LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA E AREA DEL CERCHIO

Qual è 'l geomètra che tutto s'affige per misurar lo cerchio, e non ritrova, pensando, quel principio ond' elli indige, tal era io a quella vista nova: veder voleva come si convenne l'imago al cerchio e come vi s'indova; ma non eran da ciò le proprie penne:

(Dante, Divina Commedia, Paradiso, Canto XXXIII, vv 133-139)

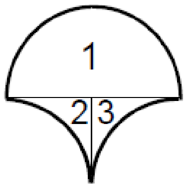
Introduzione

Come dice Enrico Giusti nella sua introduzione della **Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento,** uno dei grandi filoni che hanno portato all'invenzione del calcolo infinitesimale è il problema del calcolo delle aree delle figure piane e dei volumi dei solidi. Esso viene trattato diffusamente fin dall'antichità e trova nelle opere di Archimede[1] la sua massima espressione. La possibilità di misurare grandezze, ovvero associare ad ognuna di esse un numero che ne esprima il rapporto con una grandezza campione, è una delle prime motivazioni dello sviluppo della matematica. La scoperta di grandezze incommensurabili (lato del quadrato e sua diagonale) fa crollare la costruzione sviluppata dai pitagorici che poneva la scienza del numero alla base di tutto. A seguito di ciò i numeri vengono relegati ad una posizione marginale mentre si sviluppa la teoria delle proporzioni, che permette di operare sui rapporti tra grandezze senza considerarne la valenza numerica. Da questo momento (III secolo avanti Cristo) fino al Seicento, tutti i risultati sulle grandezze verranno espressi mediante rapporti o proporzioni. Ad esempio, in matematica classica, per esprimere il fatto che il volume del cono è un terzo del prodotto dell'area della base per l'altezza si dice che "il cono è un terzo del cilindro con la stessa base e la stessa altezza".

Le equivalenze tra figure vengono dimostrate o per equiscomponibilità (fig.1)

---

[1] Archimede (287- 212 A.C.) nasce a Siracusa e studia ad Alessandria; è un cultore di geometria e meccanica e scrive opere come: "Sull'equilibrio dei piani", "Sui corpi galleggianti", "Il metodo", "Sulla sfera e il cilindro", "Sulle spirali", "Sulla misura del cerchio", "L'arenario". A Siracusa dirige importanti lavori portuali, navali, militari. Assediata Siracusa da parte dei romani, partecipa alla difesa della città costruendo specchi ustori e macchine per lanciare dardi e pietre e muore durante l'assedio. Nel 1906 il filologo danese Heiberg studia il Palinsesto di Archimede; Il palinsesto, formato da 174 fogli di pergamena, contiene un libro di preghiere; queste furono scritte su di un libro contenente le seguenti opere di Archimede: Equilibrio dei piani; Spirali; La misura del cerchio; Sfera e il cilindro; I corpi galleggianti; Stomachion; Il metodo. Mentre il testo greco delle prime quattro opere è trasmesso anche da altri manoscritti, del trattato *I corpi galleggianti* prima del ritrovamento del palinsesto si aveva solo una traduzione latina, *Il metodo* era del tutto sconosciuto e dello *Stomachion* si aveva solo un frammento in traduzione araba. Lo studio del palinsesto ha dato modo di comprendere il pensiero di Archimede e, recentemente, di aggiungere elementi alla comprensione del suo pensiero matematico, in particolare la sua concezione dell'infinito e dell'infinitesimo.



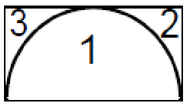


Fig. 1 depranoide

o , una volta stabilito quando una figura A è maggiore di una seconda B[2], mediante un procedimento indiretto chiamato “metodo di esaustione” e ideato da Eudosso.

Il metodo di esaustione

Nella risoluzione dei problemi di misura vengono seguite due fasi:

1. Ricerca del risultato, con le tecniche più disparate (fase euristica)
2. Dimostrazione del risultato per via rigorosa (fase dimostrativa)

Il metodo di esaustione interviene nella seconda fase, si basa su una argomentazione indiretta, su costruzioni puramente finite di figure che “***approssimano***” quella data e sull’ “***assioma di Eudosso-Archimede***[3]” .

Per provare che due figure non equiscomponibili sono equivalenti basta provare che non può essere né A<B né A>B.

Sulla misura del cerchio di Archimede

L’opera contiene tre teoremi e sembra che il secondo e il terzo non siano nel giusto ordine, poiché il secondo presuppone il terzo, forse a causa di un’errata trascrizione. Nel primo teorema Archimede dimostra con il metodo di esaustione che il cerchio è equivalente ad un triangolo rettangolo avente uno dei cateti congruente alla circonferenza e l’altro congruente al raggio (**questo teorema collega tra loro il problema della quadratura del cerchio e quello della rettificazione della circonferenza**), nel terzo teorema dimostra che il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro (2r) è compreso tra $3+\frac{10}{71}$ e $3+\frac{1}{7}$, nel secondo dimostra che il rapporto tra l’ area del cerchio e il quadrato del suo diametro è uguale a $\frac{11}{14}$.

[2] A è maggiore di B quando B può essere scomposta in un numero finito di parti con le quali si possa formare una terza figura C contenuta in A.

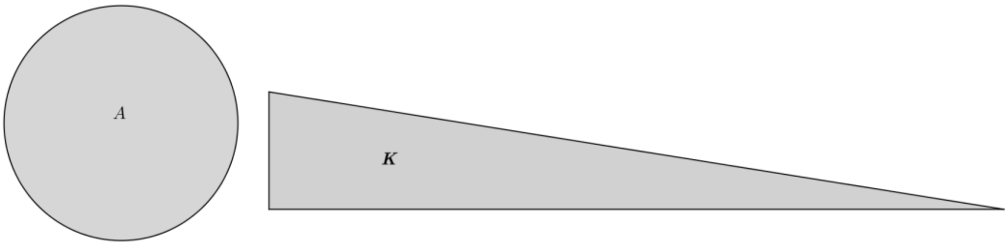
[3] Assioma (o postulato) di Eudosso-Archimede (def. 4 del libro V degli Elementi) : “date due grandezze nessuna delle quali nulla, è sempre possibile trovare un multiplo dell'una che superi l'altra”. Si avverte in questo postulato la presenza dell'infinito potenziale.

Teorema 1

Un cerchio è equivalente ad un triangolo rettangolo avente uno dei cateti congruente alla circonferenza e l’altro congruente al raggio. ($A = \frac{1}{2}Cr$)

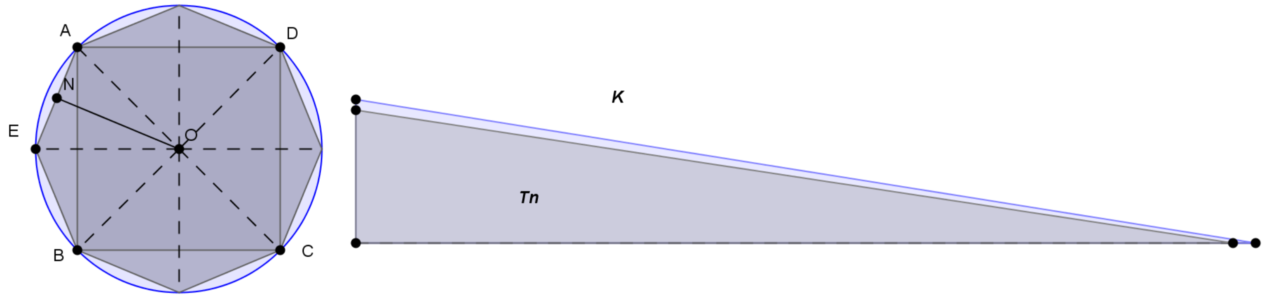
Dimostrazione (semplificata rispetto all’originale)

Chiamiamo A il cerchio e K il triangolo



Se A non è equivalente a K sarà I) A>K oppure II) A<K

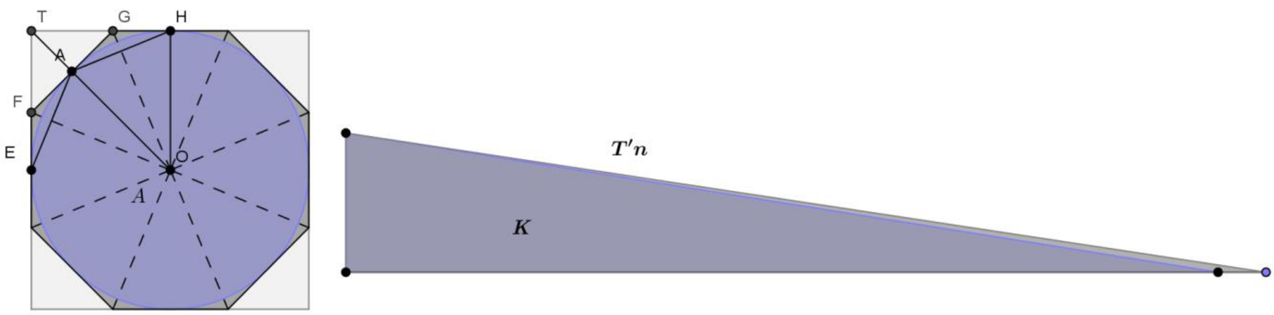
I)Se A>K, a partire dal quadrato inscritto ABCD, bisecando gli archi AB, BC, CD, DA, inscriviamo l’ottagono regolare e, proseguendo la costruzione, il poligono regolare inscritto di n lati: P_n; esso è equivalente ad un triangolo T_n che ha per base il suo perimetro e per altezza il suo apotema (congruente a ON).



Poiché il perimetro di tale poligono , e quindi la base di T_n, è minore della circonferenza (base di K) e la sua altezza (apotema) è minore del raggio ne segue che T_n è contenuto in K e quindi $P_n = T_n < K$.

D’altra parte , aumentando il numero di lati, il poligono P_n approssima sempre meglio il cerchio e data una qualunque area Q si potrà trovare un poligono inscritto tale che $A-P_n<Q$. Presa Q uguale alla differenza A-K troviamo $A-P_n< A-K$ da cui $P_n>K$. Ma ciò è assurdo perché $P_n = T_n < K$. Quindi non può essere A>K.

II)Se A<K, a partire dal quadrato circoscritto, bisecando gli archi compresi tra i punti di tangenza e tracciando le tangenti nei punti di bisezione circoscriviamo l’ottagono regolare e, proseguendo la costruzione, il poligono regolare circoscritto di n lati: P'_n; esso è equivalente ad un triangolo T'_n che ha per base il suo perimetro e per altezza il raggio. Poiché il perimetro di tale poligono è maggiore della circonferenza (base di K) e la sua altezza (raggio) è uguale al raggio ne segue T'_n contiene K e quindi $P'_n = T'_n > K$.

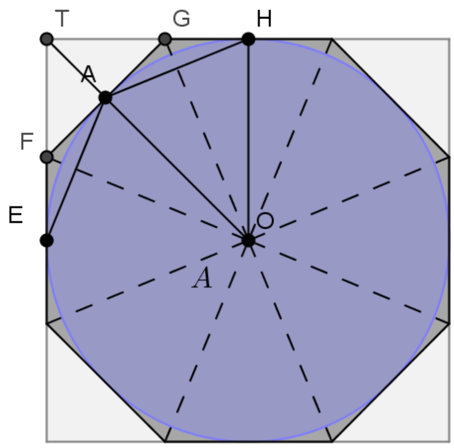


D’altra parte, <u>aumentando il numero di lati</u>, il poligono P'_n approssima sempre meglio il cerchio e data una qualunque area Q si potrà trovare un poligono circoscritto tale che P'_n-A<Q. Presa Q uguale alla differenza K-A troviamo P'_n-A<K-A da cui <u>P'_n<K</u>. Ma ciò è assurdo perché <u>P'_n =T'_n>K.</u> Quindi non può essere A<K.

Concludendo: non potendo essere né A>K né A<K deve essere A=K.

Osservazioni

1) Nella prima parte della dimostrazione, Archimede si serve, senza farvi riferimento, del procedimento costruttivo-dimostrativo della proposizione 2 del libro XII degli Elementi di Euclide, dove si dimostra la diretta proporzionalità tra l’area del cerchio e il quadrato del diametro. Questo metodo, detto di esaustione, trova una sua giustificazione teorica nella proposizione 1 del X libro degli Elementi di Euclide: “date due grandezze, se dalla maggiore viene sottratta una grandezza maggiore della metà e da quello che resta una grandezza maggiore della sua metà, e ripetendo continuamente questo procedimento, allora resterà una grandezza più piccola della minore data”. Tale proposizione si può dimostrare per assurdo a partire dall’assioma (o postulato) di Eudosso-Archimede.
2) Nella seconda parte della dimostrazione originale, Archimede prova che, nel passare da un poligono regolare di n lati circoscritto al successivo di 2n lati, vengono “tagliati” dei triangoli maggiori della metà dei residui per cui, continuando il processo, la differenza tra l’area del poligono circoscritto e l’area del cerchio sarà minore di una qualunque area fissata, ad esempio della differenza tra l’area del triangolo e quella del cerchio.



3) Il metodo di esaustione non elimina l'infinito, ne fa un uso nell’unico modo previsto da Aristotele: l'infinito in potenza. Ma …
“*Ma un esame approfondito dei metodi utilizzati dai greci consente l'apertura ad una diversa concezione dell'infinito. Se consideriamo, ad esempio, la successione dei poligoni inscritti nel cerchio, notiamo che essa è orientata, pur nell'illimitatezza, verso un fine rappresentato dal cerchio, che può considerarsi come la causa finale irraggiungibile. Il cerchio è un limite che comprende la successione illimitata dei*

poligoni, pur non costituendone un termine effettivo; costituisce comunque una soluzione all'indefinita potenzialità di sviluppo della successione, pur sviluppandosi al di fuori di quest'ultima. Ciò significa che è possibile configurarsi concretamente la soluzione finale di un processo illimitato, pur non rinunciando al carattere potenziale di quest'ultimo. L'inesauribilità dell'illimitato resta un fatto irrinunciabile, ma non costringe per questo ad accontentarsi di una semplice approssimazione di ciò che si vuole raggiungere. Pur non uscendo mai dal finito ed essendo anzi di quest'ultimo nient'altro che un'incessante ripetizione, l'illimitato può indicare qualcosa che lo trascenda, prospettare questa trascendenza come segno caratteristico di una completezza attuale e infinita e di conseguenza rifletterne per analogia la natura2. Per esempio, la somma delle serie geometriche utilizzate dai greci costituisce un limite concretizzabile in un ente matematico ben definito che non appartiene alla successione indefinita delle somme parziali che comunque tendono ad esso. Viene raggiunto rinunciando all'analisi indefinita della successione che lo precede, ponendosi in un punto di riferimento esterno. Nella Geometria di Eudosso e Archimede, si vede qualcosa di simile alla soluzione finale di un processo illimitato, ma resta intatta l'opinione che ciò che si vuole rappresentare è destinato ad un'irriducibile impenetrabilità. Per questo i greci designarono questa impenetrabilità con l'assurdo." [M. Galeazzi]

4) Il metodo di esaustione, in termini moderni, è sostanzialmente il metodo delle classi (classi=insiemi) contigue.

Definizione.

Due classi di grandezze sono contigue se: a) gli insiemi sono disgiunti e separati: cioè ogni elemento del primo insieme è sempre inferiore di ogni elemento del secondo; b) gli insiemi godono dell'avvicinamento indefinito: cioè possiamo sempre trovare un elemento del secondo insieme ed un elemento del primo insieme in modo che la loro differenza sia minore di una qualunque grandezza (omogenea) piccola a piacere.

Due classi contigue ammettono uno ed un solo elemento separatore.

Oggi per lunghezza della circonferenza (C) intendiamo l'elemento di separazione delle classi contigue di grandezze costituite dai perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti ad essa, mentre per area del cerchio (A) intendiamo l'elemento di separazione delle classi contigue di grandezze costituite dalle aree dei poligoni inscritti e circoscritti ad essa.

Il rapporto tra la circonferenza e il diametro è il numero che oggi indichiamo con la lettera π [4], da cui le note formule:

$$C = 2\pi r; \qquad \text{e} \qquad A = \frac{1}{2}Cr = \pi r^2$$

[4] "περιμετρος", "peripheria circuli"

Nella **terza** proposizione del trattato, Archimede fornisce una stima di tale numero.

Teorema 3 (con cenno di dimostrazione)

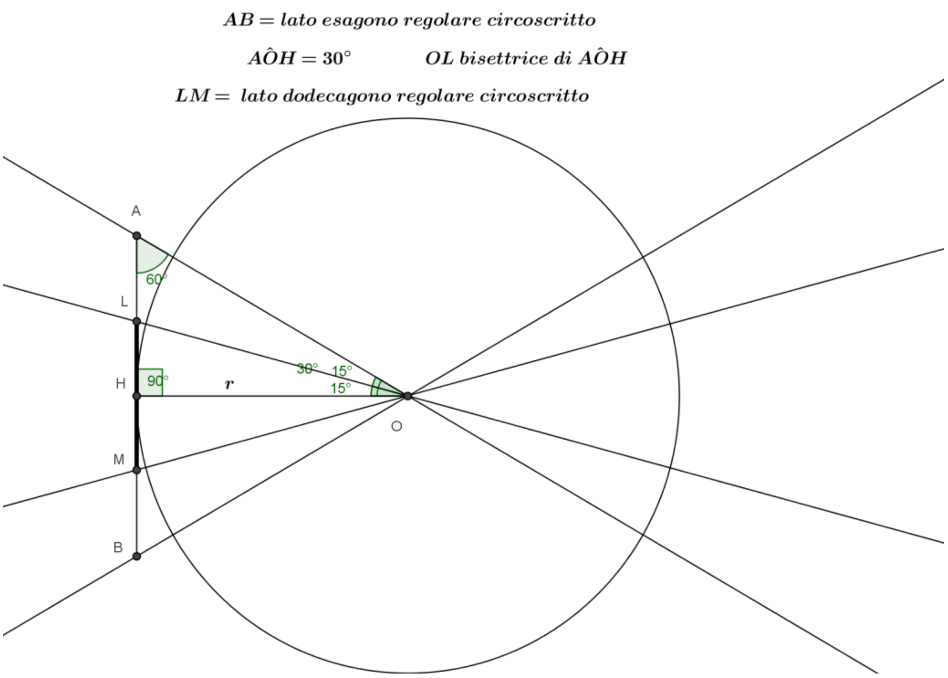
La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro e lo supera ancora di meno di un settimo del diametro, e di più di dieci settantunesimi.

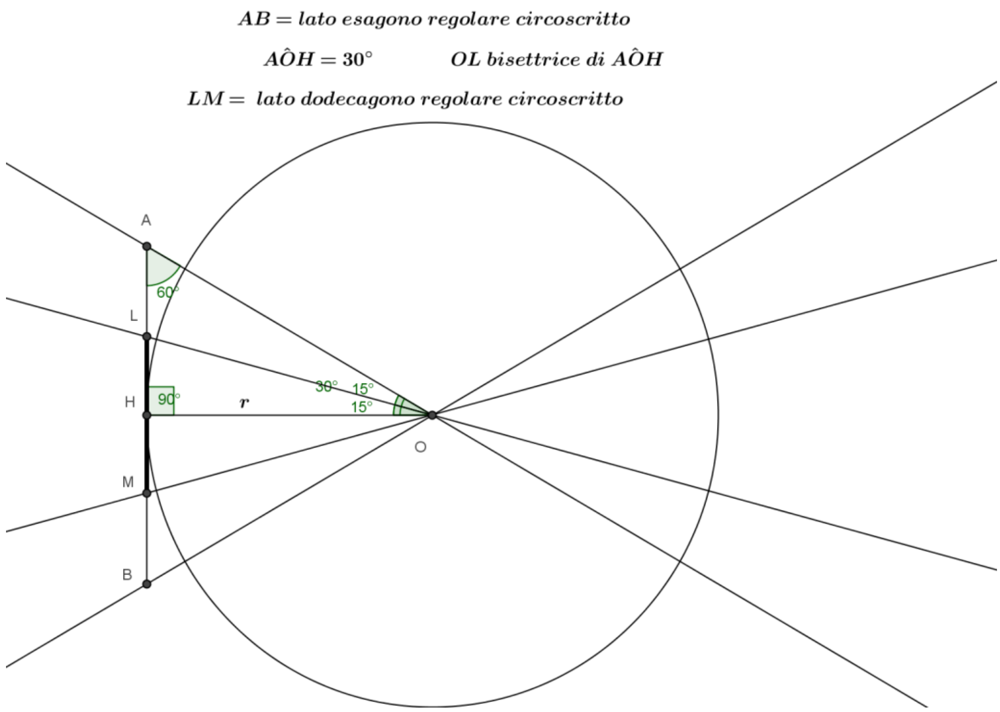
$$2r\left(3+\frac{10}{71}\right) < C < 2r\left(3+\frac{1}{7}\right)$$

Da cui si deduce la nota approssimazione di π :

$$\left(3+\frac{10}{71}\right) < \pi = \frac{C}{2r} < \left(3+\frac{1}{7}\right)$$

In questa proposizione, Archimede determina due approssimazioni, una per eccesso e una per difetto, per la lunghezza di una circonferenza, considerando rispettivamente i poligoni regolari circoscritti e quelli inscritti alla circonferenza stessa. Egli parte dall’esagono regolare e raddoppia successivamente il numero dei lati (12,24,48,96) fino a giungere ai poligoni regolari, circoscritti e inscritti, di 96 lati e calcola con essi le approssimazioni cercate, dividendo il loro perimetro per il diametro. Nella dimostrazione Archimede utilizza spesso il teorema della bisettrice di un angolo interno di un triangolo, anche se poi sviluppa una procedura sostanzialmente algebrica per calcolare i perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti. La novità del procedimento seguito da Archimede, rispetto alle diverse approssimazioni di π fatte dai suoi predecessori babilonesi, egiziani o cinesi, è che il suo è un procedimento iterativo, per cui si possono ottenere approssimazioni sempre migliori ripetendo sempre lo stesso processo; tanto più grande è il numero dei lati dei poligoni considerati, tanto migliori saranno le approssimazioni ottenute. Vediamo come ad esempio Archimede calcola il lato del dodecagono regolare circoscritto, a partire dall’esagono regolare circoscritto.





1) Si calcola il lato dell’esagono regolare in funzione del raggio. Facendo riferimento al triangolo rettangolo AHO con gli angoli acuti di 30° e 60°, il cateto AH è metà del lato dell’esagono. Posto $\overline{AH} = x \; e \; \overline{AO} = 2x$, applicando il teorema di Pitagora si ricava $\overline{AH}$: $x^2 + r^2 = 4x^2$, da cui $3x^2 = r^2$, $x = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{3}}{3}$. Il lato dell’esagono regolare circoscritto , AB, pertanto misura $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$. (Nel teorema originale Archimede scrive i rapporti tra le grandezze e approssima per difetto $\sqrt{3}$ con il rapporto $\frac{265}{153}$)[5]
2) Si biseca l’angolo $A\hat{O}H$: LH è metà del lato del dodecagono regolare circoscritto. Per determinare LH si applica il teorema della bisettrice di un angolo interno di un triangolo:

$$AL : LH = AO : HO$$

Componendo:

$(AL + LH) : LH = (AO + HO) : HO$; $AH : LH = (AO + HO) : HO$ da cui $LH = \frac{AH \cdot HO}{AO + HO}$

$$\overline{LH} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{3} \cdot r}{\frac{2r\sqrt{3}}{3} + r} = \frac{r^2\sqrt{3}}{2r\sqrt{3} + 3r} = \frac{r^2\sqrt{3}}{r\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})} = \frac{r}{2 + \sqrt{3}} = r(2 - \sqrt{3})$$

Pertanto il lato del dodecagono regolare circoscritto, LM, misura $2r(2 - \sqrt{3})$.

Dividendo il perimetro di tale dodecagono per il diametro si ottiene: $12\frac{2r(2-\sqrt{3})}{2r} \sim 3{,}2153$ approssimazione MOLTO GROSSOLANA di π.

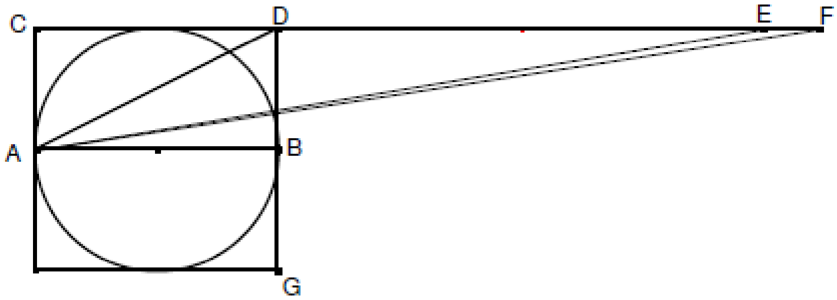
[5] Nel procedimento che si riferisce ai poligoni inscritti invece che circoscritti Archimede approssima per eccesso la $\sqrt{3}$ con il rapporto $\frac{1351}{780}$.

Nella **seconda** proposizione, che utilizza il risultato della terza, Archimede vuole dare un risultato esatto per l'area del cerchio (il risultato non è però esatto perché usa il valore 22/7 come approssimazione di π). Sia l'enunciato che la dimostrazione sono un po' grossolani.

Teorema 2

Il cerchio ha rispetto al quadrato del diametro il rapporto che ha 11 rispetto a 14.

Dimostrazione (semplificata rispetto all'originale)



Dato un cerchio di diametro AB, si circoscriva il quadrato di lato CD (congruente al diametro); si prolunghi CD di un segmento DE congruente al doppio di CD, e DE di un segmento EF, settima parte di CD. Ne segue che CF è i $\frac{22}{7}$ di CD e pertanto anche il rapporto tra le aree dei triangoli ACF e ACD (stessa altezza AC) è $\frac{22}{7}$. Poiché il triangolo ACD è equivalente ad un quarto del quadrato di lato CD allora il triangolo ACF è equivalente ai $\frac{22}{28}$ di tale quadrato. Ma il triangolo ACF, per il teorema 1, è equivalente al cerchio di diametro AB: il cerchio dunque ha rispetto al quadrato del diametro il rapporto che ha 11 rispetto a 14.

Il numero π

Le prime 999 cifre di pi greco..

```
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230
78164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095
50582231725359408128481117450284102701938521105559644622948954930
38196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692
34603486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815
20920962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951
94151160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446
23799627495673518857527248912279381830119491298336733624406566430
86021394946395224737190702179860943702770539217176293176752384674
81846766940513200056812714526356082778577134275778960917363717872
14684409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290
21960864034418159813629774771309960518707211349999998372978049951
05973173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193
11881710100031378387528865875332083814206171776691473035982534904
28755468731159562863882353787593751957781857780532171226806613001
92787661119590921642019...
```

Lo studio della sua natura ha tormentato i matematici per secoli, a partire da Archimede.

Per ora accontentiamoci di dire che:

Nel 1761 il matematico svizzero Joahnn Heinrich Lambert dimostrò che esso è un numero **irrazionale** e quindi non può essere scritto come quoziente di due interi (e quindi la sua rappresentazione decimale è illimitata e aperiodica) Nel 1882 il matematico tedesco Ferdinand von Lindemann dimostrò che esso è **trascendente**, ovvero non algebrico. Ciò significa che π non è soluzione di una equazione polinomiale a coefficienti razionali e quindi è impossibile esprimere π usando un numero finito di interi, di frazioni e di loro radici. Poiché nessun numero trascendente è costruibile con riga e compasso (abbiamo visto che la radice quadrata di due , algebrico, è costruibile, anche se non tutti i numeri algebrici lo sono) , la trascendenza di π ha stabilito l'impossibilità della quadratura del cerchio nel senso classico, cioè la costruzione con riga e compasso di un quadrato della stessa area di un dato cerchio. Trovare una soluzione richiederebbe infatti la costruzione del numero $\sqrt{\pi}$ (infatti l'area del cerchio è πr^2, quindi un quadrato con area πr^2 deve avere lato pari a $r\sqrt{\pi}$).

Bibliografia

Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento di *E. Giusti*

Appunti di geometria classica *C. Marchini*

La quadratura del cerchio e dell’ iperbole *Leonardo Colzani*

Sulla misura del cerchio *Archimede*

Gli Elementi *Euclide*

Il metodo di esaustione nella storia dell’analisi infinitesimale G*iorgio T. Bagni*