2v_1^2 + u_2^2v_1^2 + u_3^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_3^2 + \\ &\quad - (u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 + 2u_1v_1u_2v_2 + 2u_1v_1u_3v_3 + 2u_2v_2u_3v_3) \\ &= u_2^2v_1^2 + u_3^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_3^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_3^2 - 2u_1v_1u_2v_2 - 2u_1v_1u_3v_3 - 2u_2v_2u_3v_3 \\ &= (u_1v_2 - u_2v_1)^2 + (u_1v_3 - u_3v_1)^2 + (u_2v_3 - u_3v_2)^2 \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che $\mathcal{A} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

Inoltre uguagliando gli ultimi passaggi dei due precedenti conti si ha che

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2 \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 \cos^2(\alpha) \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 (1 - \cos^2(\alpha)) \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 \sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

Ovvero

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \sin(\alpha)$$

□

In maniera analoga si può dimostrare che il volume del prisma in cui tre spigoli sono dati dai vettori $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ si ottiene con la seguente formula:

$$\text{Volume prisma} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \right|$$

